## § 5. Остроградский әдісі.

Рационал бөлшектің туындысы да рационал бөлшек болады. Ал, рационал бөлшекті интегралдаса тек қана екі жағдайда, интеграл астындағы функция II немесе IV типті жай рационал бөлшек болса ғана жауап рационал бөлшек болады. ***М.В.Остроградский*** (1801-1862) әдісі рационал бөлшекті интегралдағанда жауаптың рационал бөлігін бөліп алуға мүмкіндік береді.

Айталық, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - дұрыс рационал бөлшек. $Q(x)$-ті мүмкін болатын жақшалардың көбейтіндісіне жіктейміз. $Q(x)$-ті екі көпмүшеліктің көбейтіндісі $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$ түрінде жазамыз. Мұнда $Q_1(x)$- $Q(x)$ көпмүшелігінің барлық еселі түбірлерінен 1 еселе кем түбірлері бар көпмүшелік;

Ал, $Q_2(x)$- $Q(x)$ көпмүшелігінің барлық 1еселі түбірлері бар көпмүшелік.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx \qquad (1)$$

Мұндағы $P_1(x)$ - дәрежесі $Q_1(x)$-ң дәрежесінен 1-ге кем, коэффициенттері анықталмаған көпмүшелік, $P_2(x)$ дәрежесі $Q_2(x) -$ ң дәрежесінен 1-ге кем, коэффициенттері анықталмаған көпмүшелік. Ол коэффициенттерді табу үшін (1) теңдіктің екі жағын да дифференциалдап, теңдіктің оң жағын ортақ бөлімге келтіреміз, сосын алымындағы көпмүшеліктердің сәйкес дәрежелерінің коэффициенттерін теңестіріп, $P_1(x), P_2(x)$ көпмүшеліктерінің белгісіз коэффициенттерін анықтаймыз. (1) теңдіктің оң жағындағы $\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$ интегралын табу үшін интеграл астындағы рационал функцияны жай бөлшектердің қосындысына жіктейміз. I және III типті жай бөлшекрді ғана интегралдаймыз.

*Мысал 1.* $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} =$

интеграл астындағы рационал функцияның бөлімі 5-дәрежелі көпмүшелік; оның әртүрлі екі түбірі бар: -1 және 1, екеуі де еселі: сәйкесінше 3 және 2 еселі; сондықтан $Q_1(x) = (x-1)(x+1)^2$, - 3-дәрежелі көпмүшелік, түбірлері -1 және 1, сәйкесінше 3-1=2, 2-1=1 еселі; ендеше $P_1(x)$ - 2-дәрежелі көпмүшелік;

$Q_2(x) = (x-1)(x+1)$,- 2-дәрежелі көпмүшелік; ендеше $P_2(x)$- 1-дәрежелі, яғни, сызықтық көпмүшелік;

интегралды мынадай түрде іздейміз:

$$= \frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x+1)^2} + \int \frac{mx+n}{(x-1)(x+1)} dx \qquad (2)$$

теңдіктің екі жағын да дифференциалдаймыз:

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} =$$

$$= \frac{(2ax+b)(x-1)(x+1)^2 - (ax^2+bx+c)\left((x+1)^2 + 2(x-1)(x+1)\right)}{(x-1)^2(x+1)^4} + + \frac{mx+n}{(x-1)(x+1)}$$

теңдіктің оң жағын ортақ бөлімге келтіреміз:

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} =$$

$$= \frac{(2ax+b)(x^2-1) - (ax^2+bx+c)(3x-1) + (mx+n)(x-1)(x+1)^2}{(x-1)^2(x+1)^3}$$

Бұл теңдіктен:

$$(2ax+b)(x^2-1) - (ax^2+bx+c)(3x-1) + (mx+n)(x^2-1)(x+1) = x$$

көпмүшеліктердің сәйкес дәрежелерінің коэффициенттерін теңестіреміз:

$$\left.\begin{array}{r|c} x^4 & m=0 \\ x^3 & 2a-3a+n=0 \\ x^2 & b+a-3b+n=0 \\ x & -2a+b-3c-n=1 \\ x^0 & -b+c-n=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ n=a \\ b=a \\ c=2a \\ a=-\dfrac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b=n=-\dfrac{1}{8} \\ c=-\dfrac{1}{4} \\ m=0 \end{cases}$$

