№9-дәріс. Кейбір функцияларды интегралдау

Квадрат үшмүшелігі бар функцияларды интегралдау. Мына төмендегі интегралдарды табу әдісін қарастырайық $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$ және $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.

$1)$ ax^2+bx+c квадрат үшмүшелігіндегі a коэффициентін жақша алдына шығарып, одан толық квадратты бөліп аламыз;

$2)$ интегралға $x+\frac{b}{2a}=t$, $dx=dt$ алмастыруын енгіземіз;

3) Оны екі интегралдың қосындысы етіп жазамыз. Сонда екі интегралымыз да кестелік интегралға келеді.

1- мысал. $\int \frac{x+3}{x^2-2x-8}dx=\int \frac{x+3}{x^2-2x+1-8-1}dx=\int \frac{x+3}{(x-1)^2-9}dx=\int \frac{t+1+3}{t^2-9}dt=$

$$=\int \frac{tdt}{t^2-9}+4\int \frac{dt}{t^2-9}=\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2-9)}{t^2-9}- \quad 4\int \frac{dt}{3^2-t^2}=\left|t^2-9=u\right|=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}-4\frac{1}{2\cdot 3}ln\left|\frac{3+t}{3-t}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}ln\,|\,u\,|-\frac{2}{3}ln\left|\frac{3+t}{3-t}\right|+C=$$

$$\left|\begin{matrix} u=t^2-9=(x-1)^2-9=x^2-2x-8 \\ t=x-1 \end{matrix}\right|=\frac{1}{2}ln\left|x^2-2x-8\right|-\frac{2}{3}ln\left|\frac{x+2}{4-x}\right|+C\,.$$

Рационал функцияларды интегралдау. Рационал бөлшекті интегралдау деп, $\int R(x)dx$ интегралын табуды айтады. Мұндағы $R(x)-$ дұрыс рационал бөлшек, яғни $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n}{B_0+B_1x+B_2x^2+\ldots+B_mx^m}$. Егер $n<m$ болса, $R(x)-$ дұрыс бөлшек деп, ал $n\geq m$ болса бұрыс бөлшек деп аталады. Бұрыс бөлшекті интегралдау үшін алдымен алымын бөліміне бөлу арқылы оны көпмүшелік пен дұрыс бөлшектің қосындысына жіктейміз. Мысалы, $\frac{x^4-4x^3+2x^2-1}{x^2-x+1}=x^2-3x-2+\frac{x+1}{x^2-x+1}$ Одан әрі қарай тек дұрыс рационал бөлшектерді интегралдауды қарастырамыз.

Теорема. Әрбір дұрыс рационал бөлшекті мына қарапайым бөлшектердің қосындысы түрінде жазуға болады:

1. $\frac{A}{x-a}$; 2. $\frac{A}{(x-a)^k}$ $(k=2,3,4,...)$; 3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; 4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$; $(k=2,3,4,...)$,

мұндағы A, B - нақты коэффициенттер; x^2+px+q үшмүшелігінің нақты түбірлері жоқ (яғни $D=\frac{P^2}{4}-q<0$). ***Қарапайым бөлшектерді интегралдауды қарастырайық.***

$1.$ $\int \frac{Adx}{x-a}=A\,ln\left|x-a\right|+C\cdot$

$2.$ $k>1$ мәнінде $\int \frac{Adx}{(x-a)^k}=A\int (x-a)^{-k}dx=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C\,.$

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ интегралдау әдісі жоғарыда қарастырылған.

4 . $\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx$, мұндағы $k>1$ және бөліміндегі квадрат үшмүшеліктің

дискриминанты $D=p^2-4q<0$. Квадрат үшмүшеліктен толық квадрат бөліп алып $x+\frac{p}{2}=t$, $dx=dt$, алмастыруын жасаймыз. Сонда $\int \frac{A_1t+B_1}{(t^2+m^2)^k}dt$ интегралын аламыз және оны екі интегралдардың қосындысы түрінде жазамыз. Бірінші интерал t-ны дифференциал астына енгізу арқылы интегралданады:

$$\int \frac{t}{(t^2+m^2)^k}dt=\frac{1}{2}\int (t^2+m^2)^{-k}d(t^2+m^2)=\frac{1}{2}\frac{(t^2+m^2)^{-k+1}}{-k+1}+C=\frac{(x^2+px+q)^{-k+1}}{-k+1}+C.$$

