

АЛҒАШҚЫ ФУНКЦИЯ ЖӘНЕ АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛ

Алғашқы функция. Анықталмаған интегралдар және оның қасиеттері

Дифференциалға кері амал интегралдау амалы.

Анықтама 1. $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының (a,b) интервалындағы алғашқы функциясы деп аталады, егер кез келген $x \in (a,b)$ үшін $F'(x) = f(x)$ теңдігі орындалса.

Мысалы, $y = x^2, x \in R$ функциясының алғашқы функциясы

$$F(x) = \frac{x^3}{3}, \text{ себебі}$$

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} \right)' = x^2 = f(x).$$

Сонымен қатар, осы берілген функцияның алғашқы функциясы мына төмендегі функциялардың кез келгені

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C,$$

мұндағы C – тұрақты сан, себебі $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C \right)' = x^2 = f(x) \quad (x \in R).$

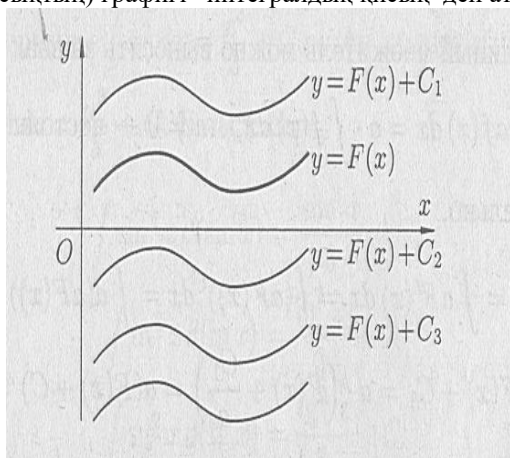
Теорема 1. Егер $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының (a,b) интервалындағы алғашқы функциясы болса, онда $f(x)$ функциясының барлық алғашқы функцияларының жиыны $F(x) + C$ формуласымен беріледі, мұндағы C – тұрақты сан.

Анықтама 2. $f(x)$ функциясының барлық алғашқы функцияларының $F(x) + C$ жиыны $f(x)$ функциясының анықталмаған интегралы деп аталады және былай белгіленеді: $\int f(x) dx$.

$f(x)$ функциясы интеграл астындағы функция деп аталады, ал $f(x) dx$ - интеграл астындағы өрнек, x - интегралдау айнымалысы, $\int$ - анықталмаған интеграл белгісі деп аталады.

Функцияның анықталмаған интегралын табу амалы осы функцияны интегралдау деп аталады.

Геометриялық тұрғыдан, анықталмаған интеграл $y = F(x) + C$ қисықтарының жиынтығы (әрбір C -ның сандық мәніне анықталған қисықтар жиынтығы сәйкес келеді) (сурет 22). Әрбір алғашқы функцияның (қисықтың) графигі интегралдық қисық деп аталады.



Сурет 22

10.1.1 Анықталмаған интегралдың қасиеттері

1. Анықталмаған интегралдың дифференциалы интеграл астындағы өрнекке тең, ал анықталмаған интегралдың туындысы интеграл астындағы функцияға тең:

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$$

2. Қандай да функцияның дифференциалынан алынған анықталмаған интеграл осы функция мен кез келген тұрақты санның көбейтіндісіне тең:

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

3. Тұрақты көбейткішті интеграл белгісінің алдына шығаруға болады:

$$\int a f(x)dx=a \int f(x)dx, \quad a \neq 0 \text{ - тұрақты сан.}$$

4. Үзіліссіз функциялардың алгебралық қосындылардан алынған анықталмаған интеграл жеке қосылғыштардан алынған интегралға тең:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

5. Егер $\int f(x)dx = F(x) + C$, онда $\int f(u)du = F(u) + C$, мұндағы $u = \varphi(x)$ - үзіліссіз туындысы бар кез келген функция.

Сонымен, анықталмаған интегралдың формуласы интегралдау айнымалысы тәуелсіз айнымалы болса да, үзіліссіз туындысы бар осы айнымалыға тәуелді функция болса да ақиқат (интегралдаудың инварианттылық формуласы).

Негізгі интегралдар кестесі

Дифференциалдық есептеулердің негізгі формулаларынан шығатын интегралдар кестесін қарастырамыз:

1. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad \left(\int du = u + C \right)$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$
3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$
4. $\int e^u du = e^u + C;$
5. $\int \sin u du = -\cos u + C \quad \left(\int \sin u du = \cos u + C \right);$
6. $\int \cos u du = \sin u + C \quad \left(\int \cos u du = -\sin u + C \right);$
7. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C;$
8. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C;$
9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C \quad \left(\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C \right);$
10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C \quad \left(\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C \right);$
11. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C;$
12. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$
13. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + C;$
14. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C;$
15. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C;$
16. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C;$
17. $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C;$
18. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C.$

Интегралдаудың негізгі әдістері

Қарапайым әдістерді қолданып интегралдау

Қарапайым әдістер деп ретінде интеграл астындағы өрнектерге (функцияларға) тепе-тең түрлендірулер жасау арқылы немесе анықталған интегралдың қасиеттерін қолдану арқылы кестелік интегралға келтіру әдістерін айтамыз.

Мысал 1. $\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C;$

$$\text{Мысал 2. } \int \frac{du}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}x)}{\sqrt{(2)^2 - (\sqrt{3}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}x}{2} + C;$$

$$\text{Мысал 3. } \int \operatorname{tg} u \, du = \int \frac{\sin u \, du}{\cos u} = - \int \frac{d(\cos u)}{\cos u} = -\ln|\cos u| + C;$$

Айнымалыны ауыстыру әдісін қолданып интегралдау

Айнымалыны ауыстыру әдісін қолданып интегралдау интегралға жаңа айнымалы енгізуге негізделген. Жаңа айнымалы енгізу негізінде берілген интеграл жаңа интегралға, яғни, кестелік немесе кестелік интегралға қуелтірілетін интегралға көшеді.

