ЛЕКЦИЯ 3

а) Поступательное движение
б) Вращательное движение
в) Поступательно вращательное движение

а) Поступательное движение

$$\sigma'_{ik} \sim \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_j}$$

Если скорость постоянная $\upsilon = const$, **то силы трения равны нулю.**

б) Вращательное движение

$$\vec{\upsilon} = \left[\vec{w}\cdot\vec{r}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ w_i & w_j & w_k \\ x_i & x_j & x_k \end{vmatrix}$$

Запишем проекции скорости

На ось ***x:*** $\upsilon_i = w_j x_k - w_k x_j$ **На ось** ***z:*** $\upsilon_k = w_i x_j - w_j x_i$

Определим: $\dfrac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i} = -w_j$; $\dfrac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} = w_j$ **Если** $w = const$ **, то** $w_j = w_i = w_k = w$

При ***w=const*** **тензор вязких напряжений** $\sigma'_{ik} = 0$

Для этого σ'_{ik} **должен зависеть от градиента скорости так, чтобы**

при $w = const$, $\sigma'_{ik} = 0$ **Например:** $\sigma'_{ik} \sim \dfrac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \dfrac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i} = w_j - w_j = 0$

в) Поступательно вращательное движение

Найдем зависимость σ'_{ik} от градиента скорости:

При постоянной скорости σ'_{ik} должно быть равно нулю.

Поступательное движение: $\sigma'_{ik} \sim \dfrac{\partial \upsilon_j}{\partial x_j}$; **Вращательное движение:** $\sigma'_{ik} \sim \dfrac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \dfrac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i}$

$$\boxed{\sigma'_{ik} = a\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i}\right) + b\delta_{ik}\frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_j}}$$

$\Rightarrow$ **общий вид тензора вязких напряжений**

a, b **–коэффициенты вязкости (Ландау), которые не зависят от $\vec{\upsilon}$ и $grad\,\vec{\upsilon}$.**

a **и** ***b*** **должны зависеть от свойств среды, свойств жидкости, от ее термодинамических характеристик (p, T).**

Запишем σ'_{ik} в проекциях:

$$\sigma'_{xx}=a\left(\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}\right)+b\left(\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}+\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}\right)=2a\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}+b\left(\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}+\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}\right)$$

$$\sigma'_{yy}=a\left(\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}+\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}\right)+b\left(\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}+\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}\right)$$

$$\sigma'_{zz}=a\left(\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}+\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}\right)+b\left(\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}+\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}\right)$$

$$\sigma'_{xx}+\sigma'_{yy}+\sigma'_{zz}=2a\left(\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}+\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}\right)+3b\left(\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}+\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}\right)$$

$$\sigma'_{xx}+\sigma'_{yy}+\sigma'_{zz}=2a\,div\vec{v}+3b\,div\vec{v}=(2a+3b)div\vec{v}$$

Используя соотношения: $\sigma_{ik}=\sigma'_{ik}-p\delta_{ik}$ $\Rightarrow$ $\sigma'_{ik}=\sigma_{ik}+p\delta_{ik}$

Запишем σ'_{ik} в проекциях:

$$\sigma'_{xx}=\sigma_{xx}+p;\quad \sigma'_{yy}=\sigma_{yy}+p;\quad \sigma'_{zz}=\sigma_{zz}+p$$

$$\sigma'_{xx}+\sigma'_{yy}+\sigma'_{zz}=\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}+3p$$

$$(2a+3b)div\vec{\upsilon}=\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}+3p$$

Сжимаемая жидкость: $\rho \neq const\,;\quad div\vec{\upsilon}\neq 0$

$$p=-\frac{1}{3}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right)+\frac{1}{3}(2a+3b)div\vec{\upsilon}$$

Несжимаемая жидкость: $\rho = const\,;\quad div\vec{\upsilon}=0$

$$\boxed{p=-\frac{1}{3}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})}$$

Чтобы определение давления было одинаковым для сжимаемых и несжимаемых жидкостей $\Rightarrow p_{сж}=p_{несж}\Rightarrow 2a+3b=0$