Табылған коэффициенттерді (2) теңдікке қойып, кестелік интегралды табамыз:

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = -\frac{1}{8}\frac{x^2+x+2}{(x-1)(x+1)^2} - \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2-1} =$$

$$= -\frac{1}{8}\frac{x^2+x+2}{(x-1)(x+1)^2} + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$$

**Ескерту.** Егер интеграл астындағы функцияны жай бөлшектердің қосындысына жіктесек те, 5 коэффициентті анықтау керек еді:

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = \int \left( \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3} + \frac{m}{(x-1)^4} + \frac{n}{(x-1)^5} \right) dx, \text{ -}$$

Әр интегралды жеке тапқаннан кейін жауапта барлық бөлшекті ортақ бөлімге келтіріп, ықшамдау керек. Ал, М.В.Остроградский әдісімен бұл жұмыс орындалып тұрады.

*Мысал 2.* $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3} =$

Интеграл астындағы функция – 6-дәрежелі көпмүшелік; оның түбірлері – 3-дәрежелі комплекс түйіндес $\pm i$ сандары; сондықтан $Q_1(x) = \left(x^2+1\right)^2$, $Q_2(x) = \left(x^2+1\right)$; ендеше $P_1(x)$ - 3-дәрежелі, $P_2(x)$ - сызықтық көпмүшелік;

интегралды мынадай түрде іздейміз:

$$= \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{\left(x^2+1\right)^2} + \int \frac{mx+n}{x^2+1} dx \qquad (3)$$

теңдіктің екі жағын да дифференциалдаймыз:

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)^3} =$$

$$= \frac{\left(3ax^2 + 2bx + c\right)\left(x^2+1\right) - 2 \cdot 2x\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)}{\left(x^2+1\right)^3} + \frac{mx+n}{x^2+1}$$

теңдіктің оң жағын ортақ бөлімге келтіріп, алымдарды теңестіреміз:

$$\left(3ax^2 + 2bx + c\right)\left(x^2+1\right) - 4x\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) + (mx+n)\left(x^2+1\right)^2 = 1$$

$$\left.\begin{array}{c|c} x^5 & m = 0 \\ x^4 & 3a - 4a + n = 0 \\ x^3 & 2b - 4b + 2m = 0 \\ x^2 & 3a + c - 4c + 2n = 0 \\ x & 2b - 4d + m = 0 \\ x^0 & c + n = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{3}{8} \\ b = 0 \\ c = \frac{5}{8} \\ d = 0 \\ m = 0 \\ n = \frac{3}{8} \end{array}\right.$$

Табылған коэффициенттерді (2) теңдікке қойып, кестелік интегралды табамыз:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{3x^3 + 5x}{8\left(x^2+1\right)^2} + \frac{3}{8} \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x\left(3x^2+5\right)}{8\left(x^2+1\right)^2} + \frac{3}{8} arctgx + C.$$

## § 6. Квадраттық иррационалдықтарды интегралдау

$R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ түріндегі функцияны *квадраттық иррационалдық* деп атайды. Мұндағы $a, b$ және $c$ - тұрақты нақты сандар, $a \neq 0$. Әрі түбір астындағы квадрат үшмүшеліктің түбірлері бірдей емес деп ұйғарамыз, ал түбірлер бірдей болса, онда үшмүшелік түбірі рационалдық өрнек болар еді.

Жалпы жағдайда $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, $a \neq 0$, квадраттық иррационалдықты интегралдау *Эйлер алмастыруының*:

1) егер $a > 0$, онда $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a} \cdot x$
2) егер $c > 0$, онда $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$
3) егер $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, яғни, $ax^2+bx+c$ квадрат үшмүшеліктің $x_1$, $x_2$ нақты түбірлері бар болса, онда $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$

көмегімен жаңа $t$ айнымалыдан тәуелді рационал функцияны интегралдауға келтіріледі. Барлық үш жағдайда да теңдіктің екі жағын квадраттап, $x$-ті $t$ арқылы өрнектейміз; алынған өрнекті интеграл астындағы функцияға қойып, $t$ -дан тәуелді бөлшек рационал функция аламыз. Енді дербес жағдайларды қарастырайық.

