Лекция 9. Дифференциальное исчисление. Определение дифференциала. Примеры дифференциала. Единственность дифференциала. Определение производной функции. Геометрический смысл производной. Касательная. Связь касательной и секущей. Правила дифференцирования. Теорема о связи непрерывности и дифференцируемости. Пример Вейерштрасса нигде не дифференцируемой функции. Правила дифференцирования. Теорема о дифференцируемости сложной функции. Таблица производных. Инвариантность первого дифференциала. Дифференцирование обратной функции. Таблица производных

Дифференциальное исчисление

Пусть функция f определена в окрестности точки a.
Определение. Функция f дифференцируема в точке a, если

$$f(a+h)-f(a)=Ah+\alpha(h)h,$$

где A - число, $\alpha(h)$ - функция, определенная в проколотой окрестности, $h=0$, и

$$\lim_{h\to 0}\alpha(h)=0,$$

$f(a+h)-f(a)-$ приращение функции.
h - произвольное число из некоторой проколотой окрестности точки 0 - приращение аргумента.

Линейная функция $h\mapsto Ah$ (как $y=kx$) называется **дифференциалом функции** f и обозначается $df(a,h)$ или $df(h)$.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x)=x$.

$$f(a+h)-f(a)=a+h-a=h=1\cdot h+0\cdot h,\quad df(h)=h.$$

У линейной функции дифференциал - это она сама.

Рассмотрим функцию $f(x)=x^2$.

$$(a+h)^2-a^2=a^2+2ah+h^2-a^2=h^2+2ah=2a\cdot h+h\cdot h.$$
$$df(h)=2ah$$

Дифференциал зависит от точки a.

Единственность дифференциала

Утверждение. Дифференциал функиии определен однозначно, т.е. если

$$f(a+h)-f(a)=A_1h+\alpha_1(h)h,$$
$$f(a+h)-f(a)=A_2h+\alpha_2(h)h$$

то $A_1=A_2$

☐ ☐ Доказательство.

$$(A_1-A_2)\,h+(\alpha_1(h)-\alpha_2(h))\,h=0.$$

Так как $h\neq 0$, делим на h:

$$A_1-A_2=\alpha_2(h)-\alpha_1(h)\longrightarrow 0$$

Следовательно, $A_1=A_2$. ■

Утверждение. Функция f диффереииируема в точке a, то существует конечный предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Этот предел называется **производной в точке** a и обозначается $f'(a)$ и $\dfrac{df}{dx}(a)$. Кроме того,

$$df(a,h)=f'(a)h$$

☐ ☐ Доказательство. $\Longrightarrow$ $f(a+h)-f(a)=Ah+\alpha(h)h$ – это верно для h из некоторой проколотой окрестности нуля. Делим это равенство на h :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=A+\alpha(h)\longrightarrow A.$$

$\Longleftarrow$ Пусть существует предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Обозначим его A. Положим

$$\alpha(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-A.$$
$$\lim_{h\to 0}\alpha(h)=0.$$

Умножаем на h :

$$f(a+h)-f(a)=Ah+\alpha(h)h.$$

■

Геометрический смысл

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\alpha(h)h.$$
$$x=a+h,$$
$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\alpha(x-a)(x-a),$$
$$f(x)\sim f(a)+f'(a)(x-a).$$

Итого: $y=f(a)+f'(a)(x-a)-$ прямая.

Определение. Прямая $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ - касательная к графику $y=f(x)$ в точке $(a;f(a))$.

Пример.

$$y=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=0.$$

Следовательно, касательная в точке $(0;0)-y=0$.

Утверждение. Касательная - это предельное положение секущей, т.е.

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

Наклон касательной:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\longrightarrow f'(a).$$

Связь непрерывности и дифференцируемости

Утверждение. Если f диффререниируема в точке a, то f непрерывна в точке a.

☐ ☐ Доказательство. По определению дифференцируемости

$$f(a+h)-f(a)=f'(a)h+\alpha(h)h\longrightarrow 0.$$

Следовательно, при замене $x=a+h$

$$\lim_{a\to a}f(x)=f(a).$$

То есть f - непрерывная функция. ■

Пример. Рассмотрим функцию $f(x)=|x|, x=0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

предела нет. Эта функция не дифференцируема в точке 0 .

Пример Вейерштрасса

Теорема (пример Вейерштрасса). Функция

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\sin\left(8^{n}x\right)$$

непрерывна на $\mathbb{R}$, но нигде не дифферениируема.

