ЛЕКЦИЯ 4

УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

$$\frac{\partial \rho_N}{\partial t} + div\vec{P}_N - q_N = 0 \qquad (5)$$

Пусть субстанция *N* – энергия *E*.

ρ_N - плотность энергии, т.е. энергия единицы объема жидкости

а) Среда движется - она обладает кинетической энергией: $\rho\frac{\upsilon^2}{2}$

б) Среда сплошная – она обладает внутренней энергией: $\rho\varepsilon^2$

$$\boxed{\rho_N = \rho\frac{\upsilon^2}{2} + \rho\varepsilon = \rho U}$$

$\boxed{q_N}$ → **скорость появления (возникновения) энергии** → **количество энергии, возникающей в единицу времени в единице объема**

НАПРИМЕР:

за счет превращений при горении и фазовых переходах,

при химических реакциях

ρ_N - скаляр

q_N - скаляр

$\vec{P}_N$ - вектор

P_N **- плотность потока энергии.**

Рассмотрим причины, вызывающие плотность потока энергии.

За счет движения жидкости происходит конвективный перенос энергии: $\boxed{\rho U \upsilon_k}$

Работа сил давления (сжатие, разрежение) в единице объема: $\boxed{p \upsilon_k}$

Работа сил трения (вязкости): $\boxed{\sigma'_{ik} \upsilon_k}$ σ'_{ik} **-тензор вязких напряжений.**

Перенос тепла за счет теплопроводности: $-\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x_j}$ **- закон Фурье.**

Это поток тепла через ед. поверхности в ед. времени,

$\lambda = \lambda(T, p)$ **- коэффициент теплопроводности;**

Если среда проводящая (например, ртуть, кровь),
то нужно учитывать поток электромагнитной энергии (вектор Умова-Пойтинга)

Тогда:

$$\boxed{P_N = \rho U \upsilon_k + \rho \upsilon_k - \sigma'_{ik}\upsilon_k - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}}$$

Закон сохранения субстанции (5) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho U\right) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho U \upsilon_k + p\upsilon_k - \sigma'_{ik}\upsilon_k - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + q_N \qquad \textbf{(8)}$$

(I) (II) (III) (IV) (V) (VI)

! Тепло, подводимое вследствие трения и теплопроводности, идет на изменение внутренней энергии и на изменение (растяжение, сжатие) объема.

Преобразуем уравнение (8):

$$U = \frac{\upsilon^2}{2} + \varepsilon$$ - **это удельная энергия, т.е. энергия, отнесенная к единице массы сплошной среды**

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho U \upsilon_k + \rho \upsilon_k - \sigma'_{ik}\upsilon_k - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + q_N$$

(I) **(II)** **(III)** **(IV)** **(V)** **(VI)**

$$\boxed{(\mathrm{I}) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho U)}$$

$$(\mathrm{II}) = \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho U \upsilon_k) = div(\rho U \vec{\upsilon})$$

$$div\, a\vec{b} = a\, div\vec{b} + \vec{b}\, grad\, a$$

$$div(\rho U \vec{\upsilon}) = \rho U div\,\vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}\, grad\, \rho U = \rho U div\,\vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}\nabla(\rho U)$$

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \rho U div\,\vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}\nabla(\rho U) = \frac{d}{dt}\rho U + \rho U div\,\vec{\upsilon} = U\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{dU}{dt} + \rho U div\,\vec{\upsilon}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\upsilon}\nabla = \frac{d}{dt}$$

Оператор полной производной

$$i = c_p T = (c_v + R)T = \left| \begin{array}{l} C_v T = \varepsilon; \quad pV = RT; \quad pV = p\dfrac{m}{\rho}; \quad m = \rho V \\ \text{åñëè} \quad m = 1, \quad \text{òî} \quad V = \dfrac{1}{\rho}; \quad pV = \dfrac{p}{\rho} \end{array} \right| = \varepsilon + \frac{p}{\rho}$$

$$i = \varepsilon + \frac{p}{\rho} \Rightarrow \quad \varepsilon = i - \frac{p}{\rho}$$

$$U = \frac{\upsilon^2}{2} + i - \frac{p}{\rho} = i_0 - \frac{p}{\rho}$$

$$U = i_0 - \frac{p}{\rho}$$

i_0 -полная энтальпия, энтальпия торможения. Она возникает в задачах с большими скоростями. При движении жидкости меняется *i* и *υ*