### 1. $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ *түріндегі интегралдар*

$x = a\sin t,\ dx = a\cos t\,dt$ немесе $x = a\,\mathrm{th}\,t,\ dx = a\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 t}dt$ алмастыруларын жасау арқылы табылады.

*Мысал 1.* Интегралды табыңыз $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx.$

Бірінші алмастыруды пайдаланайық:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \left| \begin{matrix} x = 3\sin t, \\ dx = 3\cos t\,dt \end{matrix} \right| = 27\int \frac{\sin^2 t}{\sqrt{9(1-\sin^2 t)}}\cos t\,dt = 9\int \sin^2 t\,dt =$$

$$= 9\int \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,dt = \frac{9}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \left| t = \arcsin\frac{x}{3} \right| = \frac{9}{2}\left(\arcsin\frac{x}{3} - \frac{1}{9}x\sqrt{9-x^2}\right) + C.$$

### 2. $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ *түріндегі интегралдар*

$x = a\,\mathrm{tg}t,\; dx = a\dfrac{1}{\cos^2 t}dt$ немесе $x = a\,\mathrm{sh}\,t,\; dx = a\,\mathrm{ch}\,t\,dt$ алмастыруларын жасау арқылы табылады.

*Мысал 2.* Интегралды табыңыз $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$

Бірінші алмастыруды пайдаланайық:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \left| \begin{array}{l} x = 2\,\mathrm{tg}t, \\ dx = 2\dfrac{1}{\cos^2 t}dt \end{array} \right|. = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}dt}{\mathrm{tg}^2 t\sqrt{4(\mathrm{tg}^2 t+1)}} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{4}\int \frac{d\sin t}{\sin^2 t} =$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{\sin t} + C = \left| t = \mathrm{arctg}\frac{x}{2} \right| = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x} + C.$$

## 3. $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$ *түріндегі интегралдар*

$x = \dfrac{a}{\cos t},\; dx = a\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}dt$ немесе $x = a\,\mathrm{ch}\,t,\; dx = a\,\mathrm{sh}\,t\,dt$ алмастыруларын жасау арқылы табылады.

*Мысал 3.* Интегралды табыңыз $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx.$

Екінші алмастыруды пайдаланайық:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx = \left| \begin{array}{l} x = \mathrm{ch}\,t, \\ dx = \mathrm{sh}\,t\,dt \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{ch}^2 t}{\sqrt{\mathrm{ch}^2 t - 1}}\mathrm{sh}\,t\,dt = \int \frac{\mathrm{ch}^2 t}{\sqrt{\mathrm{ch}^2 t - 1}}\mathrm{sh}\,t\,dt = \int \mathrm{ch}^2 t\;dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int (1 + \mathrm{ch}\,2t)\;dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2\mathrm{t}\right) + C = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2\mathrm{t}\right) + C = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\mathrm{ch}\,\mathrm{t}\sqrt{\mathrm{ch}^2 t - 1}\right) + C = \mathbf{4.}$$

$$= \left| t = \mathrm{arch}\,x \right| = \frac{1}{2}\left(\mathrm{arch}\,x + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}\right) + C.$$

## 4. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$ *түріндегі интегралдар*

мұнда $a \neq 0$ және $\frac{b^2}{4a} - c \neq 0$ квадрат үшмүшелікте толық квадратты бөліп алу арқылы $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$ және $x + \frac{b}{2a} = t,\ dx = dt$ алмастыруын жасау арқылы табылады.

Алмастырудан кейін радикал $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{at^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)}$

түрінде болады және төмендегі жағдайлардың бірі орын алады:

а). $a > 0,\ c - \frac{b^2}{4a} > 0$. Егер $a = m^2,\ c - \frac{b^2}{4a} = n^2$ деп алсақ, берілген интеграл $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx = \int R\left(t, \sqrt{m^2t^2 + n^2}\right)dt$ түрге енеді.

б). $a > 0,\ c - \frac{b^2}{4a} < 0$. Егер $a = m^2,\ c - \frac{b^2}{4a} = -n^2$ деп алсақ, берілген интеграл $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx = \int R\left(t, \sqrt{m^2t^2 - n^2}\right)dt$ түрге енеді.