$\int f(x)dx$ интегралын есептеу қажет болсын. $x = \varphi(t)$ жаңа айнымалысын енгіземіз, мұндағы $\varphi(t)$ - үзіліссіз туындысы бар функция. Онда $dx = \varphi'(t)dt$ және анықталмаған интегралды интегралдаудың инварианттылық формуласының қасиеттері негізінде айнымалыны ауыстыру формуласын аламыз:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Бұл формула анықталмаған интегралда айнымалыны ауыстыру формуласы деп аталады. Интегралдың оң жағын есептеп шығарғаннан кейін интегралдың жаңа айнымалысы t -дан қайта x айнымалысына көшеміз.

$$\text{Мысал 4. } \int \ell^{\frac{x}{4}} dx \text{ тап.}$$

$$\text{Шешуі: } x = 4t \text{ деп белгілесек, онда } dx = 4dt. \text{ Сонымен, } \int \ell^{\frac{x}{4}} dx = 4 \int \ell^t dt = 4\ell^t + C.$$

$$\text{Мысал 5. } \int x\sqrt{x-3} \, dx \text{ тап.}$$

$$\text{Шешуі: } \sqrt{x-3} = t \text{ болсын, онда } x = t^2 + 3, \, dx = 2t \, dt. \text{ Сондықтан}$$

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x-3}dx &= \int (t^2 + 3)t \, 2t \, dt = 2 \int (t^4 + 3t^2) \, dt = 2 \int t^4 \, dt + 6 \int t^2 \, dt = \frac{2}{5}t^5 + 2t^3 + C = \\ &= \frac{2}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}} + 2(x-3)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

Бөліктеп интегралдау әдісі

$u = u(x)$ және $v = v(x)$ функциялары үзіліссіз туындылары бар функциялар болсын. Онда $d(uv) = u \, dv + v \, du$. Бұл теңдіктің екі жағын да интегралдасак,

$$\int d(uv) = \int u \, dv + \int v \, du \text{ или } \int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Бұл **бөліктеп интегралдау формуласы** деп аталады. Бұл формула берілген $\int u \, dv$ интегралынан гөрі қарапайым болатын $\int v \, du$ интегралына келтіреді.

Бөліктеп интегралдауды мынадай түрдегі интегралдарға қолданған қолайлы:

1. $\int P(x)\ell^{kx}dx, \int P(x)\sin kx dx, \int P(x)\cos kx$, түріндегі интегралдар, мұндағы $P(x)$ - көпмүшелік, k - тұрақты сан. $u = P(x)$ деп, ал dv ретінде қалған интеграл астындағы көбейткіштерді алған ыңғайлы.

2. $\int P(x)\arcsin x dx, \int P(x)\arccos x dx, \int P(x)\ln x dx, \int P(x)\arctg x dx, \int P(x)\operatorname{arcctg} x dx$ түріндегі интегралдар. $P(x)dx = dv$ деп, ал u ретінде қалған интеграл астындағы көбейткіштерді алған ыңғайлы.

3. $\int \ell^{ax} \sin bx \, dx, \int \ell^{ax} \cos bx \, dx$ түріндегі интегралдар, мұндағы a және b - тұрақты сандар. $u = \ell^{ax}$ деп, ал dv ретінде қалған интеграл астындағы көбейткіштерді алған ыңғайлы.

Мысал 6. $\int (2x+1)\ell^{3x} dx$ тап.

Шешуі: $\left[\begin{array}{l} u=2x+1 \Rightarrow du=2dx \\ dv=\ell^{3x} dx \Rightarrow v=\int \ell^{3x} dx \end{array} \right]$ болсын.

$$\int (2x+1)\ell^{3x} dx = (2x+1) \frac{1}{3} \ell^{3x} - \int \frac{1}{3} \ell^{3x} 2dx = \frac{1}{3} (2x+1) \ell^{3x} - \frac{2}{9} \ell^{3x} + C$$

Мысал 7. $\int \ln x dx$ тап. $\left[\begin{array}{l} u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x} dx \\ dv=dx \Rightarrow v=x \end{array} \right]$ болсын.

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

Өз бетімен шығаруға арналған есептер

10.4.1 Берілген интегралдарды есепте және нәтижелерін дифференциалдау арқылы тексер:

1. $\int (5x^7 - 3\sqrt[5]{x^3} + \frac{3}{x^4}) dx;$

2. $\int (3 \sin x + 2^x 3^{2x} - \frac{1}{9+x^2}) dx;$

3. $\int \sqrt[7]{(5x+3)^3} dx;$

4. $\int (\sin 7x - e^{3-2x} + \frac{1}{\cos^2 4x}) dx;$

5. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx;$

6. $\int (e^{2x} + e^{-2x}) dx;$ 7. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx;$ 8. $\int \frac{x^2-9}{x^2+9} dx;$ 9. $\int \frac{dx}{x^2-6x+7}$

Анықталмаған интегралдарды айнымалыларды ауыстыру әдісін қолданып есепте:

1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+3}};$ 2. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx;$ 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}};$ 4. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+9}};$ 5. $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x+1}}.$

Жауаптары:

1. $2(\sqrt{x+3} - \ln|1 + \sqrt{x+3}|) + C$
2. $2\sqrt{1 + \ln x} - \ln \ln x + 2 \ln |\sqrt{1 + \ln x} - 1| + C;$
3. $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4(1 + \sqrt[4]{x}) + C;$
4. $C - \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{9x};$
5. $2/3(e^x - 2)\sqrt{e^x + 1} + C.$

Анықталмаған интегралдарды бөліктеп интегралдау әдісімен шығар:

$$1. \int x \cos 3x dx; \quad 2. \int \ln^2 x dx; \quad 3. \int \arccos x dx; \quad 4. \int x^3 e^{-x^2} dx; \quad 5. \int \sin(\ln x) dx$$

(Жауаптары:

$$1. \frac{1}{3}x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C; \quad 2. x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C;$$

$$3. x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C; \quad 4. -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1) + C; \quad 5. x/2 (\sin \ln x - \cos \ln x) + C).$$

Анықталмаған интегралдарды есепте.

$$1. \int \cos 2x \sin 10x dx; \quad 2. \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx; \quad 3. \int \frac{x+3}{x+1} dx.$$

10.4.5 Берілген интегралдарды есепте және нәтижелерін дифференциалдау арқылы тексер.

$$1. \int (3x - \sqrt[7]{x^5} + 2 \sin x - 3) dx; \quad 2. \int (\sin 3x + x \sqrt{1 + x^2}) dx;$$

$$3. \int (x^7 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2^x) dx; \quad 4. \int (x^{-2} + 7x^6 - \frac{1}{2\sqrt{x}}) dx.$$

Анықталмаған интегралдарды айнымалыларды ауыстыру әдісін қолданып есепте:

$$1. \int x^3 \sqrt{4 - 3x^4} dx; \quad 2. \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx; \quad 3. \int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}; \quad 4. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{9-2x^3}}; \quad 5. \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx.$$

(Жауаптары

$$1. -1/8 \sqrt{(4-3x^4)^3} + C; \quad 2. 2/3 \sqrt{x^3} - x + 4\sqrt{x} - 4 \ln(1 + \sqrt{x}) + C;$$

$$3. -1/2 \ln \left| \frac{2 + \sqrt{4-x^2}}{x} \right| + C; \quad 4. -1/4 \sqrt[3]{(9-2x^3)^2} + C; \quad 5. C - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x).$$

Анықталмаған интегралдарды бөліктеп интегралдау әдісімен шығар:

$$6. \int \arcsin x dx; \quad 7. \int \frac{\ln x}{x^2} dx; \quad 8. \int x e^{-7x} dx; \quad 9. \int \ln(1+x^2) dx; \quad 10. \int x 2^{3x} dx.$$

Сұрақтар

1. Алғашқы функция және анықталмаған интегралдар ұғымдары.
2. Анықталмаған интегралдар қасиеттері.
3. Анықталмаған интегралдар кестесі.
4. Интегралдаудың негізгі әдістері. Қарапайым әдістерді қолданып интегралдау. Мүшелеп интегралдау және дифференциал астына енгізу арқылы интегралдау әдістері.
5. Айнымалыны ауыстыру әдісі.
6. Бөліктеп интегралдау.
7. Қарапайым бөлшектерді интегралдау.

РАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ИНТЕГРАЛДАУ

Қарапайым рационал бөлшектер және оларды интегралдау

Кез келген рационал функцияны рационал бөлшектер түрінде жазуға болады, яғни, екі көпмүшеліктің бөліндісі ретінде жазуға болады:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \dots + B_m}{A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n}$$

Бұл көпмүшеліктердің ортақ түбірлері жоқ деп алайық.

Егер алымындағы көпмүшеліктің дәрежесі бөліміндегі көпмүшеліктің дәрежесінен кіші болса, онда бұл дұрыс бөлшек деп аталады, кері жағдайда, бұрыс бөлшек деп аталады.

Егер бөлшек бұрыс бөлшек болса, онда оның алымындағы көпмүшелікті бөліміндегі көпмүшелікке бөлу арқылы (көпмүшелікті көпмүшелікке бөлу ережесі), оның бүтін бөлігін бөліп аламыз. Сонда берілген бөлшек оның бүтін бөлігі мен дұрыс бөлшектің қосындысына тең болады:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = M(x) + \frac{F(x)}{f(x)};$$

мұндағы $M(x)$ - көпмүшелік, ал $\frac{F(x)}{f(x)}$ - дұрыс бөлшек.

Мысал 1. Бұрыс бөлшек берілсін

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1}.$$

Онда оның алымындағы көпмүшелікті бөліміндегі көпмүшелікке бөлу арқылы (көпмүшелікті көпмүшелікке бөлу ережесі), мынадай қосындыны аламыз:

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 3 - \frac{4x + 6}{x^2 + 2x + 1},$$

Көпмүшелікті интегралдау қиындық туғызбайды, ал негізгі қиындық дұрыс бөлшекті интегралдауда.

Анықтама 1. Дұрыс рационал бөлшектер:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}$$

$$\text{II. } \frac{A}{(x-a)^k} \quad (k \geq 2 \text{ бүтін оң сан})$$

$$\text{III. } \frac{Ax+B}{x^2+px+q} \quad (\text{бөлімінің түбірлері комплекс сандар, яғни, } \frac{p^2}{4} - q < 0).$$

$$\text{IV. } \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} \quad (k \geq 2 \text{ бүтін оң сан; бөлімінің түбірлері комплекс сандар})$$

I, II, III и IV типтегі қарапайым бөлшектер деп аталады.

I, II и III типтегі қарапайым бөлшектерді интегралдау үлкен қиындық туғызбайды:

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C.$$

$$\text{II. } \int \frac{A}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} dx = \frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

III.

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2 + px + q} dx + \\ &+ \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{A}{2} \ln|x^2 + px + q| + \\ &+ \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \\ &= \frac{A}{2} \ln|x^2 + px + q| + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q - p^2}} + C \end{aligned}$$

IV түрдегі интегралды табу үшін де жоғарыдағыдай түрлендірулердің көмегімен мынадай түрдегі интегралға келеді: $I_n = \int \frac{dz}{(z^2 + 1)^n}$. Бөліктеп интегралдау әдісін қолданып, рекуррентті формуланы

аламыз: $I_n = \frac{z}{2(n-1)(z^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}$, осы әдісті қайта-қайта қолдана отырып, I_1 кестелік интегралға келеміз.

Соңғы жағдайға мысал келтірілсін.

Мысал 2.

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(x^2 + 1)^2} &= \int \frac{(x^2 + 1) - x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} \right) dx = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{xd(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \int \frac{xd}{x^2 + 1} = \left| u = x, v = \frac{1}{x^2 + 1} \right| = \operatorname{arctg} x + \frac{1 \cdot x}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \\ &= \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2 + 1)} + C. \end{aligned}$$

Рационал бөлшектерді қарапайым бөлшектерге жіктеу

Кез келген дұрыс рационал бөлшекті қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктеуге болатынын көрсетелік. Бізге дұрыс рационал бөлшек берілсін $\frac{F(x)}{f(x)}$. Бұл көпмүшеліктердегі коэффициенттер нақты сандар және берілген бөлшек қысқармайтын бөлшек деп алайық.

Теорема 1. $x = a$ саны бөлімінің k еселі түбірі болсын, яғни, $f(x) = (x - a)^k f_1(x)$, мұндағы $f_1(a) \neq 0$, онда берілген дұрыс бөлшек $\frac{F(x)}{f(x)}$ -ті басқа екі дұрыс бөлшектердің қосындысы ретінде былай жаза аламыз:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}; \quad (1)$$

мұндағы A - нөлге тең емес тұрақты сан, $F_1(x)$ - дәрежесі $(x-a)^{k-1} f_1(x)$ бөлімінің дәрежесінен кіші болатын көпмүшелік.

Ары қарай, бөлімінің түбірлері комплекс сандар болатын жағдайды қарастырамыз. Коэффициенттері нақты сандар болатын көпмүшеліктің комплекс түбірлері әрқашанда қос-қостан түйіндес.

Көпмүшелікті нақты коэффициентті көбейткіштерге жіктегенде комплекс түбірлердің әрбір жұбына $x^2 + px + q$ түріндегі өрнек сәйкес келеді. Егер де комплекс түбірлердің еселігі μ -ға тең болса, онда оған $(x^2 + px + q)^\mu$ түріндегі өрнек сәйкес келеді.

Теорема 2. Егер $f(x) = (x^2 + px + q)^\mu \varphi_1(x)$, мұндағы $\varphi_1(x)$ көпмүшелігі $x^2 + px + q$ көпмүшелігіне бөлінбейтін болса, онда $\frac{F(x)}{f(x)}$ дұрыс рационал бөлшегін басқа екі дұрыс бөлшектердің қосындысына жіктеуге болады:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\mu} + \frac{\Phi_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\mu-1} \varphi_1(x)}, \quad (3)$$

мұндағы $\Phi_1(x)$ - дәрежесі $(x^2 + px + q)^{\mu-1} \varphi_1(x)$ көпмүшелігінің дәрежесінен кіші көпмүшелік.

