Лекция 3. Формула Грина. Вычисление площади плоской области с помощью формулы Грина. Некоторые приложения криволинейных интегралов

Формула Грина

Рассмотрим случай криволинейного иктеграла второго рода вдоль простого замкмутого коктура L в плоскости xOy. В этом случае контур L является границей некоторой плоской замкнутой области D. Оказывается, что криволинейный интеграл второго рода вдоль L может быть преобразован в двойной интеграл по замкнутой области D. Установим, как и при каких условиях выполняется такое преобразование.

Теорема 3.1. *Пусть замкнутая область D на плоскости* **xOy** *ограничена простым кусочно гладким контуром L, а функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в D вместе со своими частными производными. Тогда имеет место следующая формула Грина* [1] *для односвязной области:*

$$\oint\limits_L P dx + Q dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy, \tag{3.1}$$

где контур L обходится в положительном направлении.

□ Формула Грина фактически распадается на две независимые формулы

$$\oint\limits_L P dx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \quad \text{и} \quad \oint\limits_L Q dy = \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy.$$

Эти две формулы являются частными случамми общей формулы (3.1), первая – при $Q \equiv 0$, вторая – при $P \equiv 0$. Доказав эти две формулы, мы получим общую формулу (3.1) их суммированием. Доказательство двух формул строится по одной схеме. Поэтому можно ограничиться доказательством одной из них, например первой.

Сперва рассмотрим простейший случай, когда замкнутая область D является правильной областью интегрирования относительно координатной оси Oy. Это значит, что она ограничена снизу и сверху кривыми $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, где функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяют неравенству $y_1(x) \leqslant y_2(x), x \in [a,b]$, а слева и справа – вертикальными отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ (рис. 1). В этом случае граница L

[1] Дж. Грин (1793-1841) - английский математик и физик

замкнутой области D является кусочно гладким простым контуром, а положительное направление обхода соответствует последовательности $ABFEA$ точек этого контура. Отметим, что в частном случае каждый из вертикальных отрезков AE и BF может выродиться в точку.

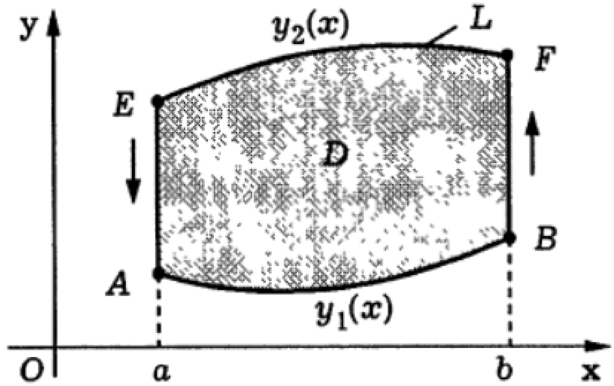

Рис. 1

Докажем, что в случае, когда замкнутая область является правильной относительно оси Oy, верно равенство

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint\limits_L P dx. \tag{3.2}$$

Согласно условиям теоремы, двойной интеграл в левой части этого равенства существует, причем форма области интегрирования позволяет свести его к повторному интегралу. Учитывая это, получаем

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy =$$

$$= \int\limits_a^b P\left(x, y_2(x)\right) dx - \int\limits_a^b P\left(x, y_1(x)\right) dx. \tag{3.3}$$

Используя правило вычисления криволинейного интеграла второго рода и его свойство 1° (см. Лекция 2), заключаем, что

$$\int_a^b P\left(x, y_2(x)\right) dx = \int_{EF} P(x,y)dx = -\int_{FE} P(x,y)dx$$

$$\int_a^b P\left(x, y_1(x)\right) dx = \int_{AB} P(x,y)dx$$

Подставляя эти соотношения в (3.3), находим

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_{FE} P(x,y)dx - \int_{AB} P(x,y)dx.$$

Последнее равенство не будет нарушено, если в его правую часть дописать со знаком минус интегралы

$$\int_{BF} P(x,y)dx \quad \text{и} \int_{EA} P(x,y)dx,$$

равные нулю, так как они берутся вдоль отрезков прямых, параллельных координатной оси Oy. В итоге будем иметь

