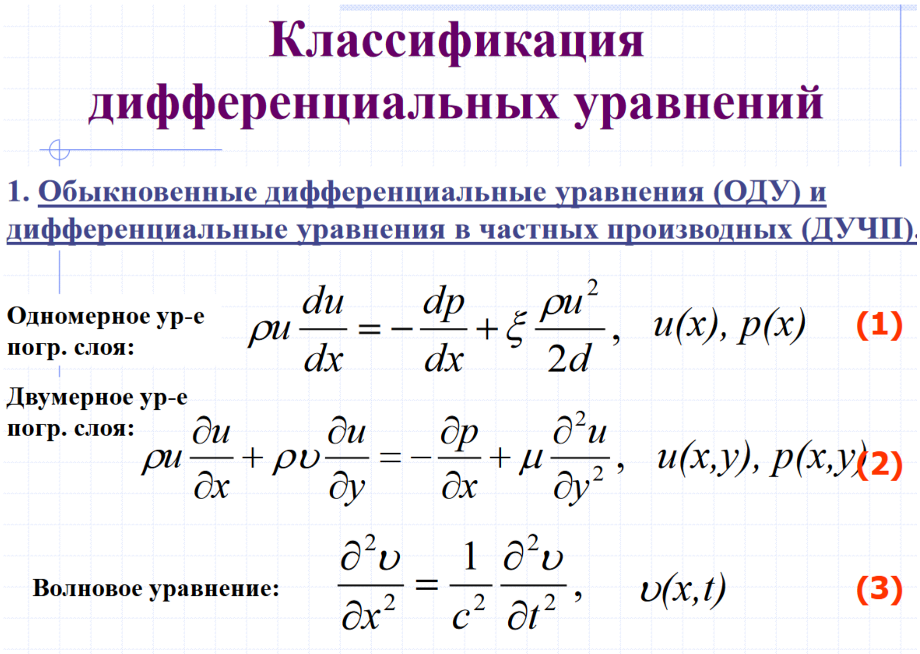
КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Лектор: Болегенова Салтанат Алихановна
+7 701 386 97 55
e-mail.: Saltanat.Bolegenova@kaznu.kz

КЛАССИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель лекции - Для вычислителя важно уметь классифицировать дифференциальные уравнения, так как от этого зависит выбор численного метода решения.

Дифференциальные уравнения можно классифицировать по нескольким признакам. Рассмотрим наиболее важные из них.



–Обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения в частных производных.

Если неизвестная функция в дифференциальном уравнении зависит *только от одной переменной*, то такое дифференциальное уравнение называется *обыкновенным* дифференциальным уравнением.

Если неизвестная функция в дифференциальном уравнении зависит *от нескольких переменных*, то такое дифференциальное уравнение называется дифференциальным уравнением *в частных производных*.

Примеры.

Стационарное одномерное течение жидкости в трубе описывается обыкновенным дифференциальным уравнением:

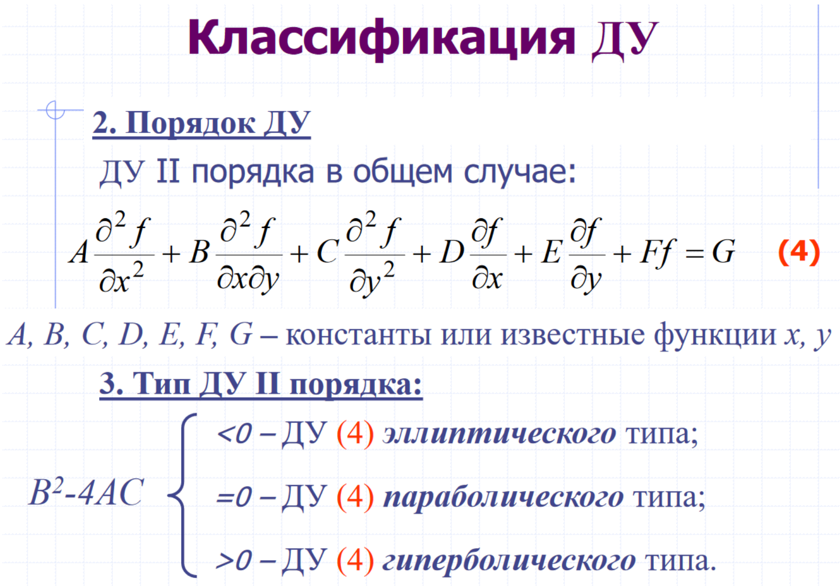
$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \xi \frac{\rho u^2}{2d}, \qquad (1.1)$$

т.к. неизвестная функция *u(x)* зависит только от одной переменной *x*.

