Лекция 1. Криволинейные интегралы: Определение и физический смысл криволинейного интеграла первого рода. Условия существования криволинейного интеграла первого рода Вычисление криволинейных интегралов первого рода

Определение и физический смысл криволинейного интеграла первого рода

Используя понятие длины кривой, а также формулы для ее вычисления при различных способах задания кривой, можно ввести понятие интеграла вдоль спрямляемой (в частности, гладкой или кусочно-гладкой) кривой так же, как вдоль прямолинейного отрезка.

Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ с прямоугольной декартовой системой координат Oxy имеется непрерывная спрямляемая кривая AB (рис. 1), в точках которой задана действительная функция $f(M) = f(x, y)$. Выберем разбиение $T = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ кривой AB с точками деления $A_0 = A$, A_1, ..., $A_n = B$. Длины элементарных дуг $A_{i-1}A_i$ обозначим через Δs_i, а максимальную их этих длин - через $\lambda = \lambda(T)$. Возьмем на каждой дуге $A_{i-1}A_i$ по точке $M_i\,(x_i; y_i)$.

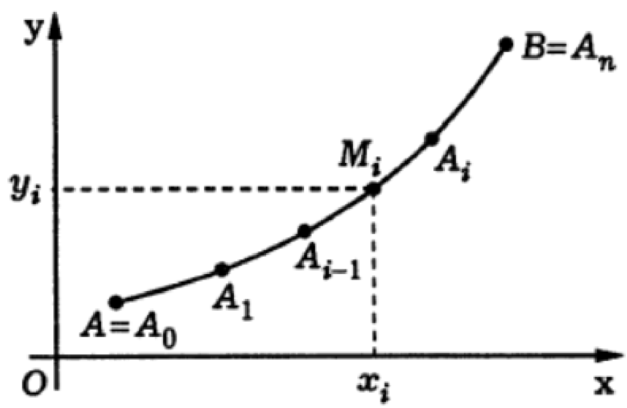

Рис. 1

Отметим, что подобное разбиение можно построить и в случае замкнутой кривой, если за точку A_0, совпадаюшую в этом случае с A_n, взять любую точку кривой AB, а остальные точки $A_i, i = \overline{1, n-1}$, расположить в соответствии с выбранным направлением на этой замкнутой кривой.

Составим сумму вида

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right) \Delta s_i, \tag{1.1}$$

которую называют интегральной суммой функции $f(x, y)$ вдоль кривой AB.

Определение 1.1. Пусть существует предел I интегральных сумм (1.1) при $\lambda(T) \to 0$, не зависящий ни от выбора разбиения кривой AB, ни от выбора точек M_i на элементарных дугах, т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для любого разбиения $T = \{A_0, \ldots, A_n\}$ кривой AB с параметром $\lambda(T) < \delta(\varepsilon)$ при любом выборе точек M_i на дугах $A_{i-1}A_i$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right) \Delta s_i - I\right| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Такой предел называют **криволинейным интегралом первого рода** (иногда - первого типа) вдоль кривой (или дуги) AB и обозначают

$$I = \int\limits_{AB} f(x, y) ds.$$

Итак,

$$\int\limits_{AB} f(x, y) ds = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right) \Delta s_i. \tag{1.3}$$

Замечание 1.1. Физический смысл криволинейного интеграла первого рода: если $\rho(x, y)$ - линейная плотность в точке (x, y) материальной кривой AB, то

$$m = \int\limits_{AB} \rho(x, y) ds$$

является массой кривой AB.

Отметим, что в определении криволинейного интеграла первого рода направление обхода кривой не играет никакой роли, так как от выбора направления не зависит интегральная сумма. Пусть, например, кривая AB не замкнута, а BA обозначает ту же кривую, но с противоположным направлением обхода (от B к A, если исходным является направление от A к B). Тогда можно записать

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{BA} f(x,y)ds. \tag{1.4}$$

Аналогично можно ввести понятие интеграла вдоль пространственной кривой. Пусть на пространственной кривой AB задана функция $f(x,y,z)$ (рис. 2). Как и в плоском случае, проведем разбиение $T = \{A_0,\ldots,A_n\}$ кривой AB точками $A_0 = A, A_1,\ldots,A_n = B$ на элементарные дуги $A_{i-1}A_i$. На каждой дуге $A_{i-1}A_i, i = \overline{1,n}$, выберем точку $M_i\,(x_i;y_i;z_i)$. Составив интегральную сумму и перейдя к пределу при $\lambda(T)\to 0$, получим значение интеграла вдоль пространственной кривой AB:

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i,y_i,z_i\right)\Delta s_i, \tag{1.5}$$

где Δs_i - длина элементарной дуги $A_{i-1}A_i$, а $\lambda(T)$ - максимальная из длин Δs_i.