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_{AB} P(x,y)dx - \int_{BF} P(x,y)dx -$$
$$- \int_{FE} P(x,y)dx - \int_{EA} P(x,y)dx = -\oint_L P(x,y)dx$$

что доказывает равенство (3.2). Предположим, что замкнутая область D не является правильной относительно оси , но может быть разделена кусочно гладкими кривыми на конечное число замкнутых областей, правильных относительно оси Oy. Записывая формулу (3.2) для каждой частичной области и суммируя полученные равенства, мы приходим к формуле (3.2) для всей области D. В самом деле, рассмотрим, например, ситуацию, изображенную на рис. 2.

Область интегрирования D разбита на три частичные области D_1, D_2 и D_3, ограниченные контурами L_1, L_2, L_3. В силу аддитивности двойного интеграла двойной интеграл по области D равен сумме трех двойных интегралов по

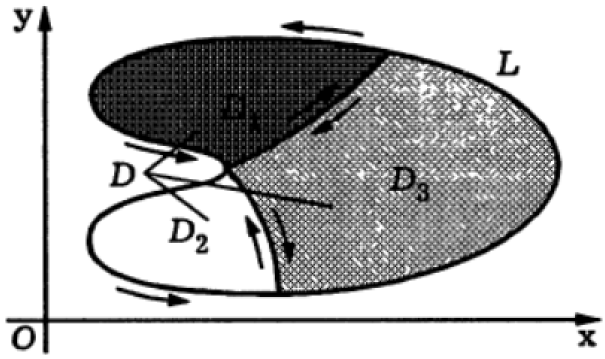

Рис. 2

частичным областям:

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \iint\limits_{D_1} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy + \iint\limits_{D_2} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy + \iint\limits_{D_3} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

В сумме трех криволинейных интегралов по границам частичных областей интегралы по кривым γ_1 и γ_2, которыми замнутая область D была разделена на частичные области, встретятся дважды, причем с противоположными направлениями. Поэтому эти интегралы взаимно уничтожаются, а сумма криволинейных интегралов по границам трех частичных областей оказывается равной криволинейному интегралу по границе замкнутой области D :

$$\oint\limits_{L} Pdx = \oint\limits_{L_1} Pdx + \oint\limits_{L_2} Pdx + \oint\limits_{L_3} Pdx$$

Сопоставляя последние два равенства, приходим к формуле (3.2) для замкнутой области D.

Доказательство формулы

$$\oint\limits_{L} Qdy = \iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$$

аналогично и проводится в предположении, что замкнутая область D либо является правильной в направлении оси Ox, либо может быть разделена на конечное число таких областей. ■

В связи с доказанной теоремой остановимся на следующем важном понятии. Плоскую область D называют односвязной областью, когда она обладает следующим свойством: если простой замкнутый контур L целиком лежит в области D, то и область, ограниченная контуром L, целиком лежит в D. Плоскую область, не являющуюся односвязной, называют мноеосвязной областьюо. Примером многосвязной области является кольцо $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2$. Для многосвязной области характерно наличие отверстий („дырок"). В общем случае многосвязная область может иметь очень сложную структуру. Мы ограничимся рассмотрением частного случая многосвязной области, когда граница этой области состоит из конечного числа попарно не пересекающихся контуров. В этом случае один контур L_0 является внешним, а остальные контуры L_1, …, L_n - внутренними (они ограничивают отверстия в области). Отметим, что положительным направлением обхода внешнего контура следует считать движение против часовой стрелки, а положительным направлением обхода внутренних контуров движение по часовой стрелке, поскольку при таком движении область D, ограниченная этими контурами, остается все время слева (рис. 3).

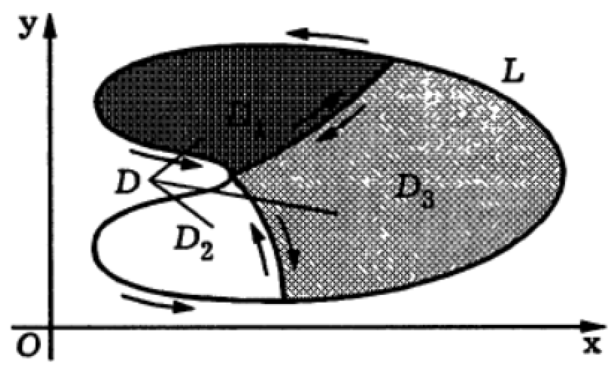

Рис. 3

В дальнейшем мы также будем говорить об односвязмой (многосвязной) замкнутой области D, имея в виду, что D является замыканием односвязной (многосвязной) области.

