3. Екі элементар теңсіздіктер

Гельдер шартын қанағаттандыратын функциялардың қарапайым қасиеттерін келтіруден бұрын элементар математиканың екі теңсіздігін келтірейік.

Айталық σ_1 және σ_2 кез келген екі оң сан, ал $0 \le \lambda \le 1$ болсын. Онда

$$\frac{\sigma_1^{\lambda} + \sigma_2^{\lambda}}{(\sigma_1 + \sigma_2)^{\lambda}} \le 2^{1-\lambda}, \qquad (7)$$

$$\frac{\left|\sigma_1^{\lambda} - \sigma_2^{\lambda}\right|}{\left|\sigma_1 - \sigma_2\right|^{\lambda}} \le 1 \qquad (\sigma_{1 \neq} \sigma_2) \qquad (8)$$

теңсіздіктері орынды.

Бұл теңсіздіктерді дәлелдеу үшін жалпылығын шектемей-ақ, $\sigma_1 \ge \sigma_2$-деп алуға болады. Сөйтіп, $\sigma = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ десек, біз (7), (8) теңсіздіктерді мына

$$\frac{1+\sigma^{\lambda}}{(1+\sigma)^{\lambda}} \le 2^{1-\lambda} \ (0 \le \sigma \le 1), \quad \frac{1-\sigma^{\mu}}{(1-\sigma)^{\mu}} \le 1 \ (0 \le \sigma \le 1)$$

түрлеріне келтіреміз.

Алдымен (7) теңсіздікті дәлелдейік. Ол үшін оның сол жағындағы функцияның туындысын нөлге теңесек,

$$\lambda\left(\sigma^{\lambda-1} - 1\right) = 0$$

аламыз. Бұдан $\sigma = 1$ және бұл нүкте (7) сол жағындағы функцияның максимум нүктесі, демек , (7) сол жағы әрқашанда $2^{1-\lambda}$ санынан кіші.

Дәл солай (8) теңсіздікті де оңай дәлелдеуге болады.