§3. Коши тектес интегралдың шекаралық мәндері
1. Негізгі лемма

Егер $\varphi(\tau)$ тығыздығы Гельдер шартын қанағаттандырса және t нүктесі интегралдау контурының ұштарына тең болмаса, онда контурдың $z = t$ нүктесі арқылы өткенде

$$\psi(z) = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} d\tau$$

функциясы үзіліссіз, яғни z-тің t –ге контурдың кез келген жағынан кез келген жолмен жақындауында $\psi(z)$ функциясының анықталған шектің мәні бар:

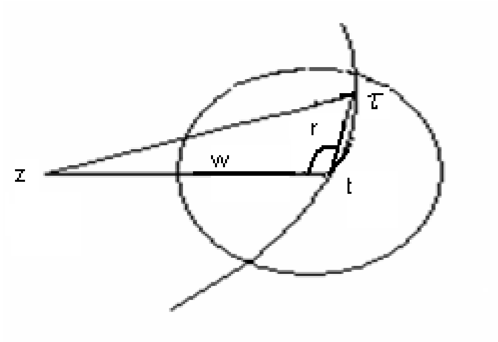
$$\lim_{z \to t} \psi(z) = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau = \psi(t).$$

Дәлелдеу үшін

$$\psi(z) - \psi(t) = \int_L (z - t) \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{(\tau - z)(\tau - t)} d\tau$$

айырымын бағалаймыз. Оны

$$\psi(z) - \psi(t) = I_1 + I_2$$



түрінде өрнектейік. Мұнда I_1 арқылы центрі t нүктесінде радиусы жеткілікті кішкене δ дөңгелек ішінде жатқан L контурының L_δ бөлігі арқылы алынған интеграл белгіленген, ал I_2 арқылы қалған $L - L_\delta$ бөлігі арқылы алынған интеграл белгіленген.

I_1 интегралын бағалайық. Алдымен z-тің t-ге ұмтылуы контурға жанама болмайтын белгілі бір жолмен жүргізілсін. Онда жеткілікті кішкене δ үшін t нүктесіндегі доғал емес ω бұрышының ω_0 >0 төменгі шекарасы бар. $z + \tau$ үшбұрышына синустар теоремасын қолдансақ

$$\frac{|z - t|}{|\tau - z|} = \frac{\sin \beta}{\sin \omega} \leq \frac{1}{\sin \omega_0} = K \qquad (1)$$

мұндағы K–белгілі бір оң сан.

Гельдер шарты бойынша

$$\left|\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\right| < Ar^{\lambda-1}, \qquad (2)$$

мұнда $r=|\tau-t|$.

L контурының жатықтығының мынадай қасиетін пайдаланамыз (§1, (10)): егер S –контур доғасының ұзындығы, ал оны керетін хорда ұзындығы r болса, онда жатық контур үшін $\frac{ds}{dr}$ қатынасы шектеулі шама, яғни

$$\left|\frac{ds}{dr}\right| \le m,$$

мұндағы m–оң тұрақты. Демек,

$$|d\tau| = |ds| \le m|dr|. \qquad (3)$$

Енді (1)-(3) бағалауларын қолдансақ:

$$|\mathrm{I}_1| \le \int_{L_\delta}\left|\frac{z-t}{\tau-z}\right|\left|\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\right||d\tau| < \mathrm{KA}\,m\int_{L_\delta} r^{\lambda-1}|dr| = 2KAm\int_0^\delta r^{\lambda-1}dr = 2KAm\,\delta^\lambda/\lambda$$

Мұнан кез келген $\varepsilon>0$ саны үшін $|I_1|<\varepsilon/2$ болатындай δ санын әрқашан таңдап алуға болатынын көреміз. Енді осы таңдап алынған δ санын пайдаланып, I_2 интегралын бағалайық. I_2 интегралы t нүктесінде z арқылы үзіліссіз, өйткені $L-L_\delta$ контурында $\tau\ne t$. Үзіліссіздік анықтамасы бойынша жеткілікті аз $|z-t|$ үшін

$$|I_2| < \varepsilon/2$$

теңсіздігі орындалады. Сонымен,

$$|\psi(z)-\psi(t)| \le |I_1|+|I_2| < \varepsilon.$$

Енді z-тің t-ге контурға жанама емес жолмен ұмтылу шартынан құтылайық.

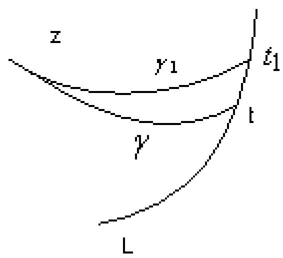
Жоғарыдағы бағалаудың t-ден тәуелсіз жүргізілгенін байқаймыз, демек, $\psi(z)$ өзінің $\psi(t)$ шегіне бірқалыпты ұмтылады. Мұнан $\psi(z)$ функциясының шекаралық мәні $\psi(t)$ үзіліссіз екені шығады. Шынында да, егер t, t_1 нүктелері L бойында жатқан болса, онда

$$\left|\Psi(z)-\Psi(t_1)\right| \le \left|\Psi(t)-\Psi(z)\right| + \left|\Psi(z)-\Psi(t_1)\right| \quad ,$$

ал$\psi(z)$ функциясының шекке ұмтылуының бірқалыптылығынан мұның оң жағындағы екі қосылғышты да жеткілікті аз етіп алуға болады, тек t, t_1, және z нүктелері бір-біріне жеткілікті жақын жатса болғаны.

Айталық, t-ге z нүктесі L-ге жанама болатын белгілі бір γ қисығы бойымен ұмтылсын. γ қисығы бойынан t-ге жеткілікті жақын z нүктесін алып, ол арқылы t нүктесіне жеткілікті жақын жатқан L бойының t_1 нүктесінен өтетін γ_1 қисығын жүргізейік және ол L қисығын жанамайтын болсын. zt және zt_1 хордаларының ұзындықтарының екеуі де бірге жеткілікті аз болатындай етіп γ_1 қисығын әрқашанда таңдап алуға болады. Бұл Н.И.Муехелишвилидің «Сингулярлық интегралдық теңдеулер» кітабында дәлелденген.

Енді жоғарыда дәлелденген жанама емес жол бойымен шектің бар болу тұжырымын қолданып және шектік мәндер үзіліссіздік қасиетін пайдаланып ,



$$\left|\psi(z)-\psi(t_1)\right| \text{ және } \left|\psi(t)-\psi(t_1)\right|$$

шамаларының жеткілікті аз екенін аламыз, сонда

$$\left|\psi(z)-\psi(t)\right| \le \left|\psi(z)-\psi(t_1)\right| + \left|\psi(t_1)-\psi(t)\right|$$

шамасы да жеткілікті аз болады, яғни кез келген жол бойымен шектік мән бар екені дәлелденеді.

Ескерту. $\psi(z)$ функциясының шегінің бар болуы төңіректік (локальдік) қасиет, яғни оның берілген t нүктесінде дұрыстығы осы нүкте маңайында $\varphi(\tau)$ тығыздығының қасиетінен шығады. Шынында да, оны дәлелдеуге Гельдер шартын қанағаттандырады деп ұйғарып, t нүктесін қоршаған жеткілікті кішкене доға бойынша алынған интегралды тікелей бағаладық. Ал $\psi(z)$ функциясының t нүктесінде үзіліссіздігі үшін контурдың қалған бөлігінде $\varphi(\tau)$ функциясының Гельдер шартын қанағаттандыруын өтінбейміз, оның тек үзіліссіз болса болғаны, тіпті үзілісті болсадағы болады, тек интегралдану шарты сақталса болғаны.