Теорема 1 мен 2-нің нәтижелерін $\frac{F(x)}{f(x)}$ дұрыс бөлшегіне қолданып, бөлімі $f(x)$ -тің барлық түбірлеріне сәйкес барлық қарапайым бөлшектерді бөліп аламыз. Сонымен, алдыңғы айтқандардан мынадай нәтижелер шығады.

Егер

$$f(x) = (x-a)^\alpha \dots (x-\epsilon)^\beta (x^2 + px + q)^\mu \dots (x^2 + lx + s)^\nu \quad \text{болса, онда} \quad \frac{F(x)}{f(x)} \quad \text{бөлшегін}$$

былай жаза аламыз:

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{f(x)} = & \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \dots + \frac{B}{(x-\epsilon)^\beta} + \frac{B_1}{(x-\epsilon)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta-1}}{x-\epsilon} + \\ & + \frac{M(x) + N}{(x^2 + px + q)^\mu} + \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + px + q)^{\mu-1}} + \dots + \frac{M_{\mu-1}x + N_{\mu-1}}{x^2 + px + q} + \dots + \frac{Px + Q}{(x^2 + lx + s)^\nu} + \\ & + \frac{P_1x + Q_1}{(x^2 + px + s)^{\nu-1}} + \dots + \frac{P_{\nu-1}x + Q_{\nu-1}}{x^2 + lx + s}. \end{aligned} \quad (5)$$

$A, A_1, \dots, B, B_1, \dots$ коэффициенттерін табу үшін: жоғарыдағы теңдік тепе-теңдік болғандықтан, теңдіктің оң жағын ортақ бөлімге келтіре отырып, оң жағы мен сол жағы өзара тең бөлшектер аламыз. Оның бөлімдері тең болғандықтан, алымдарын теңестіреміз. x -тің бірдей дәрежелі коэффициенттерін теңестіріп, белгісіз коэффициенттері $A, A_1, \dots, B, B_1, \dots$ бар тендеулер жүйесін аламыз. Бұл әдіс белгісіз коэффициенттер әдісі деп аталады.

Коэффициенттерді анықтауда мынадай ескертуді ескерген жөн: оң жағын ортақ бөлімге келтіргеннен кейінгі оң жағы мен сол жағының алымдары тепе-тең болғандықтан, олар x -тің кез келген мәнінде де тепе-тең болуы керек. x -ке дербес мәндер беру арқылы коэффициенттерді анықтайтын тендеулер аламыз.

Сонымен, кез келген рационал дұрыс бөлшекті қарапайым рационал бөлшектердің қосындысы түрінде жаза аламыз.

Мысал 2. $\frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)}$ бөлшегін қарапайым бөлшектерге жіктейік.

(5) негізінде: $\frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{A_1}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B}{x-2}$ аламыз. Ортақ бөлімге

келтіріп, алымдарын теңестірсек:

$$x^2 + 2 = A(x-2) + A_1(x+1)(x-2) + A_2(x+1)^2(x-2) + B(x+1)^2, \quad (6)$$

немесе

$$x^2 + 2 = (A_2 + B)x^3 + (A_1 + 3B)x^2 + (A - A_1 - 3A_2 + 3B)x + (-2A - 2A_1 - 2A_2 + B).$$

x^3, x^2, x^1, x^0 (бос мүше) коэффициенттерін теңестіре отырып, мынадай теңдеулер жүйесін аламыз:

$$0 = A_2 + B, 1 = A_1 + 3B, 0 = A - A_1 - 3A_2 + 3B, 2 = -2A - 2A_1 - 2A_2 + B.$$

Жүйені шешсек: $A = -1, A_1 = \frac{1}{3}, A_2 = -\frac{2}{9}, B = \frac{2}{9}.$

Мысал 3.

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} \Rightarrow x = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+1)$$

$$x=1: 1=2C \Rightarrow C=\frac{1}{2}$$

$$x=0: 0=-B+C \Rightarrow B=\frac{1}{2}$$

$$x^2 \text{ -тың коэффициенттерін теңестірсек: } 0 = A + C \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)} = -\frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{2} \int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \arctg x + \frac{1}{2} \ln|x-1| + c.$$

Жоғарыдағы айтылғандардан, біз кез келген рационал функцияның элементар функциялар арқылы интегралданатынын анықтадық.

Өз бетімен шығаруға арналған есептер

I. Мына интегралдарды есептеп шығар:

1. $\int \frac{dx}{(x-1)^4}$; (Жауабы: $-\frac{1}{3(x-1)^3} + C$)

2. $\int \frac{dx}{(2x+3)^3}$; (Жауабы: $-\frac{1}{4(2x+1)^2} + C$)

3. $\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 2x^3 + 3}$; (Жауабы: $\frac{1}{3\sqrt{2}} \arctg \frac{(x^2+1)}{\sqrt{2}} + C$)

4. $\int \frac{xdx}{2x^2 + 2x + 5}$; (Жауабы: $\frac{1}{4} \ln(2x^2 + 2x + 5) - \frac{1}{6} \arctg \frac{2x+1}{3} + C$)

5. $\int \frac{x-2}{x^2 - 4x + 7} dx$; (Жауабы: $\frac{1}{2} \ln(x^2 - 4x + 7) + C$)

II. Мына интегралдарды есептеп шығар:

1. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$; (Жауабы: $\ln|x-2| + \ln|x+5| + C$)
2. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$; (Жауабы: $\frac{1}{x+1} + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$)
3. $\int \frac{x-4}{x^2-5x+6} dx$; (Жауабы: $\ln\frac{(x-2)^2}{|x-3|} + C$)
4. $\int \frac{4dx}{x(x^2+4)}$; (Жауабы: $\ln\frac{\sqrt{x^2+4}}{|x|} + C$)
5. $\int \frac{(x-1)dx}{(x^2+1)^3}$; $(-\frac{1}{4}(\frac{x+1}{(x^2+1)^2} + \frac{3x}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2}\arctg x) + C)$

Сұрақтар

1. Рационал бөлшектерді қарапайым бөлшектерге жіктеу.
2. Қарапайым бөлшектерді интегралдау.
3. Бөлімінің түбірлері еселі рационал функцияларды интегралдау.
4. Квадрат үшмүшелігі бар өрнекті интегралдау.
5. Дәрежесі 1-ден үлкен болатын квадрат үшмүшелігі бар өрнекті интегралдау. Рекурренттік формула.

ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ЖӘНЕ ИРРАЦИОНАЛ ӨРНЕКТЕРДІ ИНТЕГРАЛДАУ

Тригонометриялық функцияларды интегралдау

Бұл бөлімде біз

$$\int R(\sin x, \cos x) dx ,$$

түріндегі интегралды табу әдістерін қарастырамыз, мұндағы $R(u, v)$ - u, v - ға қатысты рационал функция.