Формулу Грина можно распространить на случай многосвязной замкнутой области D, ограниченной внешним кусочно гладким контуром L_0 и внутренними кусочно гладкими контурами L_1, L_2, …, L_n. Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в D вместе со своими частными производными, то верна формула Грина для многосвязной области

$$\oint\limits_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy, \tag{3.4}$$

где символ $\oint\limits_{\partial D}$ (криволинейный интеграл по границе замкнутой области) обозначает сумму криволинейных интегралов по всем контурам, составляющим границу D, каждый из которых обходится в положительном направлении.

Чтобы доказать эту формулу, разрежем замкнутую область D вдоль кривьх, соединяющих внутренние контуры L_n с внешним контуром L_0 (рис. 4). После таких разрезов мы получим односвязную область D^*, ограниченную кусочно гладким контуром L^*, в который входят все разрезы. Для односвязной замкнутой области D^* верна формула Грина, т.е.

$$\oint\limits_{L^*} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

причем в криволинейном интеграле контур L^* обходится так, что область D^* остается слева.

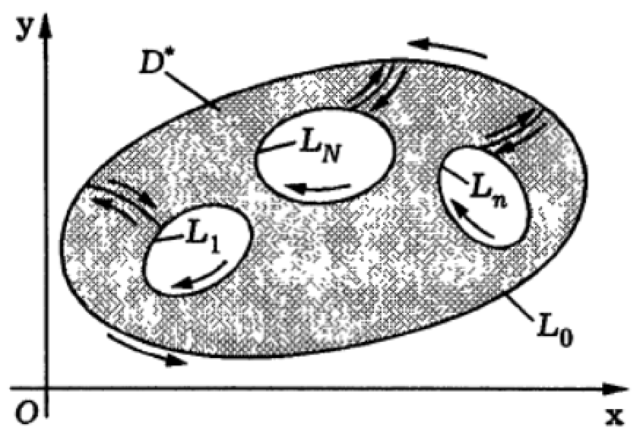

Рис. 4

При интегрировании вдоль границы области D^* криволинейные интегралы по разрезам берутся дважды в противоположных направлениях и потому взаимно уничтожаются. Поэтому криволинейный интеграл по контуру L^*, проходимому в положительном направлении, равен сумме криволинейных интегралов по всем контурам L_i, $i = \overline{0, n}$, также проходимым в положительном направлении, т.е. криволинейному интегралу вдоль границы исходной области D. Так как наличие разрезов (множеств меры нуль) не влияет на значение двойного интеграла, заключаем, что верна формула (3.4).

Формулу Грина для многосвязной области можно записать, не используя понятия интеграла по границе области. Если считать, что все контуры L_i,

$i = \overline{0, n}$, обходятся против часовой стрелки, то

$$\oint\limits_{L_0} Pdx + Qdy - \sum_{i=1}^{n} \oint\limits_{L_i} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Вычисление площади плоской области с помощью формулы Грина

Одно из возможных применений формулы Грина – вычисление площади плоской фигуры, ограниченной кусочно гладким контуром. Площадь замкнутой области D равна двойному интегралу с областью интегрирования D и подынтегральной функцией, тождественно равной единице. Подобрав функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ так, что $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv 1$ в D, мы с помощью формулы Грина можем вычислить площадь через криволинейный интеграл. Подбирать функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ можно различными способами, но, как правило, используют самые простые:

а) $P = -y$, $Q \equiv 0$;

б) $P \equiv 0$, $Q = x$;

в) $P = -y/2$, $Q = x/2$.