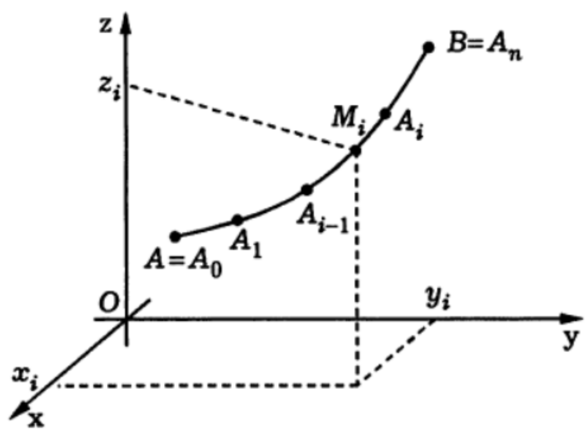

Рис. 2

Условия существования криволинейного интеграла первого рода

Если плоская кривая AB спрямляема, можно ввести натуральный параметр s этой кривой. В этом случае положение точки M на кривой будет определяться длиной дуги AM кривой от начальной точки A до точки M.

Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \end{cases} \quad 0 \leqslant s \leqslant s_{AB}$$

где s_{AB} - длина кривой AB. Тогда функцию $f(x,y)$, определенную на кривой AB, можно рассматривать как сложную функцию $f(x(s),y(s))$ натурального параметра s.

Выберем разбиение $T = \{A_0, \dots, A_n\}$ кривой AB и точки $M_i\,(x_i; y_i)$ на элементарных дугах $A_{i-1}A_i$ этого разбиения. Составим соответствующую интегральную сумму. Пусть s_i есть значение натурального параметра для точки $A_i, i = \overline{0,n}$, а $\tilde{s}_i$– значение натурального параметра для точки $M_i, i = \overline{1,n}$. Тогда длины Δs_i элементарных дуг $A_{i-1}A_i$ можно записать в виде $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}, i = \overline{1,n}$, а интегральную сумму представить следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right) \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(x\left(\widetilde{s}_i\right), y\left(\widetilde{s}_i\right)\right) \Delta s_i.$$

Правая часть равенства есть интегральная сумма, соответствующая определенному интегралу от функции $f(x(s),y(s))$ по отрезку $[0, s_{AB}]$. Переход к пределу в обеих интегральных суммах выполняется при одном условии $\lambda(T) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta s_i \to 0$. Поэтому

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{0}^{s_{AB}} f(x(s),y(s))ds \tag{1.6}$$

причем существование одного из интегралов в этом равенстве означает существование и другого.

Выявленная связь позволяет получить *условия существования криволинейного интеграла первого рода*. Если кривая AB спрямляема, а функция $f(x,y)$ непрерывна на этой кривой (часто говорят - негрерывна вдоль кривой AB), то сложная функция $f(x(s),y(s))$ непрерывна на отрезке $[0, s_{AB}]$, так как функции $x(s)$ и $y(s)$ параметрического представления кривой являются непрерывными на отрезке $[0, s_{AB}]$. Следовательно, интеграл в правой части (1.6) существует. Резюмируя, можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 1.1. *Если кривая AB спрямляема (в частности, является кусочно-гладкой), а функция $f(x,y)$ непрерывна вдоль этой кривой, то криволинейный интеграл первого рода от функции $f(x,y)$ вдоль кривой AB существует.* #

Вычисление криволинейного интеграла первого рода

Итак, криволинейный интеграл первого рода можно свести к определенному интегралу с помощью формулы (1.6). Однако эта формула с практической точки зрения не очень удобна, поскольку в качестве параметра кривой далеко не всегда (а точнее, редко) выбирают натуральный параметр.

Пусть кривая AB задана произвольными параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta] \tag{1.7}$$

где функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны вместе со своими производными $x'(t)$ и $y'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда кривая AB спрямляема и для нее определен натуральный параметр s. Натуральный параметр можно отсчитывать от любого конца кривой и в данном случае отсчет удобно вести от начальной точки кривой, соответствующей значению $t = \alpha$. Тогда возрастанию параметра t будет соответствовать возрастание параметра s, а для дифференциала длины дуги плоской кривой будет выполняться равенство

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt. \tag{1.8}$$

При этом значение $t = \alpha$ соответствует точке A и значению $s = 0$, а значение $t = \beta$ - точке B и значению $s = s_{AB}$. В определенном интеграле в равенстве (1.6) справа можно выполнить замену переменного, переходя от натурального параметра s к параметру t. В результате указанное равенство преобразуется к виду

$$\int\limits_{AB} f(x, y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt. \tag{1.9}$$

Таким образом, для вычисления криволинейного интеграла первого рода следует заменить в подынтегральной функции переменные x и y их выражениями через параметр t, а дифференциал ds - дифференциалом длины дуги, выразив его через параметр t. Оговоренное выше согласование параметра t и натурального параметра s означает, что в определенном интеграле в (1.9) справа нижний предел интегрирования меньше верхнего, т.е. $\alpha < \beta$.