Мұндай түрдегі интегралдар айнымалыны универсал ауыстыру көмегімен

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t ,$$

рационал функцияларды интегралдауға әкелеміз. Шынында да,

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \left| \begin{array}{l} \text{бөлшектің алымы мен бөлімін } \cos^2 \frac{x}{2} \text{-қа бөлеміз} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} .$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} .$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t \text{ болғандықтан, } dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Нәтижесінде:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t) dt$$

мұндағы $R_1(t)$ - рационал функция.

Мысал 4.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \right| = \int \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Көрсетілген әдіс интеграл астындағы өрнек $\sin x$ және $\cos x$ айнымалыларын ұстайтын кез келген функция үшін қолданылмайды, себебі кей жағдайларда бұл белгілеу өте үлкен өрнектерге әкеп соғуы мүмкін. Онда біз мынадай белгілеуді қолданамыз.

1⁰. Егер интеграл астындағы функция косинус бойынша тақ болса, яғни, $R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$ болса, онда оны мынадай түрлендіруге әкелеміз:

$$R(\sin x, \cos x) = R_1(\sin x) \cdot \cos x,$$

одан кейін интегралда $\sin x = t$ жаңа айнымалысын енгізсек, ол $R_1(t)$ рационал функцияға тәуелді интегралға әкеледі:

$$\int R_1(\sin x) \cos x dx = |\sin x = t| = \int R_1(t) dt.$$

Мысал 5.

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) d \sin x = \\ &= |\sin x = t| = \int (1 - t^2) dx = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

2⁰. Егер интеграл астындағы функция синус бойынша тақ болса, яғни,

$$R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x) \text{ болса,}$$

онда оны мынадай түрлендіруге әкелеміз:

$$R(\sin x, \cos x) = R_1(\cos x) \sin x,$$

одан кейін интегралда $\cos x = t$ жаңа айнымалысын енгізсек, ол $R_1(t)$ рационал функцияға тәуелді интегралға әкеледі:

$$\int R_1(\cos x) \sin x dx = |\cos x = t| = -\int R_1(t) dt.$$

3⁰. Егер интеграл астындағы функция

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$$

теңдігін қанағаттандырса, онда оны мынадай түрлендіруге әкелеміз:

$$R(\sin x, \cos x) = R_1(\operatorname{tg} x),$$

одан кейін интегралда айнымалыны ауыстырсак:

$$\operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

Онда рационал функцияның интегралына әкеледі.

Мысал 6.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx &= \int \operatorname{tg}^3 x dx = \left| \operatorname{tg} x = t, dx = \frac{1}{1+t^2} dt \right| = \int \frac{t^3}{1+t^2} dt = \int \frac{t^2 t}{1+t^2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{1+t^2} dt^2 = |t^2 = z| = \frac{1}{2} \int \frac{(z+1)-1}{z+1} dz = \frac{1}{2} \left(\int dz - \int \frac{dz}{z+1} \right) = \frac{1}{2} (z - \ln|z+1|) + C = \end{aligned}$$

$$= |z = t^2 = \operatorname{tg}^2 x| = \frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x - \ln(\operatorname{tg}^2 x + 1)) + C.$$

4⁰. Мына түрдегі интегралдар:

$\int \sin mx \cos nxdx$, $\int \cos mx \cos nxdx$, $\int \sin mx \sin nxdx$, мұндағы m , n – тұрақты сандар, берілсе, онда интеграл астындағы функция мына формулалардың көмегімен синус пен косинустардың қосындысына келеді:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

Мысал 7.

$$\begin{aligned} \int \sin 3x \sin 5x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 8x) dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x dx - \frac{1}{2} \int \cos 8x dx = \\ &= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C \end{aligned}$$

5⁰. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ түріндегі интеграл, мұндағы m және n – кез келген бүтін көрсеткіштер.

1). Егер тым болмағанда m немесе n көрсеткіштерінің біреуі тақ бүтін оң сан болса, мысалы $n = 2k + 1$, онда $\sin x = t$ деп белгілейміз:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k d \sin x = \int t^m (1 - t^2)^k dt \quad \text{Пример 8.}$$

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^3 x dx &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) d \sin x = \int t^2 (1 - t^2) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C \\ &= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C. \end{aligned}$$

2) Егер m және n көрсеткіштерінің екеуі де жұп, оң, бүтін сан болса, онда мына формулаларды қолданған жөн:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Мысал 9.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \int \frac{(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)}{4} dx = \int \frac{(1 - \cos^2 2x)}{4} dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{1 + \cos 4x}{2}\right) dx = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x\right) dx = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x\right) + C. \end{aligned}$$

Кейбір иррационал өрнектерді интегралдау

Рационал емес функциялардың интегралдарын айнымалыны ауыстыру арқылы рационал функцияларға келтіруге болатын жағдайларды қарастырамыз.

1 жағдай. $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ есепте, мұндағы a, b, c, d – тұрақты сандар, m – натурал сан, $ad - bc \neq 0$, $R(x, y)$ – рационал функция.

$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$ белгілеуі интеграл астындағы өрнекті рационал функцияға әкелетіндігін көрсетеміз.

Шынында да, $x = \frac{b - dt^m}{ct^m - a}$, $dx = \frac{mt^{m-1}(ad - bc)}{(ct^m - a)^2} dt$ болғандықтан,

$\int R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx = \int R\left(\frac{b-dt^m}{ct^m-a}, t\right) \frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-a)^2} dt = \int R_1(t) dt$, мұндағы $R_1(t)$ - рационал функция.

Мысал 10. $\int \frac{1}{(x-1)^2} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$ интегралын есепте.

Мынадай белгілеу енгіземіз: $t^3 = \frac{x+1}{x-1}$, $x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx = \frac{-6t^2 dt}{(t^3-1)^2}$, $x-1 = \frac{2}{t^3-1}$, нәтижесінде:

$$\int t \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2} \cdot \frac{(t^3-1)^2}{4} dt = -\frac{3}{2} \int t^3 dt = -\frac{3}{8} t^4 + C = -\frac{3}{8} \cdot \frac{x+1}{x-1} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

Бұл түрдегі интегралдарға $\int R(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots) dx$ интегралы да жатады, $x = t^k$ белгілеуінің арқасында интеграл астындағы өрнек рационал функцияға келеді, мұндағы k – барлық x бөлшек көрсеткіштерінің ортақ бөлімі.