с). $a < 0,\ c - \frac{b^2}{4a} > 0$. Егер $a = -m^2,\ c - \frac{b^2}{4a} = n^2$ деп алсақ, берілген интеграл $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx = \int R\left(t, \sqrt{n^2 - m^2t^2}\right)dt$ түрге енеді.

Сондай-ақ $a < 0,\ c - \frac{b^2}{4a} < 0$ болуы мүмкін, бірақ, бұл жағдайда $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ -комплекс сан.

Сонымен, қолайлы алмастырулардың көмегімен $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$ интегралды жоғарыда қарастырылған ***1., 2.*** және ***3***. жағдайлардың біріне келтіреміз.

Кей жағдайларда квадраттық иррационалдық жеңіл интегралданады.

*Мысал 4.* Интегралды табыңыз $\int \frac{1 - 2x + x^2}{\sqrt{1 + x - x^2}}dx =$

Алымында түбір астындағыдай өрнекті бөліп аламыз да, интегралды екіге бөлеміз:

$$= \int \frac{(1 + x - x^2) - 2 + x}{\sqrt{1 + x - x^2}}dx = -\int \sqrt{1 + x - x^2}dx + \int \frac{2 - x}{\sqrt{1 + x - x^2}} =.$$

Түбір астындағы квадрат үшмүшеліктен толық квадратты бөліп аламыз және екінші интеграл астындағы функцияның алымынан $1-2x=\left(1+2x-x^2\right)'$ өрнегін бөліп аламыз да, оны дифференциал астына енгіземіз:

$$=\int\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,d\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\int\frac{(1-2x)+3}{\sqrt{1+x-x^2}}dx=\int\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,d\left(x-\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{d(1+2x-x^2)}{\sqrt{1+x-x^2}}+\frac{3}{2}\int\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\,d\left(x-\frac{1}{2}\right)=$$

Барлық интгералдар –кестелік;

$$=\frac{2x-1}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\frac{8}{5}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+\sqrt{1+x-x^2}+\frac{3}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C=$$

$$=\frac{5-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}+\frac{7}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.$$

*Мысал 5.* Интегралды табыңыз $\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

Бұл квадраттық иррационалдықта $a=-1<0,$ сондықтан, Эйлердің 1) - алмастыруы жарамсыз; $D=8$ болғандықтан 3) - алмастыру жасауға болады, бірақ, түбірлер-нақты, иррационал сандар; $c=1>0,$ 2) - алмастыру қолданайық. Ыңғайлылық үшін $\sqrt{c}$ «-» таңбасымен алынады.

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{1-2x-x^2}=tx-1\\ 1-2x-x^2=t^2x^2-2tx+1\\ x^2\left(t^2+1\right)=2x(t-1)\\ x=\dfrac{2(t-1)}{t^2+1}\\ dx=2\dfrac{t^2+1-2t(t-1)}{\left(t^2+1\right)^2}dt=2\dfrac{1+2t-t^2}{\left(t^2+1\right)^2}dt\end{array}\right|=$$

$$=2\int\frac{\left(t^2+1\right)\left(1+2t-t^2\right)}{t\cdot2(t-1)\left(t^2+1\right)^2}dt=\int\frac{1+2t-t^2}{t\cdot(t-1)\left(t^2+1\right)}dt=$$

Дұрыс рационал функцияның интегралын алдық; оны жай бөлшектердің қосындысына жіктейміз де, интегралды табамыз:

$$=\int\left(\frac{a}{t}+\frac{b}{t-1}+\frac{ct+d}{t^2+1}\right)dt=$$

$$a(t-1)(t^2+1)+bt(t^2+1)+(ct+d)t(t-1)=1+2t-t^2$$

егер $t=0,$ онда $-a=1,\Rightarrow a=-1;$

егер $t=1,$ онда $2b=2,\Rightarrow b=1;$

енді $c,d$ коэффициенттерінің мәндерін табу үшін тек $t^2$ және $t^3$-ң коэффициенттерін теңестірсек жеткілікті:

$$\left.\begin{array}{l|r} t^2 & a+b+c=0 \\ t^3 & -a-c+d=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases} c=0 \\ d=-2 \end{cases}$$

$$=\int\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}-\frac{2}{t^2+1}\right)dt=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|-2arctgt+C,$$