Если плоскап кривая AB является графиком функции $y = y(x), x \in [a, b]$, то в качестве параметра кривой естественно выбрать абсциссу x точки кривой. При этом формула (1.9) приобретает вид

$$\int\limits_{AB} f(x, y)ds = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx. \tag{1.10}$$

Аналогично при задании кривой функцией в виде $x = x(y)$, $y \in [c, d]$, получаем

$$\int\limits_{AB} f(x, y)ds = \int\limits_c^d f(x(y), y)\sqrt{1 + (x'(y))^2}dy. \tag{1.11}$$

Пусть кривая AB задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi), \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$. Тогда, учитывая формулы $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$ связи декартовых и полярных координат, а также выражение для дифференциала длины дуги в полярных координатах

$$ds = \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}d\varphi$$

находим

$$\int\limits_{AB} f(x, y)ds = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}d\varphi. \tag{1.12}$$

Пример 1.1. Вычислим криволинейный интеграл первого рода

$$\int\limits_{AB} \frac{y}{x}ds,$$

где AB - дуга параболы $y = x^2/2$, заключенная между точками $A(1; 1/2)$ и $B(2; 2)$.

$\triangle$ В данном случае

$$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx = \sqrt{1 + x^2}dx$$

и в соответствии с (1.10)

$$\int\limits_{AB} \frac{y}{x} ds = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{4}\int\limits_1^2 \sqrt{1+x^2}d\left(1+x^2\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}\Big|_1^2 = \frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{6}. \quad \blacktriangle$$

Пример 1.2. Найдем криволинейный интеграл первого рода

$$\int\limits_{AB} ye^{-x} ds$$

вдоль кривой AB, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \ln\left(1+t^2\right), \\ y = 2\operatorname{arctg} t - t, \end{cases} \quad t \in [0,1].$$

$\triangle$ В соответствии с (1.8) имеем

$$ds = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt =$$

$$= \sqrt{\frac{4t^2}{\left(1+t^2\right)^2} + \frac{4}{\left(1+t^2\right)^2} + 1 - \frac{4}{1+t^2}}dt = dt$$

Кроме того, $e^{-x} = 1/\left(1+t^2\right)$. Следовательно, используя (1.9), получаем

$$\int\limits_{AB} ye^{-x} ds = \int\limits_0^1 (2\operatorname{arctg} t - t)\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \operatorname{arctg}^2 t\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\ln 2}{2}. \quad \blacktriangle$$

Пример 1.3. Вычислим криволинейный интеграл первого рода от функции $f(x,y) = x^{4/3} + y^{4/3}$ вдоль замкнутой кривой L, заданной уравнением

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

(астроиды).

$\triangle$ Дли вычисления интеграла необходимо кривую задать параметрическими уравнениями. Астроиду можно описать следующим образом:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Находим $x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t$ и $y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t$. Следовательно, $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 9a^2\cos^2 t\sin^2 t$. Отметим, что правая часть последнего равенства обращается в нуль в четырех точках, соответствующих значениям $t = 0, t = \pi/2, t = \pi$ и $t = 3\pi/2$, т.е. астроида является кусочно гладкой кривой.

Переходя от криволинейного интеграла к определенному, получаем

$$\int\limits_L \left(x^{4/3} + y^{4/3}\right) ds = \int\limits_0^{2\pi} a^{4/3}\left(\cos^4 t + \sin^4 t\right) \cdot 3a|\cos t\sin t|dt$$

Функция под знаком определенного интеграла справа является периодической с периодом $\pi/2$. Поэтому интеграл по отрезку $[0, 2\pi]$ можно заменить учетверенным интегралом по отрезку $[0, \pi/2]$. Таким образом,

$$\int\limits_L \left(x^{4/3} + y^{4/3}\right) ds = 12a^{7/3}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\cos^5 t\sin t + \sin^5 t\cos t\right) dt =$$

$$= 2a^{7/3}\left(-\cos^6 t + \sin^6 t\right)\Big|_0^{\pi/2} = 4a^{7/3}. \quad \blacktriangle$$

Пример 1.4. Найдем криволинейный интеграл первого рода от функции $f(x,y) = 1/\sqrt{x^2+y^2+5}$ вдоль отрезка прямой, соединнющего точки $A(0;0)$ и $B(1;2)$.