☐ ☐ Доказательство. 1) Проверим непрерывность

$$S_n=\sum_{n=1}^{N}2^{-n}\sin\left(8^{n}x\right)$$

$$|f(x)-S_N(x)|=\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}2^{-n}\sin\left(8^{n}x\right)\right|\leq\sum_{n=N+1}^{\infty}2^{-n}$$

$$\sup_{x}|f(x)-S_N(x)|\leq 2^{-N}\longrightarrow 0.$$

$$\frac{b_1}{1-q}\longrightarrow\frac{2^{-N-1}}{1/2}=2^{-N}$$

Итак, S_N - непрерывная функция, и она равномерно сходится к f. Следовательно, f - непрерывная функция.

2) Проверим, что функция нигде не дифференцируема.

Пусть x фиксировано.

$$f\left(x\pm 2^{-3N-1}\pi\right)-f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}(\sin\left(8^{n}\left(x\pm\frac{\pi}{2\cdot 8^{N}}\right)\right)-\sin\left(8^{n}x\right)\Big)=$$

$$=\sum_{n=1}^{N}2^{-n}\left(\sin\left(8^{n}\left(x\pm\frac{\pi}{2\cdot 8^{N}}\right)\right)-\sin\left(8^{n}x\right)\right).$$

$$\frac{f\left(x\pm 2^{-3N-1}\pi\right)-f(x)}{\pm 2^{-3N-1}\pi}=\frac{\sum_{n=1}^{N}2^{-n}\left(\sin\left(8^{n}\left(x\pm\frac{\pi}{2\cdot 8^{N}}\right)\right)-\sin\left(8^{n}x\right)\right)}{\pm 2^{-3N-1}\pi}$$

Оценим последнее слагаемое

$$2^{-N}\left|\sin\left(8^{n}\left(x\pm\frac{\pi}{2\cdot 8^{N}}\right)\right)-\sin\left(8^{n}x\right)\right|=2^{N}\cdot 2\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|\left|\cos\left(8^{N}x\pm\frac{\pi}{4}\right)\right|\geq 2^{-N}$$

Добавляя или вычитая $\frac{\pi}{4}$ можно «загнать» точку внутрь лучей правее $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и левее $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Оценим остальные слагаемые сверху.

$$\left|\sum_{n=1}^{N-1} 2^{-n}\left(\sin\left(8^n\left(x \pm \frac{\pi}{2\cdot 8^N}\right)\right) - \sin\left(8^n x\right)\right)\right| \le \sum_{n=1}^{N-1} 2^{-n}2\left|\sin\left(\frac{8^n\pi}{48^N}\right)\right| \cdot 1 \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{N-1} 2^{-n}2\frac{8^n\pi}{48^N}\Bigg) = \frac{\pi}{2\cdot 8^N}\sum_{n=1}^{N-1} 4^n =$$

$$= \frac{\pi}{2\cdot 8^N}\frac{4\left(4^{N-1}-1\right)}{4-1} \le \frac{\pi 4^N}{2\cdot 8^N\cdot 3} = \frac{\pi}{6}\cdot 2^{-N}$$

Следовательно, первые слагаемые (сумма) не больше, чем последнее.

Итак,

$$\left|\frac{f\left(x \pm 2^{-3N-1}\pi\right) - f(x)}{\pm 2^{-3N-1}\pi}\right| \ge \frac{2^{-N} - 2^{-N}\frac{\pi}{6}}{\pm 2^{-3N-1}} = \frac{\left(1-\frac{\pi}{6}\right)}{\pi}\cdot 2^{2N+1} \longrightarrow \infty.$$

■

Правила дифференцирования

Утверждение. Если f и g дифферениируемь в точке , то $f+g$ дифферениируема в точке a.

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$d(f+g) = df + dg$$

☐ Доказательство. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)-(f(a)+g(a))}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim\limits_{x\to}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a)+g'(a)$

Утверждение 44. Если f и g дифферениируемы в точке , то $f\cdot g$ дифферениируема в точке a.

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$$

$$d(fg) = gdf + fdg$$

☐ Доказательство. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-(f(a)g(a))}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a) + {}+\lim\limits_{x\to}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}f(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$. ■

Утверждение. Если f дифферениируема в точке a, и $f(a)\neq 0$, то $\frac{1}{f}$ дифферениируема в точке a.