мұнда $t=\dfrac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x};$

*Мысал 6.* Интегралды табыңыз $\int x\sqrt{x^2-2x+2}dx=$

мұнда $ax^2+bx+c=x^2-2x+2 \quad a=1>0,\ \ c=2>0,\ \ D=-4<0;$

Эйлердің алғашқы екі алмастыруы жарамды; айталық, **1.** алмастыруын қолданайық:

$$=\left|\begin{array}{l} \sqrt{x^2-2x+2}=t-x \\ x^2-2x+2=t^2-2tx+x^2 \\ x=\dfrac{t^2-2}{2(t-1)} \\ dx=\dfrac{1}{2}\dfrac{2t(t-1)(t^2-2t+2)^2}{(t-1)^4}dt \end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{t^2-2}{2(t-1)}\left[t-\frac{t^2-2}{2(t-1)}\right]\frac{t^2-2t+2}{2(t-1)^2}dt=\frac{1}{8}\int\frac{(t^2-2)(t^2-2t+2)^2}{(t-1)^4}dt=$$

Алынған интеграл астындағы функция-бұрыс рационал бөлшек; алымын $(t-1)$-ң дәрежесі бойынша таратайық:

$$\begin{array}{r|l} & \underline{t=1} \\ f(t)=t^2-2 & -1 \\ f'(t)=2t & 2 \\ f''(t)=2 & 2 \end{array} \quad \Rightarrow t^2-2=-1+2(t-1)+\frac{2}{2!}(t-1)^2$$

ал, $t^2-2t+2=(t-1)^2+1$

жазудың қысқалығы үшін $(t-1)=z$ деп белгілейік:

$$=\frac{1}{8}\int\frac{(z^2+2z-1)(z^2+1)^2}{z^4}dz=\frac{1}{8}\int\frac{(z^2+2z-1)(z^4+2z^2+1)}{z^4}dz=$$

$$=\frac{1}{8}\int\left(z^2+2z+1+\frac{4}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z^3}-\frac{1}{z^4}\right)dz=\frac{1}{8}\left(\frac{z^3}{3}+z^2+z+4\ln|z|+\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3z^3}\right)+C=$$

кестелік интегралдарды алдық, бастапқы айнымалыға оралсақ:

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{(t-1)^3+(t-1)^{-3}}{3}+\left[(t-1)^2+(t-1)^{-2}\right]+\left[(t-1)+(t-1)^{-1}\right]\right)+\frac{1}{2}\ln|t-1|+C,$$

мұнда $t=x+\sqrt{x^2-2x+2}$.

Осы мысалдардан көргеніміздей, Эйлер алмастырулары арқылы интегралдау көлемді түрлендірулерге әкеледі. Кей жағдайларда Эйлер алмастыруларын пайдаланбаса да болады. $\dfrac{R(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ түріндегі квадрат иррационалдықты интегралдауды қарастырайық, мұнда $R(x)$-рационал бөлшек. Егер рационал бөлшек $R(x)=\dfrac{P_k(x)}{Q_m(x)}$-бұрыс болса, яғни, $k\geq m$, онда оның бүтін бөлігін бөліп алу арқылы дұрысқа келтіреміз де, дұрыс рационал бөлшекті жай бөлшектердің қосындысына жіктейміз. Нәтижесінде $\dfrac{R(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ функцияның интегралы келесі үш түрдегі интегралдарға келтіріледі:

**I,1.** $\displaystyle\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, мұнда $P_n(x)$ - $x$ бойынша көпмүшелік, $n\geq 1$.

**I,2.** $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-x_0)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\quad r\geq 1, \quad x_0\in\Re.$

**I,3.** $\displaystyle\int\frac{mx+n}{(x^2+px+q)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, $\quad r\geq 1, \quad D=\frac{p^2}{4}-q<0.$

Рационал функцияның бүтін бөлігін $\sqrt{ax^2+bx+c}$ түбірге бөлгенде **I,1.** интегралы; I және II типті жай рационал бөлшектерді осы түбірге бөлгенде **I,2.** ; III және IV типті жай рационал бөлшектерді $\sqrt{ax^2+bx+c}$ түбірге бөлгенде **I,3.** түрдегі интегралдар шығады.