Положим: $a=\mu \quad\Rightarrow\quad b=-\frac{2}{3}a=-\frac{2}{3}\mu$

$$\sigma'_{ik}=a\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_i}\right)+b\delta_{ik}\frac{\partial\upsilon_j}{\partial x_j}\Rightarrow\sigma'_{ik}=\mu\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\mu\delta_{ik}\frac{\partial\upsilon_j}{\partial x_j}$$

$$\sigma'_{ik} = \mu\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_j}\right)$$

$$P_{ik} = \rho\upsilon_i\upsilon_k - \sigma_{ik};\quad \sigma_{ik} = \sigma'_{ik} - p\delta_{ik} \Rightarrow \quad P_{ik} = \rho\upsilon_i\upsilon_k - \sigma'_{ik} + p\delta_{ik}$$

$$P_{ik} = \rho\upsilon_i\upsilon_k - \mu\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_j}\right) + p\delta_{ik}$$

Закон сохранения субстанции: $$\frac{\partial \rho_N}{\partial t} + div P_N = q_N$$

$$\rho\vec{\upsilon} = \rho_N = \rho\upsilon_i;\quad P_N = P_{ik};\quad q_N = F_{\rho i}$$

Тогда закон сохранения субстанции примет вид: $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\upsilon_i) + \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} = F_{\rho i}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\upsilon_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\rho\upsilon_k\upsilon_i + p\delta_{ik} - \mu\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_j}\right)\right\} = F_{\rho i}$$

$$\rho\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t}+\upsilon_i\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\upsilon_k\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}+\upsilon_i\frac{\partial(\rho\upsilon_k)}{\partial x_k}+\frac{\partial p}{\partial x_k}-\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\mu\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial\upsilon_j}{\partial x_j}\right)\right\}=F_{\rho i}$$

Уравнение неразрывности: $\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\rho\vec{\upsilon}=0$

$$\upsilon_i\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho\upsilon_k)}{\partial x_k}\right)=0$$

$$\rho\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t}+\rho\upsilon_k\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}+\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\mu\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial\upsilon_j}{\partial x_j}\right)\right\}=F_{\rho i} \qquad \textbf{(7)}$$

Уравнение движения

Рассмотрим течение несжимаемой жидкости с постоянными свойствами: $\mu = const, \quad \rho = const$

$div\vec{\upsilon} = 0$ уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_k} = div\,\vec{\upsilon} = 0 = \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}$$

Тогда:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\mu\left(\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i}\right) = \mu\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_k}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\mu\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k}\right) = \mu\frac{\partial^2 \upsilon_i}{\partial {x_k}^2} = \mu\left(\frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \upsilon_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial z^2}\right) = \mu\Delta\upsilon_i$$

$$\rho\upsilon_k\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} = \rho(\vec{\upsilon}\nabla)\vec{\upsilon}$$

$$\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_j} = \frac{2}{3}\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}\right) = \frac{2}{3}div\,\vec{\upsilon} = 0$$

$$(7) \Rightarrow \boxed{\rho\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+\rho(\vec{\upsilon}\nabla)\vec{\upsilon}=-\nabla p+\mu\Delta\vec{\upsilon}+\vec{F}}$$

$\to$ ***u***

$\to$ ***υ***

$\to$ ***w***

Закон сохранения импульса в векторной форме для несжимаемой жидкости с постоянными свойствами

$$+$$

$$div\vec{\upsilon}=0$$

Уравнение неразрывности
для несжимаемой жидкости с постоянными свойствами

Для двумерного течения:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho u\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+F_{\rho x}$$

***i*=1,2; *k*=1,2**

$$\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\rho\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial x}+\rho\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\upsilon}{\partial y^2}\right)+F_{\rho y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon}{\partial y}=0$$

3 уравнения; 5 неизвестных ***u, υ, p, ρ, μ*** $+$

$$\mu=\mu(T)$$

$$p=p(\rho,T)$$