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$$

$$d\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2(a)}df$$

☐ Доказательство.

$$\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{f(x)}-\dfrac{1}{f(a)}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-1}{f(x)f(a)}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\frac{1}{f^2(a)}f'(a).$$

■

Дифференцирование сложной функции

Теорема (дифференцирование сложной функции). Пусть $f : U(a) \longrightarrow V(f(a))$, $g : V(f(a)) \longrightarrow \mathbb{R}$, и f и g диффереиируемь в точке a и $f(a)$ соответственно. Тогда $f(g(x)$ диффереиируема в точке .

$$(g(f(x)))'(a)=g'(f(a))f'(a)$$

☐ Доказательство. Так как f дифференцируема, то

$$f(a+h)-f(a)=f'(a)h+\alpha(h)h,$$

где $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(h)=0$.
Так как g дифференцируема в точке $f(a)$, то

$$g(a+t)-g(a)=g'(a)t+\alpha(t)t$$

где $\lim\limits_{t\to 0}\alpha(t)=0$.
Определим $\beta(0)=0$ и равенство верно для каждого t из окрестности нуля, а β непрерывна в нуле.

$$t=f(a+h)-f(a).$$

$$\begin{aligned}&g(f(a)+f(a+h)-f(a))-g(f(a))=\\&=g'(f(a))(f(a+h)-f(a))+\beta(f(a+h)-f(a))(f(a+h)-f(a))=\\&\quad=g'(f(a))f'(a)h+\underbrace{(g'(f(a))\alpha(h)+\beta(f(a+h)-f(a))\,(f'(a)+\alpha(h)))\,h}_{\to 0}.\end{aligned}$$

■

Инвариантность первого дифференциала

$$d(g\circ f)(h)=g'(f(a))f'(a)h$$

$$dg\circ f(h)=g'(f(a))df(h)$$

$$d(g\circ f)=dg\circ df.$$

$dg(f)=g'(f)df$ – **инвариантность I-го дифференциала**

В первом дифференциале можно делать замены переменных (как способ замены координат).

Инвариантность первого дифференциала Вид дифференциала не зависит от выбора системы координат. Или в равенстве

$$dg = g'(y)dy$$

y можно считать или свободной переменной, или функцией (ответ в любом случае будет верный).

Дифференцирование f^{-1}

Пусть f непрерывна и строго монотонна на I. Тогда $f(I)$ - промежуток и определена обратная функция

$$f^{-1} : f(I) \longrightarrow I,$$

причем f^{-1} строго монотонна и непрерывна.
Утверждение. Если f диффereниируема в точке $a \in I$ и $f'(a) \neq 0$, *то* f^{-1} диффереииируема в точке $f(a)$*и*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

Точка a - внутренняя точка I, $f(a)$ - внутренняя точка $f(I)$.

$$df^{-1} = (df)^{-1}.$$

☐ Доказательство.

$$\lim_{y\to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \lim_{y\to f(a)} H\left(f^{-1}(y)\right), \text{ где}$$

$$H(x) = \frac{x-a}{f(x)-f(a)}$$

$$\lim_{x\to a} H(x) = \frac{1}{f'(a)}, \quad \lim_{y\to f(a)} f^{-1}(y) = a$$

из-за непрерывности f^{-1}.
Так как $f-$ биекция, то $f^{-1}(y) \neq a$ при $y \neq f(a)$. По теореме о пределе сложной функции

$$\lim_{y\to f(a)} H\left(f^{-1}(y)\right) = \frac{1}{f'(a)}$$

■

Таблица производных

1. $(\text{ const })' = 0$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$

- $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
- $x \neq 0, n \in \mathbb{Z}$

☐ Доказательство.

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \to a} \left(x^{n-1} + a x^{n-2} + \ldots + a^{n-1} \right) = n a^{n-1}$$

3. $(e^x)' = e^x$.

☐ Доказательство.
Лемма 1. · Первый предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

- Второй предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Доказательство лемми.

- Докажем первое равенство:

$$\lim_{x \to 0} (\ln(1+x))^{1/x} = \ln e = 1$$

- Докажем второе равенство с помощью первого:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{t}{\ln(t+1)} = 1$$
$$t = e^x - 1 \longrightarrow 0, \quad x = \ln(t+1)$$

Применим второй предел:

$$\lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{e^a \left(e^{x-a} - 1 \right)}{x - a} = e^a$$

4. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

☐ Доказательство.

$$x = a, y = \ln a$$
$$(\ln x)^{-1}(a) = \frac{1}{(e^y)'\,(f'(a) = \ln a)} = \frac{1}{a}.$$

Следствие 15. $x > 0, \alpha \in \mathbb{R} : (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

☐ Доказательство.

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$
$$(x^\alpha)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot x^{-1} \cdot \alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

5. $(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x$.

☐ Доказательство.

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim_{x\to a} \cos\frac{x+a}{2} = \cos\frac{2a}{2} = \cos a$$
$$\lim_{x\to a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{-2\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim_{x\to a} -\sin\frac{x+a}{2} = -\sin\frac{2a}{2} = -\sin a.$$

6.
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

☐ Доказательство.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x}{\cos x} + \sin x \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

7.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'}\bigg|_{y=\arcsin x} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Так как $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

8.

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

9. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x; (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.