Мысал 11. $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx$ тап. Мынадай белгілеу енгізсек: $x = t^4$, $dx = 4t^3 dt$,

$$\int \frac{1+t}{t^4+t^2} 4t^3 dt = 4 \int \frac{t^2+t}{t^2+1} dt = 4 \int \left(1 + \frac{t-1}{t^2+1}\right) dt = 4 \left(\int dt + \int \frac{tdt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t^2+1}\right) = 4t + 2\ln(t^2+1) - 4\arctgt + C.$$

x айнымалысына қайта оралсақ, ізделінді интегралдың жауабына келеміз:

$$4\sqrt[4]{x} + 2\ln(1+\sqrt{x}) - 4\arctg\sqrt[4]{x} + C.$$

2 жағдай. Мына түрдегі интеграл астындағы иррационал функцияны тригонометриялық ауыстыруларды қолданып, рационал функцияның интегралына әкелеміз:

$$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) dx, \quad x = a \sin t;$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2+x^2}) dx, \quad x = atgt;$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2-a^2}) dx, \quad x = a \sec t.$$

Мысал 12.

$$\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6} dx = \left| x = 2 \sin t, dx = 2 \cos t dt \right| = \int \frac{\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}}{64 \sin^6 t} 2 \cos t dt = \frac{1}{4} \int \frac{\cos^4 t}{\sin^6 t} dt = \frac{1}{4} \int \frac{ctg^4 t}{\sin^2 t} dt =$$

$$= -\frac{1}{4} \int ctg^4 t dctgt = -\frac{1}{20} ctg^5 t + C = C - \frac{\sqrt{(4-x^2)^5}}{20x^5}.$$

3 жағдай. Интеграл $\int \frac{(Ax+B)dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ интегралын шешу үшін $x-\alpha = \frac{1}{t}$ белгілеуін енгіземіз.

Мысал 13. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}$ тап.

Мына белгілеулерді енгізсек $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, $\sqrt{x^2-2x-1} = \frac{\sqrt{1-2t-t^2}}{t}$, онда

$$-\int \frac{dt}{\sqrt{2-(t+1)^2}} = -\arcsin \frac{t+1}{\sqrt{2}} + C = -\arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

Өз бетімен шығаруға арналған есептер

I. Берілген анықталмаған интегралдарды есепте.

1. $\int \frac{dx}{3+5\cos x} \cdot \left(\text{Жауабы: } \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2-\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C \right).$
2. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x} \cdot \left(\text{Жауабы: } \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} + C \right).$
3. $\int \frac{dx}{8-4\sin x + 7\cos x} \cdot \left(\text{Жауабы: } \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3} \right| + C \right).$
4. $\int \cos^3 x \sin^{10} x dx \cdot \left(\text{Жауабы: } \frac{\sin^{11} x}{11} - \frac{\sin^{13} x}{13} + C \right).$
5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x + \cos^2 x} \cdot \left(\text{Жауабы: } \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 - \sqrt{5}}{2\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 + \sqrt{5}} \right| + C \right).$
6. $\int \sin^4 x dx \cdot \left(\text{Жауабы: } \frac{3x}{8} - \frac{\sin 6x}{12} + \frac{\sin 12x}{96} + C \right).$
7. $\int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx \cdot \left(\text{Жауабы: } \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} \right| + \frac{1}{2} \sin x \cos x + C \right).$
8. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} \cdot \left(\text{Жауабы: } \ln |\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2 \sin^2 x} + C \right).$

II. Анықталмаған интегралдарды тап.

1. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}} dx;$ б) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+2}}.$
 $\left(\text{Жауабы: а) } \frac{4}{3} \left(\sqrt[4]{x^3} - \ln(\sqrt[4]{x^3+1}) \right) + C; \quad \text{б) } \frac{(x^2-4)\sqrt{x^2+2}}{3} + C \right).$
2. а) $\int \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} dx;$ б) $\int \frac{4x dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1}.$
 $\left(\text{Жауабы: а) } \frac{2}{9} \sqrt[4]{x^9} - \frac{12}{13} \sqrt[12]{x^{13}} + C; \quad \text{б) } 3\sqrt[3]{x+1} - 4(x+1) + C \right).$
3. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}};$ б) $\int \frac{4x dx}{\sqrt[3]{(3x-8)^2} - 2\sqrt[3]{3x-8} + 4}.$
 $\left(\text{Жауабы: а) } \left(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} - \ln(1 + \sqrt[6]{x}) \right) + C; \quad \text{б) } \frac{1}{3} \sqrt[3]{(3x-8)^4} + \frac{8}{9} (3x-8) + C \right).$

III. Анықталмаған интегралдарды тап.

$$1. \quad \text{a) } \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx. \quad \text{б) } \int \frac{dx}{4-5 \sin x}.$$

$$\left(\text{Жауабы : а) } \frac{3}{5} \cos^{5/3} x - 3 \cos^{-1/3} x + C; \quad \text{б) } \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} \right| + C \right).$$

$$2. \quad \text{a) } \int \frac{\cos 2x}{\sqrt{3+4 \sin 2x}} dx. \quad \text{б) } \int \frac{\sin x dx}{\sin x + 1}.$$

$$\left(\text{Жауабы : а) } \frac{1}{4} \sqrt{3+4 \sin 2x} + C; \quad \text{б) } \frac{2}{1+\operatorname{tg} \frac{x}{2}} + x + C \right).$$

$$3. \quad \text{a) } \int \frac{\sin 3x}{\sqrt[3]{(3+2 \cos 3x)^2}} dx. \quad \text{б) } \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x} dx.$$

$$\left(\text{Жауабы : а) } \frac{1}{2} \sqrt{3+2 \cos 3x} + C; \quad \text{б) } \sqrt{2} \arctg \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) - x + C \right).$$

Сұрақтар

1. Қарапайым бөлшектерді интегралдау.
2. Рационал функцияларды интегралдау.
3. Тригонометриялық функцияларды интегралдау.
4. Кейбір алгебралық иррационал функцияларды интегралдау.

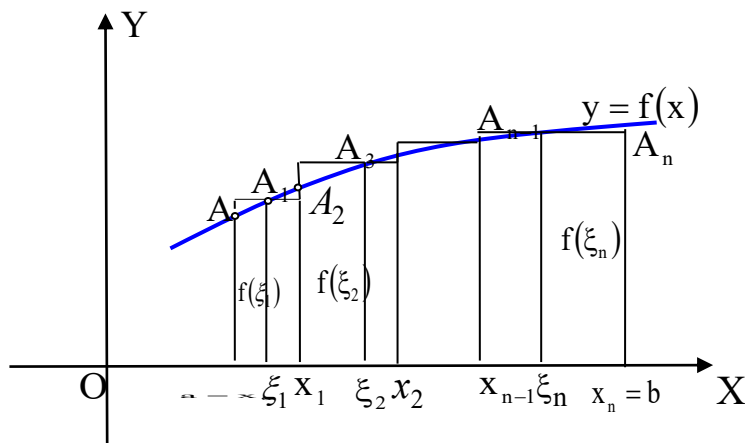
АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛ

Интегралдық қосынды. Анықталған интеграл.