Если скорость в каком то месте равна нулю, то $i = i_0$

$$\boxed{I = \frac{\partial}{\partial t}(\rho U)}$$

Из уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\vec{\upsilon})=0 \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho div\vec{\upsilon}+\vec{\upsilon}\nabla\rho=0 \quad \frac{d\rho}{dt}+\rho div\vec{\upsilon}=0 \Rightarrow \frac{d\rho}{dt}=-\rho div\vec{\upsilon}$$

$$I+II=U\frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{dU}{dt}+\rho U div\vec{\upsilon}=U\left(\frac{d\rho}{dt}+\rho div\vec{\upsilon}\right)+\rho\frac{dU}{dt}=\rho\frac{dU}{dt}$$

$$\mathbf{0}$$

$$\boxed{U=i_0-\frac{p}{\rho}}$$

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}=\rho\frac{dU}{dt}=\rho\frac{d}{dt}\left(i_0-\frac{p}{\rho}\right)=\rho\frac{di_0}{dt}-\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho}\right)=\rho\frac{di_0}{dt}-\frac{dp}{dt}+\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=$$

$$=\rho\frac{di_0}{dt}-\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\vec{\upsilon}\nabla p\right)-\frac{p}{\rho}\rho div\vec{\upsilon}=\rho\frac{di_0}{dt}-\frac{\partial p}{\partial t}-\vec{\upsilon}\nabla p-p div\vec{\upsilon}=$$

$$=\rho\frac{di_0}{dt}-\frac{\partial p}{\partial t}-div(p\vec{\upsilon})$$

$$\mathbf{III}=\frac{\partial}{\partial x_k}(p\upsilon_k)=div(p\vec{\upsilon})$$

$$\mathbf{I}+\mathbf{II}+\mathbf{III}=\rho\frac{di_0}{dt}-\frac{\partial p}{\partial t}-\cancel{div(p\vec{\upsilon})}+\cancel{div(p\vec{\upsilon})}=\rho\frac{di_0}{dt}-\frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\mathrm{IV}=-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sigma'_{ik}\upsilon_k\right)=-\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\mu\upsilon_k\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial\upsilon_j}{\partial x_j}\right)\right\}$$

$$\sigma'_{ik}=\mu\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\mu\delta_{ik}\frac{\partial\upsilon_j}{\partial x_j}$$

$$\mathrm{IV}=-div\left\{\mu(\vec{\upsilon}\nabla)\vec{\upsilon}+\mu\nabla\frac{\upsilon^2}{2}-\frac{2}{3}\mu\delta_{ik}\vec{\upsilon}\,div\,\vec{\upsilon}\right\}$$

$$\nabla\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=(\vec{a}\nabla)\vec{b}+(\vec{b}\nabla)\vec{a}+\left[\vec{a}\cdot rot\vec{b}\right]+\left[\vec{b}\cdot rot\vec{a}\right]$$

$$\nabla\left(\upsilon^2\right)=(\vec{\upsilon}\nabla)\vec{\upsilon}+(\vec{\upsilon}\nabla)\vec{\upsilon}+[\vec{\upsilon}\cdot rot\,\vec{\upsilon}]+[\vec{\upsilon}\cdot rot\,\vec{\upsilon}]=2(\vec{\upsilon}\nabla)\vec{\upsilon}+2[\vec{\upsilon}\cdot rot\,\vec{\upsilon}]$$

$$(\vec{\upsilon}\nabla)\vec{\upsilon}=\frac{\nabla\upsilon^2}{2}-[\vec{\upsilon}\cdot rot\,\vec{\upsilon}]$$

$$\mathrm{IV}=-div\left\{\mu\nabla\frac{\upsilon^2}{2}-\mu[\vec{\upsilon}\cdot rot\,\vec{\upsilon}]+\mu\nabla\frac{\upsilon^2}{2}-\frac{2}{3}\mu\delta_{ik}\vec{\upsilon}\,div\,\vec{\upsilon}\right\}=$$

$$=-div\left\{\mu\nabla\upsilon^2-\mu[\vec{\upsilon}\cdot rot\,\vec{\upsilon}]-\frac{2}{3}\mu\delta_{ik}\vec{\upsilon}\,div\,\vec{\upsilon}\right\}$$

$$\mathrm{V}=-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)=div(\lambda\nabla T)$$