Енді осы интегралдардың алғашқы функцияларын табу әдістерін қарастырайық.

**I,1.** $$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (1)$$

-бірінші түрдегі квадрат иррационалдықтың интегралы - екі қосылғыштан тұрады: біріншісі - $\sqrt{ax^2+bx+c}$ түбір мен берілген көпмүшеліктен дәрежесі 1-ге кем $Q_{n-1}(x)$ көпмүшелігінің көбейтіндісі; екінші қосылғыш- $\lambda$ сандық коэффициентімен берілген кестелік интегралға келтірілетін $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ интегралы. $\lambda$ сандық коэффициентін және $Q_{n-1}(x)$ көпмүшелігін табу үшін бұл көпмүшелікті $Q_{n-1}(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{n-1}x^{n-1}$ түрінде жазып, (1) теңдігінің екі жағын дифференциалдап, $x$-тің бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін теңестіреміз.

*Мысал 7.* Интегралды табыңыз $\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx=$

Интеграл сатындағы функцияның алымы - $n=3$ дәрежелі көпмүшелік, сондықтан (1) формулаға сәйкес жазсақ:

$$=\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{1+2x-x^2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}= \qquad (2)$$

алынған теңдіктің екі жағын да дифференциалдаймыз:

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}=(2ax+b)\sqrt{1+2x-x^2}+\left(ax^2+bx+c\right)\frac{1-x}{\sqrt{1+2x-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

теңдіктің оң жағын ортақ бөлімге келтіреміз:

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}=\frac{(2ax+b)\left(1+2x-x^2\right)+\left(ax^2+bx+c\right)(1-x)+\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

бөлшектердің алымдарын теңестіріп, $x$-тің бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін салыстырсақ, төмендегі жүйені аламыз:

$$x^3 = (2ax+b)(1+2x-x^2)+(ax^2+bx+c)(1-x)+\lambda$$

$$\begin{array}{l|c} x^3 & -2a-a=1 \\ x^2 & 4a-b+a-b=0 \\ x & 2a+2b+b-c=0 \\ x^0 & b+c-\lambda=0 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{3} \\ b=-\dfrac{5}{6} \\ c=-\dfrac{19}{6} \\ \lambda=4 \end{cases}$$

Коэффициенттердің табылған мәндерін (2) теңдікке қойып, интегралды тапсақ:

$$=\left(-\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x-\frac{19}{6}\right)\sqrt{1+2x-x^2}+4\int\frac{d(1-x)}{\sqrt{2-(1-x)^2}}=$$

$$=-\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2}-4\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}}+C.$$

**Ескерту.** Интегралдаудың бұл әдісі $n=1;2$ үшін тиімсіз, бұл жағдайларда 4-мысалдағыдай қарастырған жөн. $n\geq 3$ болса, Эйлер алмастыруын пайдаланғаннан гөрі, осы әдіс жеңіл.

**I,2.** $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-x_0)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad r\geq 1, \quad x_0\in\Re.$

Бұл түрдегі интегралдар $\dfrac{1}{x-x_0}=t$ алмастыруын жасау арқылы **I,1.**-ге келтіріледі.

*Мысал 8.* Интегралды табыңыз $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}=$

Мұнда интеграл астындағы функция – II типті $\dfrac{1}{x^3}$ жай бөлшектің $\sqrt{x^2+1}$-ге қатынасы; көрсетілген алмастыруды жасаймыз:

$$= \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{x} = t \\ x = \dfrac{1}{t} \\ dx = -\dfrac{1}{t^2}\,dt \end{array} \right| = -\int \frac{t\,dt}{\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+1}} = -\operatorname{sgn} t \cdot \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

алымын $t^2 = (t^2+1) - 1$ түрінде жазып, екі интегралдың қосындысына жіктейміз:

$$= -\operatorname{sgn} t \cdot \int \left( \sqrt{1+t^2} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right) dt = -\left( \frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right| - \ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| \right) \operatorname{sgn} t + C =$$

енді $t$ -ң орнына оның $x$ арқылы өрнектелуін қойсақ:

$$= -\left( \frac{1}{2x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right| \right) \operatorname{sgn}\frac{1}{x} + C = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x|x|\operatorname{sgn} x} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn} x \cdot \ln \frac{\operatorname{sgn} x + \sqrt{x^2+1}}{|x|} + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|} + C.$$