Анықталған интегралдың анықтамасы

Анықталған интеграл ертеректе жазық фигуралардың ауданын табу негізінде туындады. Ал қазір анықталған интеграл барлық техникалық ғылымдардағы аз шаманың үлкен сандарының қосындысын табуға арналған есептерді шешуде қолданылады.

Анықтама 1. Қисық сызықты трапеция деп Ox жазықтығындағы Ox осімен, $x=a$ және $x=b$ түзулерімен шектелген облысты айтамыз, мұндағы $a < b$ және $y=f(x)$ функциясының графигі $[a,b]$ аралығында үзіліссіз (сурет 23).



Қарапайымдылық үшін, $f(x) \geq 0$ деп қарастыралық, яғни, қисық сызықты трапеция Ox осінен жоғары орналасқан. Бұл қисық сызықты трапецияның ауданын жуық шамамен оны мәндері $f(x)$ функциясының кейбір таңдап алынған нүктелеріндегі мәндерге тең болатын табаны мен биіктіктері өте аз тік төртбұрыштардың аудандарының қосындысымен алмастыру көмегімен табуға болады.

Анықтама 2. $[a, b]$ кесіндісін тең n бөлікке бөлу деп осы кесіндіден алынған $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ сандар жиынтығын айтамыз, мұндағы $x_0 = a$ және $x_n = b$.

Әрбір бөлік $[x_{i-1}, x_i]$ кесіндіден қандай да бір $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ нүктесін аламыз, мұндағы $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Бұндай бөліктеуді T әрпімен, ал әр бөліктің ұзындығын $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ арқылы белгілейміз. $[a, b]$ кесіндісінде қандай да бір $y = f(x)$ функциясы анықталған болсын.

Анықтама 3. $y = f(x)$ функциясының $[a, b]$ кесіндісін T бөліктеуден тұрғызылған интегралдық қосындысы деп ξ_i таңдалынған нүктесіндегі функцияның мәнінің бөліктің ұзындығына көбейтінділерінің қосындысын айтамыз.

Бұндай қосындыны былай белгілейміз:

$$\sum_f(T) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Егер $f(x) \geq 0$, онда $\sum_f(T)$ интегралдық қосындысы табаны Δx_i және биіктігі $f(\xi_i)$ болатын тік төртбұрыштардан тұратын баспалдақты фигураның ауданына тең (сурет 1 қара), яғни, $\sum_f(T)$ қосындысы жуық шамамен оған сәйкес қисық сызықты трапецияның ауданына тең.

Анықтама 4. $y = f(x)$ функциясының $[a, b]$ кесіндісіндегі анықталған интегралы деп осы функцияның $[a, b]$ кесіндісін бөліктеудегі интегралдық қосындыларының Δx_i -дің максимал мәні нөлге ұмтылғандағы шегін айтамыз, яғни,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_f(T).$$

Егер $[a, b]$ аралығында $f(x) \geq 0$ болса, онда бұл интеграл сәйкес қисық сызықты трапецияның тура ауданын өрнектейді.

Теорема 1. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ аралығында үзіліссіз болса немесе осы кесіндіде бірінші түрдегі үзіліс нүктелерінің ақырлы сандары бар болса, онда бұл функция $[a, b]$ кесіндісінде

интегралданады, яғни, $\int_a^b f(x) dx$ табылады.

Бұл теореманың мағынасы теореманың шарттары орындалғанда, қалай бөліктеуге байланыссыз, барлық кесінділердің Δx_i ұзындықтары нөлге ұмтылғанда, $\sum_f(T)$ интегралдық қосындысы тек бір

ғана $\int_a^b f(x) dx$ санына ұмтылады.

13.1.2 Анықталған интегралдың қасиеттері

Ары қарай, біз тек интегралданатын функцияларды ғана қарастырамыз.

$$1) \int_a^b C dx = C(b - a), \quad C - \text{тұрақты.}$$

2) Егер $[a, b]$ кесіндісінде $f(x) \leq g(x)$ болса, онда $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

3) Егер $[a, b]$ кесіндісінде $f(x)$ функциясы төменнен және жоғарыдан сәйкесінше m және M сандарымен шектелген болса, яғни, егер $[a, b]$ кесіндісінде $m \leq f(x) \leq M$ теңсіздігі орындалса, онда $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ орынды.

Бұл тұжырымның дәлелдеуі бірінші және екінші қасиеттерден шығады. Бұл қасиеттер – анықталған интегралдың жоғарғы және төменгі жағынан бағалануы деп аталады. *Мысал 1.* $\int_0^{10} (5 + \sin x^2)dx$ интегралын бағалайық.

$-1 \leq \sin x^2 \leq 1$ болғандықтан, $4 \leq 5 + \sin x^2 \leq 6$ болады. Бұдан,

$$40 \leq \int_0^{10} (5 + \sin x^2)dx \leq 60.$$

4) **Орта мән туралы теорема.**

$y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз болсын, онда бұл кесіндіден $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ теңдігі орындалатындай c нүктесі табылады.

Бұл $f(c)$ мәні функцияның $[a, b]$ аралығындағы орта мәні деп аталады.

$$5) \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Бұл қасиет *анықталған интегралдың модульын бағалау* деп аталады.

6) Егер $a < c < b$ теңсіздігі орындалса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

7) Егер $a < b$ болса, онда $\int_b^a f(x)dx$ интегралы деп $-\int_a^b f(x)dx$ санын айтамыз.

8) Егер $a=b$ болса, онда $\int_a^a f(x)dx = 0$.

6-қасиет a, b, c сандары қалай орналасса да ақиқат екендігін дәлелдеуге болады (егер интегралдың табылу шарты орындалса), яғни, $a < c < b$ орындалуы міндетті емес.

Интегралдың интегралдың жоғарғы шегі бойынша туындысы. Ньютон – Лейбниц формуласы

Жоғарыда айтылғандардан басқа, анықталған интегралдардың басқа да бірнеше негізгі қасиеттері бар, біз оларды теоремалар түрінде берелік.

$f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде интегралданатын болсын және $a \leq x \leq b$. $x \in [a, b]$ үшін жаңа $y = \Phi(x)$ функциясын былай анықтайық:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Бұл жерде, $\Phi(x)$ жоғарғы шегі x айнымалысы болатын $y = f(t)$ функциясының интегралы арқылы өрнектеледі. Анықталған интегралда функцияның айнымалысын кез келген әріппен белгілеуге

болатынын байқаймыз. Анықталған интегралдың анықтамасынан, оның шамасы бұдан өзгермейтіндігі шығады.

Теорема 2. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ аралығында үзіліссіз болса, онда $y = F(x)$ функциясы $y = f(x)$ функциясының (a, b) аралығындағы алғашқы функциясы деп аталады, яғни, бұл аралықта $F'(x) = f(x)$.