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}+\mathrm{V}=\rho\frac{di_o}{dt}-\frac{\partial p}{\partial t}-div\left\{\mu\nabla\upsilon^2-\mu[\vec{\upsilon}\cdot rot\,\vec{\upsilon}]-\frac{2}{3}\mu\delta_{ik}\vec{\upsilon}div\vec{\upsilon}+\lambda\nabla T\right\}-q_N$$

$$\mu\nabla\upsilon^2+\lambda\nabla T=\mu\left(\nabla\upsilon^2+\frac{\lambda}{\mu}\nabla T\right)=\left\| i=C_pT\Rightarrow T=\frac{i}{C_p}\right\|=\mu\nabla\left(\upsilon^2+\frac{\lambda}{\mu C_p}i\right)$$

$$\frac{\lambda}{\mu C_p}=\left|v=\frac{\mu}{\rho}\right|=\frac{\lambda}{v\rho\cdot C_p}=\frac{a}{v}$$

$$\boxed{a=\frac{\lambda}{\rho C_p}}$$ - **коэффициент температуропроводности**

$$\boxed{\Pr=\frac{v}{a}}$$ - **число Прандтля**

Для газов Pr≈1.
Например воздух Pr = 0.72.

$$\frac{\lambda}{\mu C_p}=\frac{1}{\Pr}\quad\Rightarrow\quad\mu\nabla\left(\upsilon^2+\frac{\lambda}{\mu C_p}i\right)=\mu\nabla\left(\upsilon^2+\frac{i}{\Pr}\right)$$

$$\rho\frac{di_0}{dt}=\frac{\partial p}{\partial t}+div\,\mu\left\{\nabla\left(\upsilon^2+\frac{i}{Pr}\right)-\left[\vec{\upsilon}\cdot rot\vec{\upsilon}\right]-\frac{2}{3}\delta_{ik}\vec{\upsilon}div\vec{\upsilon}\right\}+q_N$$ - **уравнение энергии** **(9)**

СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ. ДИВЕРГЕНТНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Для несжимаемой жидкости: $div\vec{\upsilon} = 0$ **Для стационарного движения:** $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\underset{0}{\rho\cancel{\frac{\partial \upsilon_i}{\partial t}}} + \rho\upsilon_k \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\mu\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \underset{0}{\cancel{\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i}}}\right) - \frac{2}{3}\mu\delta_{ik}\underset{0}{\cancel{\frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_j}}}\right\} + F_i$$

$$\underset{0}{\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}}} + div(\rho\vec{\upsilon}) = 0$$

$$F_{\rho i} = F_i$$

$$\rho\frac{di_o}{dt} = \underset{0}{\cancel{\frac{\partial p}{\partial t}}} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\mu\left(\nabla\left(\upsilon^2 + \frac{i}{Pr}\right)\right) - \left[\vec{\upsilon}\cdot rot\vec{\upsilon}\right] - \frac{2}{3}\delta_{ik}\vec{\upsilon}\underset{0}{\cancel{div\vec{\upsilon}}}\right\} + q_N$$