Ал екінші интегралды $I_k=\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k}$ деп белгілеп, төменгідей есептейміз:

$$I_k=\frac{1}{m^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}+\frac{t}{2(k-1)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}\right)$$

Бұл формуланы ***реккуренттік формула*** деп атайды. Реккуренттік формула арқылы I_2 − ні $I_1=\int \frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{m}arctg\frac{t}{m}+C$ арқылы, ал I_3 − ті I_2 − арқылы таба отырып, ең соңында I_k − ны I_{k-1} арқылы табамыз.

2- мысал. $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$ табу керек. $I_2=\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$ осыдан $k=2, m=1$.

$I_1=\int \frac{dx}{x^2+1}=arctgx+C$, $I_2=\frac{1}{2}arctgx+\frac{x}{2\left(x^2-1\right)}+C$. Сонымен $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ бөлшегінде $n<m$ болсын. Әрбір $Q(x)$ көпмүшелігін бірінші және екінші дәрежелі көпмүшеліктердің көбейтіндісіне жіктеп жазуға болады:

$Q(x)=(x-a)^k\cdot(x-b)^l\cdot\ldots\cdot(x^2+px+q)^t\cdot(x^2+ux+v)^s$,

мұндағы $k, l, t, s, \ldots$ − бүтін сандар. Сонда дұрыс бөлшек элементар бөлшектерге төменгідей жіктелінеді :

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\cdots+\frac{B_l}{(x-b)^l}\cdots\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\cdots+\frac{M_tx+N_t}{\left(x^2+px+q\right)^t}+\cdots \quad (13.1)$$

мұндағы $A_1, A_2, \ldots A_k, B_1, B_2, \ldots B_l, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots M_t, N_t, \cdots$ − нақты сандар. Осы сандарды табу үшін (13.1) теңдігінің оң жағын ортақ бөлімге келтіреміз. Содан соң теңдіктегі екі бөлшектің бөлімін алып тастасақ, екі жағында да көпмүшелік шығады. Осы теңдіктен бірдей дәрежелі x − тің алдындағы коэффиценттерді теңестіре отырып, алгебралық теңдеулер жүйесін құрамыз. Алынған теңдеулер жүйесінен $A_1, A_2, \ldots A_k, B_1, B_2, \ldots B_l, M_1, N_1, M_2, N_2 \ldots$ коэффиценттерінің мәндерін тауып, оларды (13.1) теңдігіне қоямыз. Осылай рационал бөлшектің жіктеуін табамыз. Осы әдісті ***анықталмаған коэффициенттер әдісі*** дейді.

3-мысал. $\int\frac{x^4-2x^3+3x+4}{x^3+1}dx$ интегралын есептеу керек. Интеграл астындағы функция бұрыс рационал бөлшек, сондықтан алымын бөліміне бөліп дұрыс бөлшекке айналдырамыз: $\frac{x^4-2x^3+3x+4}{x^3+1}=x-2+\frac{2x+6}{x^3+1}=x-2+2\frac{x+3}{x^3+1}$ Соңғы қосылғышты қарапайым бөлшектерге жіктейміз: $\frac{x+3}{x^3+1}=\frac{x+3}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$

Бұдан, $x+3=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)$ $x^2:\ 0=A+B$; $x:\ \ 1=-A+B+C$; x^0: $3=A+C\ \Rightarrow A=\frac{2}{3}$, $B=-\frac{2}{3}$, $C=\frac{7}{3}$. Демек, $\frac{x+3}{x^3+1}=\frac{2}{3(x+1)}-\frac{2x-7}{3(x^2-x+1)}$. Сонымен,

$$\int\frac{x^4-2x^3+3x+4}{x^3+1}dx=\int\left[\mathrm{x}-2+\frac{4}{3(x+1)}-\frac{2}{3}\bullet\frac{2x-7}{x^2-x+1}\right]dx==\frac{x^2}{2}-2x+\frac{4}{3}ln|x+1|-$$

$$-\frac{2}{3}\left[\int\frac{(2\mathrm{x}-1)dx}{x^2-x+1}-6\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right]=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{4}{3}ln|x+1|-\frac{2}{3}ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{8}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Кейбір иррационал функцияларды интегралдау. Иррационал функцияларды интегралдауда айнымалыны алмастыру арқылы рационал функцияның интегралына келуге болатын кейбір жағдайларды қарастырамыз. $\int R\left(x,\sqrt[n]{x}\right)dx$ түріндегі интегралдар $t=\sqrt[n]{x}$ алмастыруы арқылы рационал функцияның интегралына келеді.