Для этих трех вариантов имеем

$$S = \iint\limits_{D} dxdy = -\oint\limits_{L} ydx,$$

$$S = \iint\limits_{D} dxdy = \oint\limits_{L} xdy,$$

$$S = \iint\limits_{D} dxdy = \frac{1}{2} \oint\limits_{L} xdy - ydx.$$

В качестве примера вычислим по последней формуле площадь, которая ограничена элипсом с полуосями a и b, заданным параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Находим $dx = -a\sin t dt$, $dy = b\cos t dt$ и получаем

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_{L} xdy - ydx = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{2\pi} \left(ab\cos^2 t + ab\sin^2 t \right) dt = \pi ab.$$

Некоторые приложения криволинейных интегралов

Криволинейные интегралы находят широкое применение в различных областях математики, физики, механики и инженерии. Здесь мы рассмотрим некоторые из их ключевых приложений в задачах геометрии и механики.

Вычисление длины кривой

Для любой гладкой или кусочно-гладкой кривой C, заданной параметрически $(x(t), y(t))$, где $t \in [a, b]$, длину кривой можно найти через криволинейный интеграл первого рода:

$$L = \int\limits_C ds = \int\limits_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Вычисление площади плоской области с помощью формулы Грина

Формула Грина позволяет выразить площадь замкнутой плоской области D, ограниченной кривой C, через криволинейный интеграл второго рода:

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_C (x\, dy - y\, dx)\,.$$

Этот метод удобен, так как позволяет вычислять площадь, не разбивая область на элементарные фигуры, а интегрируя вдоль границы области.

Момент инерции кривой относительно оси

Если вдоль кривой C распределена масса с линейной плотностью $\rho(s)$, момент инерции этой кривой относительно оси Ox определяется как:

$$I_x = \int\limits_C y^2 \rho(s)\, ds,$$

где y – расстояние от оси Ox до элемента кривой ds.

Работа силы по перемещению

При движении тела вдоль кривой C под действием силы $\vec{F} = (P, Q)$, работа силы по пути от точки A до точки B может быть найдена с помощью криволинейного интеграла второго рода:

$$A = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_C P\,dx + Q\,dy.$$

Этот интеграл позволяет учесть направление силы и направление перемещения вдоль кривой, что необходимо для корректного вычисления работы.

Центр масс кривой

Центр масс кривой с распределенной по ней массой $\rho(s)$ определяется по формулам:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int\limits_C x\rho(s)\,ds, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \int\limits_C y\rho(s)\,ds,$$

где $M = \int\limits_C \rho(s)\,ds$ – общая масса кривой. Таким образом, для нахождения центра масс требуется как сама кривая, так и информация о распределении массы вдоль неё.

Момент силы относительно точки

Момент силы $\vec{F} = (P, Q)$ относительно некоторой точки $O(x_0, y_0)$ при перемещении вдоль кривой C определяется криволинейным интегралом:

$$M_O = \int\limits_C ((x - x_0)Q - (y - y_0)P)\,ds.$$

Этот интеграл учитывает плечо силы относительно точки O, определяя, насколько сильно сила вращает тело вокруг точки.

Таким образом, криволинейные интегралы позволяют решать важные задачи в геометрии, такие как вычисление длины, площади, моментов инерции, а также задачи в механике, включая работу силы, момент силы и определение центра масс. Эти приложения подтверждают важность криволинейных интегралов для описания сложных процессов в математике и физике.

Вопросы для закрепления

1. Какова основная идея формулы Грина для криволинейного интеграла второго рода?

2. Какие условия должны выполняться для применения формулы Грина в односвязной области?
3. Какое значение имеет положительное направление обхода контура при использовании формулы Грина?
4. Как можно выразить криволинейный интеграл вдоль замкнутого контура L через двойной интеграл по области D, ограниченной контуром L?
5. Как с помощью формулы Грина можно найти площадь плоской области?
6. В чем разница между односвязной и многосвязной областями, и как это влияет на применение формулы Грина?
7. Каковы возможные значения функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, позволяющие вычислить площадь через криволинейный интеграл?
8. Какую роль играют внутренние и внешние контуры при применении формулы Грина для многосвязной области?
9. Почему интегралы по разрезам многосвязной области при вычислении по формуле Грина взаимно уничтожаются?
10. В чем заключается отличие формулы Грина для многосвязной области от формулы для односвязной области?