Уравнение движения: $\rho\upsilon_k \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 \upsilon_i}{\partial x_k^{\ 2}} + F_i \Rightarrow \rho\left(\overrightarrow{\upsilon\nabla}\right)\vec{\upsilon} = -\nabla p + \mu\overrightarrow{\Delta\upsilon} + \vec{F}$

$$\rho\frac{di_0}{dt} = \rho\left(\underset{0}{\cancel{\frac{\partial i_0}{\partial t}}} + \vec{\upsilon}\nabla i_0\right) = \rho\vec{\upsilon}\nabla i_0 = \rho\vec{\upsilon}\nabla i_0 + i_0 div\left(\rho\vec{\upsilon}\right) = div\left(\rho i_0\vec{\upsilon}\right)$$

$$div\left\{\left(\rho i_0\vec{\upsilon}\right) - \mu\nabla\left(\upsilon^2 + \frac{i}{Pr}\right) + \mu\left[\vec{\upsilon}\cdot rot\vec{\upsilon}\right]\right\} = q_N$$

Полная энтальпия торможения: $i_0 = i + \upsilon^2 / 2$

$$\boxed{div\left\{\rho\vec{\upsilon}\left(i + \frac{\upsilon^2}{2}\right) - \mu\nabla\left(\upsilon^2 + \frac{i}{Pr}\right) + \mu\left[\vec{\upsilon}\cdot rot\,\vec{\upsilon}\right]\right\} = q_N}$$

Дивергентная форма уравнения энергии для стационарного течения несжимаемой жидкости.

$$\rho\left(\vec{\upsilon}\nabla\right)\vec{\upsilon} = -\nabla p + \mu\Delta\vec{\upsilon} + \vec{F}_i$$

$$div\,\vec{\upsilon} = 0$$

$$div\left\{\rho\vec{\upsilon}\left(i + \frac{\upsilon^2}{2}\right) - \mu\nabla\left(\upsilon^2 + \frac{i}{Pr}\right) + \mu\left[\vec{\upsilon}\cdot rot\,\vec{\upsilon}\right]\right\} = q_N$$

Уравнений-5; Неизвестные –8: $u, \upsilon, w, p, \rho, \mu, T, \lambda$

- **Термодинамическое уравнение состояния рассматриваемой среды.**

Для газа (идеальной жидкости) $\boxed{pV = \frac{m}{\mu}RT}$ Для одного моля $\boxed{p = \frac{m}{V}RT = \rho RT}$

- **Зависимость** $\mu = \mu(T)$

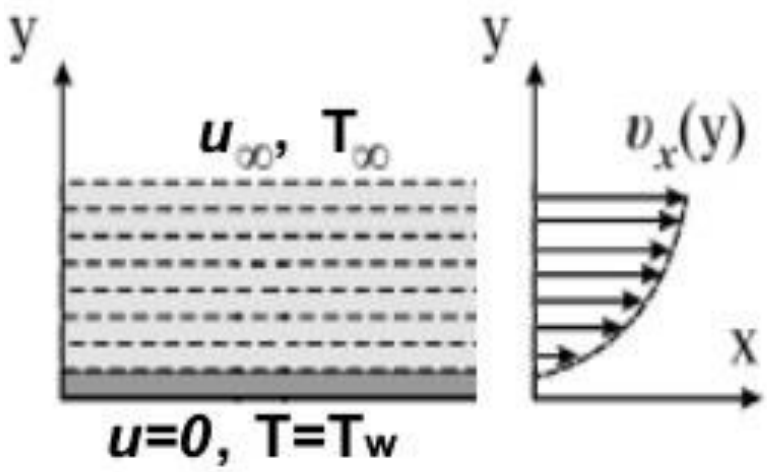
Для газов $\mu = CT^n;\ 0 \le n \le 1$

Для жидкостей $\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1}{1 + R(T - T_0)};\quad \frac{\mu}{\mu_0} = e^{-b(T - T_0)}$

- **Связь между μ и λ.**

$$\Pr = \frac{v}{a} = \frac{\mu/\rho}{\frac{\lambda}{C_p}\rho} = \frac{\mu C_p}{\lambda} = 0.72$$ (воздух)

Для решения системы уравнений необходимо указать граничные и начальные условия. **!**



При: $y = 0:$ $u = 0;$ $T = T_w$

$y \to \infty;$ $u = u_\infty;$ $T = T_\infty$

На стенке: $q_w = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_w,$ **Вдали от стенки:** $y \to \infty;$ $T = T_\infty$

Для адиабатической стенки: $q_w = 0$