Уравнение этой прммой имеет вид $y = 2x$, и для вычисления криволинейного интеграла можно использовать формулу (1.10). В данном случае $\sqrt{1 + (y'(x))^2} = \sqrt{5}$. Используя в определенном интеграле замену переменного $u = x + 2$, получаем

$$\int\limits_{AB} \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+5}} = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{x^2+4x^2+5}} = \sqrt{5}\int\limits_2^3 \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} =$$

$$= \sqrt{5}\ln\left|u + \sqrt{1+u^2}\right|\Big|_2^3 = \sqrt{5}\ln\frac{3+\sqrt{10}}{2+\sqrt{5}}. \quad \blacktriangle$$

Пример 1.5. Пусть L - правый лепесток лемнискаты Бернулли, который в полярных координатах описывается уравнением

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi, \varphi \in [-\pi/4, \pi/4].$$

Вычислим вдоль L криволинейный интеграл от функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$\triangle$ Так как $r(\varphi) = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, то $r'(\varphi) = -a\dfrac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$ и

$$r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2 = a^2 \cos 2\varphi + a^2\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$$

Учитывая, что в данном случае $\sqrt{x^2 + y^2} = r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, и используя (1.12), находим

$$\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2} ds = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi}\frac{ad\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = \frac{\pi}{2}a^2. \quad \blacktriangle$$

Условия существования криволинейного интеграла в пространственном случае

Условия существования криволинейного интеграла переносятся и на пространственный случай. Если пространственная кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \\ z = z(t), \end{cases}$$

где функции $x(t), y(t)$ и $z(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$ вместе со своими производными, а функция $f(x, y, z)$ определена и непрерывна на кривой AB, то криволинейный интеграл от функции $f(x, y, z)$ вдоль кривой AB существует, причем

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z) ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \quad (1.13)$$

Пример 1.6. Вычислим криволинейный интеграл первого рода

$$\int\limits_{AB} xyzds$$

вдоль пространственной кривой AB, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2/2, \\ z = \sqrt{8t^3}/3 \end{cases} \qquad t \in [0,1].$$

$\triangle$ Предварительно находим

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt = \sqrt{1 + t^2 + 2t}dt = (1+t)dt$$

Далее в соответствии с формулой (1.13) получаем

$$\int\limits_{AB} xyzds = \frac{\sqrt{2}}{3}\int\limits_0^1 t^{9/2}(1+t)dt = \frac{16}{143}\sqrt{2}. \quad \blacktriangle$$

Замечание

Так как криволинейный интеграл первого рода, согласно формуле (1.6), фактически есть определенный интеграл, на него переносятся основные свойства определенного интеграла: линейность, аддитивность, оценка интеграла по модулю (модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля функции), теорема о среднем. Последняя позволяет ввести понятие среднего значения функции $f(x, y, z)$ вдоль кривой AB, под которым понимают отношение криволинейного интеграла от $f(x, y, z)$ вдоль AB к длине кривой AB. В то же время понятия верхнего и нижнего пределов интегрирования, присущие определенному интегралу, не имеют аналогов для криволинейного интеграла, а известное свойство определенного интеграла менять знак, когда верхний и нижний пределы меняются местами, не распространяется на криволинейный интеграл первого рода.

Вопросы для закрепления

1. Что такое криволинейный интеграл первого рода и как его можно интерпретировать с физической точки зрения?

2. Какие условия необходимы для существования криволинейного интеграла первого рода?

3. Как определяется интегральная сумма функции вдоль кривой, и как она связана с понятием криволинейного интеграла?

4. Какой физический смысл имеет выражение $\int\limits_{AB} \rho(x, y)\, ds$, где $\rho(x, y)$ —- линейная плотность?

5. Почему направление обхода кривой не влияет на значение криволинейного интеграла первого рода?

6. Как вычисляется криволинейный интеграл первого рода в пространственном случае?

7. Какую роль играет параметризация кривой в вычислении криволинейного интеграла?

8. Как связаны между собой интегралы в выражениях $\int\limits_{AB} f(x, y)\, ds$ и $\int\limits_{0}^{s_{AB}} f(x(s), y(s))\, ds$?

9. Как выполняется переход к определённому интегралу при расчёте криволинейного интеграла первого рода, если кривая задана уравнением в полярных координатах?

10. В каких случаях удобно выбирать абсциссу x или ординату y в качестве параметра кривой, и как это влияет на формулу криволинейного интеграла?