Стационарное двумерное течение жидкости в трубе описывается дифференциальным уравнением в частных производных:

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,. \qquad (1.2)$$

Здесь неизвестная функция *u(x,y)* зависит от двух переменных: *x,y*.



–Порядок

Порядок уравнения равен *порядку наивысшей производной*, входящей в дифференциальное уравнение.

Например, уравнение (1) – I порядка, уравнение (2) – II порядка. Уравнение II порядка в самом общем случае можно представить в виде:

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+D\frac{\partial f}{\partial x}+E\frac{\partial f}{\partial y}+Ff=G\,.(1.3)$$

Уравнения II порядка классифицируются следующим образом:

а) если B^2-$4AC=0$, то уравнение (1.3) является ***параболическим уравнением***;

б) если B^2-$4AC<0$, то уравнение (1.3) является ***эллиптическим уравнением***;

с) если B^2-$4AC>0$, то уравнение (1.3) является ***гиперболическим***.

Уравнение II порядка (1.2) является параболическим уравнением (проверьте это, приведя его к виду (1.3) и найдя, чему равно выражение B^2-$4AC$).

Примером эллиптического уравнения является уравнение Пуассона, описывающее стационарное распределение температуры от теплового источника *q(x,y)* (при *q(x,y)>0* в точке *(x,y)* тепло выделяется, а при *q(x,y)<0* - поглощается):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=-q(x,y)\,. \qquad (1.4)$$

В качестве примера гиперболического уравнения приведем уравнение колебаний:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad (1.5)$$

Отметим, что тип уравнения определяется *только коэффициентами при вторых производных* и никак не зависит ни от коэффициентов при первых производных и при самой функции, ни от свободного члена.

Рассмотрим еще одно уравнение с переменными коэффициентами:

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin x \qquad (1.6)$$

Здесь $A=x$, $B=0$, $C=1$, следовательно, $B^2\text{-}4AC=-4x$. Этот пример иллюстрирует тот факт, что тип уравнения с переменными коэффициентами может изменяться от точки к точке: при $x<0$ уравнение (1.6) является эллиптическим, при $x=0$ уравнение (1.6) является параболическим, при $x>0$ уравнение (1.6) гиперболическое.

–Линейность

Линейным называется такое дифференциальное уравнение, в которое *зависимая переменная и все ее производные входят линейным образом*, в частности, они не умножаются друг на друга, не возводятся в степень, не являются аргументами трансцендентных функций и т.п.

Например, уравнения (1.4)-(1.6) являются линейными, а уравнения (1.1)-(1.2) - нелинейными (объясните, почему). Уравнение (1.3) является линейным, если коэффициенты *A, B, C, D, E, F* не зависят от неизвестной функции *f* и ее производных.

Большинство уравнений, описывающих теплофизические явления и процессы, являются нелинейными.

–Однородность

Дифференциальное уравнение вида (1.3) называется ***однородным***, *если его правая часть равна нулю* для всех x и y. В противном случае оно называется ***неоднородным***.

Например, уравнение (1.5) – однородное, а уравнения (1.1), (1.2), (1.4), (1.6) - неоднородные. Уравнение (1.3) является однородным, если $G=0$, и неоднородным, если $G\neq0$.

Аналитически можно решить, как правило, только обыкновенные линейные дифференциальные уравнения (да и то далеко не все) и только некоторые специальные виды дифференциальных уравнений в частных производных. Для всех остальных уравнений, а особенно для уравнений и систем уравнений, описывающих реальные задачи, имеющие практическое приложение, численные методы являются практически единственными методами решения.

Контрольные вопросы:

1. Какое ДУ является линейным?
2. Какое ДУ является однородным?
3. Как определяется порядок ДУ?
4. Какие типы ДУ II порядка Вы знаете?
5. Чем отличается равномерная сетка от неравномерной?
6. Что такое «сеточная функция»?
7. Что такое «конечно-разностная схема»?
8. Что такое «шаблон»?