4- мысал. $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$ интегралын табайық. x-тің дәрежесіндегі бөлшектердің ортақ бөлімі $k=4$, олай болса берілген интегралды алу үшін $x=t^4$ ауыстыруын жасаймыз.

$$\int\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}dx=\begin{vmatrix}x=t^4\\ dx=4t^3dt\end{vmatrix}=\int\frac{t^2\cdot 4t^3}{t^3+1}dt=4\int\frac{t^5}{t^3+1}dt=4\int\left(\frac{t^5+t^2}{t^3+1}-\frac{t^2}{t^3+1}\right)=4\int t^2dt-4\int\frac{t^2dt}{t^3+1}=$$

$$=\frac{4t^3}{3}-\frac{4}{3}\int\frac{d(t^3+1)}{t^3+1}=\frac{4t^3}{3}-\frac{4}{3}ln\left|t^3+1\right|+C=\left|t=\sqrt[4]{x}\right|=\frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3}-\frac{4}{3}ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right|+C.$$

Қарастырылған интеграл $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ түріндегі интегралдың дербес түрі болады. Мұнда $ad\neq cb$. Осы интегралды $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ алмастыруы арқылы рационал функцияның интегралына келтіруге болады.

Тригонометриялық функцияларды интегралдау. Бұл пунктте біз $\int R(\sin x,\cos x)dx$ интегралын табуды қарастырамыз. Берілген интеграл $tg\frac{x}{2}=t$ ***әмбебап алмастыруы*** арқылы рационал функцияның интегралына келтіріледі. Шынында да

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad x=2arctgt,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}=\int R_1(t)dt$, мұндағы $R_1(t)$ - рационал функция.

5- мысал. $\int\frac{dx}{\sin x}=\left|tg\frac{x}{2}=t\right|=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}=ln|t|+c=ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C$.

Бұл әдісті көрсетілген кез келген интегралға қолдануға болады, ал $\sin x$ немесе $\cos x$ айнымалыларының дәрежесі бірден жоғары болса қолайсыз үлкен өрнектер шығады. Ондай жағдайларда келесі әдістерді қолдану керек.

1. $\int\sin^m x\cos^n xdx$ түріндегі интеграл.

а) $m-$ бүтін оң тақ сан болса, интеграл $\int R(\cos x)\sin xdx$ түріне келтіріліп, $\cos x=t$ алмастырылуы жасалынады.

б) $n-$ бүтін оң тақ сан болса, интеграл $\int R(\sin x)\cos xdx$ түріне келтіріліп, $\sin x=t$ алмастырылуы жасалынады.

6- мысал. $\int\cos^3 xdx=\int\cos^2 x\cdot coxdx=\int(1-\sin^2 x)\cos xdx=\int(1-\sin^2 x)d\sin x=$

$=|\sin x=t|=\int(1-t^2)dt=t-\frac{t^3}{3}+C=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$.

в) $m,n-$ бүтін теріс емес жұп сан болса, $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

формулалары арқылы $\sin x$ пен $\cos x-$ тің реттері төмендетіледі.

2. Мына $\int\sin mx\cos nxdx,\quad \int\cos mx\cos nxdx,\quad \int\sin mx\sin nxdx$, мұндағы $m,\ n$ – тұрақты сандар, түріндегі интегралды алу үшін тригонометрияның формулаларын:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)),\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

қолдану және көбейтінділерді қосындыға жіктеу арқылы берілген интегралды алу қиынға түспейді.

Әдебиеттер: 1 нег.[372-382], 11 қос. [467-478].

Бақылау сұрақтар:

1. Құрамында квадрат үшмүшелігі бар функцияны интегралдау.
2. Рационал функциялар қалай интегралданады?
3. Әмбабап алмастыру деп қандай алмастыруды айтамыз?
4. Иррационал функцияларды интегралдау.