Келесі теорема интегралдық есептеудегі негізгі теорема болып есептеледі, өйткені ол анықталмаған интегралды шешудің көмегімен анықталған интегралды шешу әдісі.

Теорема 3 (Ньютон - Лейбниц).

$y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ аралығында үзіліссіз болсын және $y = F(x)$ функциясы осы аралықтағы оның алғашқы функциясы, онда

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Көбінде, $F(b) - F(a)$ айырмасы қысқа түрде былай жазылады:

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Мысал 2.

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0}{3} = \frac{8}{3}.$$

Мысал 3. $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx$ есепте.

$$\blacktriangleright \int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx = \int_0^8 \sqrt{2x} dx + \int_0^8 \sqrt[3]{x} dx = \frac{1}{2} \frac{(2x)^{3/2}}{3/2} \Big|_0^8 + \frac{x^{4/3}}{4/3} \Big|_0^8 = \frac{1}{3} (16)^{3/2} + \frac{3}{4} (8)^{4/3} = 33 \frac{1}{3}. \blacktriangleleft$$

Мысал 4. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi d\varphi$ тап.

$$\blacktriangleright \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi d\varphi = - \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \varphi) d(\cos \varphi) = - \cos \varphi \Big|_0^{\pi/2} + \frac{\cos^3 \varphi}{3} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}. \blacktriangleleft$$

Анықталған интегралды интегралдау әдістері

Анықталған интегралда айнымалыны ауыстыру

Теорема 4. $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ аралығында үзіліссіз, ал $x = \varphi(t)$ функциясы $[\alpha, \beta]$ аралығында бірсарынды және үзіліссіз дифференциалданатын болсын, мұндағы $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, онда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Мысал 5. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ интегралын есептелік, ол үшін $x = \sin t$ белгілеуін енгіземіз:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{x=\sin t, dx=\cos t dt; (x=0) \Rightarrow (\sin t=0) \Rightarrow (t=0); (x=1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sin t = 1) \Rightarrow \left(t = \frac{\pi}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt =$$

$$= \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Бұл интеграл центрі координат басында, бірінші квадрантта жататын радиусы бірге тең дөңгелектің ауданының төрттен бір бөлігіне тең.

Мысал 6. $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}$ интегралын есепте.

► Мынадай белгілеу енгізелік $\sqrt{1+x} = t$. Онда

$x = t^2 - 1$, $dx = 2t dt$. Егер $x = 3$ болса, онда $t = 2 = \alpha$, ал егер $x = 8$ болса, онда $t = 3 = \alpha$.

Бұдан,

$$\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}} = \int_2^3 \frac{(t^2 - 1) 2t dt}{t} = 2 \int_2^3 (t^2 - 1) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_2^3 = 2(9 - 3) - 2\left(\frac{8}{3} - 2\right) = \frac{32}{3}. \blacktriangleleft$$

Мысал 7. Есепте: $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 \cos x + 3}$.

► $tg(x/2) = u$ белгілеуін енгіземіз, онда $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx = \frac{2du}{1+u^2}$,

$\alpha = tg 0 = 0$, $\beta = tg(\pi/4) = 1$.

Бұдан,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 \cos x + 3} = \int_0^1 \frac{dx}{2 \cos x + 3} = \int_0^1 \frac{2du/(1+u^2)}{2(1-u^2)/(1+u^2) + 3} = \int_0^1 \frac{2du}{u^2 + 5} = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{5}} \Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}} \approx$$

$$\approx 0,38. \blacktriangleleft$$

Анықталған интегралда бөліктеп интегралдау әдісі

Теорема 5. $y = u(x)$ және $y = v(x)$ функциялары $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз дифференциалданатын болсын, онда мына теңдік орынды:

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx.$$

Бұл теңдікті қысқаша түрде былай жазамыз:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Мысал 8.

$$\int_1^e x \ln x dx = \int_1^e \ln x d \frac{x^2}{2} = \left| u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx, v = \frac{x^2}{2} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} \ln e - 0 - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

Мысал 9. $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$ есепте.

► $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x, du = dx, \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{matrix} \right| = x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - 0 + \cos x \Big|_0^{\pi/2} =$

$$= \frac{\pi}{2} - 1. \blacktriangleleft$$

Мысал 10. $\int_1^e x \ln^2 x dx$ тап.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int_1^e x \ln^2 x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x, \quad du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx, \\ dv = x dx, \quad v = \frac{1}{2} x^2 \end{array} \right| = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx, \\ dv = x dx, \quad v = \frac{1}{2} x^2 \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \left(\frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{2} dx \right) = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^e = \frac{1}{4} (e^2 - 1). \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Өз бетімен шығаруға арналған есептер

I. Анықталған интегралдарды есепте.

- $\int_1^2 \left(2x^2 + \frac{2}{x^4} \right) dx.$ (Жауабы : $\frac{21}{4}$.)
- $\int_1^4 \sqrt{x} dx.$ (Жауабы : $\frac{14}{3}$.)
- $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x \sqrt{1 + \ln x}}.$ (Жауабы : 2.)
- $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$ (Жауабы : $\arctg 3 - \arctg 2 = \arctg \frac{1}{2} \approx 8^\circ \frac{\pi}{180^\circ} \approx 0,14$.)
- $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx.$ (Жауабы : $\frac{4}{3}$.)
- $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}.$ (Жауабы : $2 - \ln 2 \approx 1,31$.)
- $\int_1^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{1+x^2} dx.$ (Жауабы : $\frac{848}{105}$.)
- $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx.$ (Жауабы : π .)
- $\int_1^3 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 5x + 1}}.$ (Жауабы : $\ln \frac{7+2\sqrt{7}}{9}$.)
- $\int_0^5 \frac{dx}{2x + \sqrt{3x+1}}.$ (Жауабы : $\frac{1}{5} \ln 112$.)

II. Анықталған интегралды есепте.

- а) $\int_1^4 \left(2x + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx;$ б) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx.$ (Жауабы : а) 2; б) $7 + 2 \ln 2$.)
- а) $\int_4^9 \left(\frac{y-1}{\sqrt{y}+1} \right) dy;$ б) $\int_0^4 \frac{x dx}{1 + \sqrt{x}}.$ (Жауабы : а) $23/2$; б) $16/3 - 2 \ln 3$.)
- а) $\int_1^4 \left(\frac{x dx}{(1+x^2)^3} \right) dx;$ б) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx.$ (Жауабы : а) $3/16$; б) $3 + 4 \ln 2$.)

Сұрақтар

1. Ньютон-Лейбниц формуласы.
2. Анықталған интегралда бөліктеп интегралдау.
3. Анықталған интегралда айнымалыны ауыстыру.