Біз мұнда

$$\operatorname{sgn} x \cdot \ln \frac{\operatorname{sgn} x + \sqrt{x^2+1}}{|x|} = \begin{cases} \ln \dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}, \quad \text{егер} \quad x > 0 \\ -\ln\dfrac{-1+\sqrt{x^2+1}}{-x} = \ln\dfrac{x}{1-\sqrt{x^2+1}} = \ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{-x} \quad \text{егер} \quad x < 0 \end{cases}$$

ескердік.

Енді

**I,3.** $\displaystyle\int \frac{mx+n}{(x^2+px+q)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, мұнда $a \neq 0,\quad r \geq 1,\quad D = \dfrac{p^2}{4} - q < 0$

түріндегі интегралды қарастырамыз.

Интеграл астындағы квадрат үшмүшеліктің коэффициенттерінің таңбасына қарай төмендегідей үш жағдайды қарастырады:

**I,3,a.** $p = b = 0$, яғни, интеграл астындағы үшмүшелікте айнымалы $x$-тің бір дәрежесі жоқ:

$$\int \frac{mx+n}{\left(x^2+q\right)^r \sqrt{ax^2+c}} dx =$$

Бұл интегралды екі интегралдың қосындысы түрінде жазамыз:

$$= \frac{m}{2} \int \frac{2xdx}{\left(x^2+q\right)^r \sqrt{ax^2+c}} + n \int \frac{dx}{\left(x^2+q\right)^r \sqrt{ax^2+c}} =$$

Бірінші қосылғышта $2x$-ті дифференциал астына енгіземіз, екінші қосылғышта бөліміндегі әр көбейткіштен $x^2$-ты жақшаның сыртына шығарамыз:

$$= \frac{m}{2} \int \frac{d\left(x^2\right)}{\left(x^2+q\right)^r \sqrt{ax^2+c}} + \frac{n}{\operatorname{sgn} x} \int \frac{dx}{x^{2r+1}\left(1+\frac{q}{x^2}\right)^r \sqrt{a+\frac{c}{x^2}}} =$$

Енді бірінші қосылғыш $x^2 = z$ байланысты бөлшек-сызықты иррационалдық болғандықтан, $\sqrt{ax^2+c} = t$ алмастыруын жасап, рационал бөлшектің интегралына келтіреміз;

Екінші интегралда $\frac{1}{x^3}$ көбейткішін дифференциал астына енгізу $\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2} d\left(\frac{1}{x^2}\right)$ арқылы бөлшек-сызықты интегралға келтіреміз;

ол интегралды рационал функцияның интегралына келтіру үшін $\sqrt{a+\frac{c}{x^2}} = z$ алмастыруын жасау керек.

*Мысал 9.* **1957.** $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1-x^2}} dx =$

$x \in (-1;1)$; бұл біз қарастырған **I,3,a.** жағдай, $m = 0,\quad n = 1;$ бөліміндегі әр көбейткіштен $0 \neq x^2$-ты жақшаның сыртына шығарамыз:

$$= \frac{1}{\operatorname{sgn} x} \int \frac{dx}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^r \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} =$$

$\frac{1}{x^3}$ көбейткішін дифференциал астына енгізсек, айнымалыға байланысты бөлшек-сызықты иррационалдық аламыз да, сәйкес алмастыру жасаймыз:

$$=\left|\begin{array}{l}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}=t \quad \Rightarrow \frac{1}{x^2}=t^2+1 \\ d\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{2}{x^3}dx=2tdt, \quad \frac{dx}{x^3}=-tdt\end{array}\right|=-\frac{1}{\operatorname{sgn} x}\int\frac{tdt}{(t^2+2)t}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{sgn} x}arcctg\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{sgn} x}arctg\frac{\sqrt{2}}{t}+C=$$

енді $t$ -ң орнына оның $x$ арқылы өрнектелуін $t=\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}$ қойсақ:

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{sgn} x}arctg\frac{\sqrt{2}|x|}{\sqrt{1-x^2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}+C,$$

$x=0$ алғашқы бейненің анықталу облысына енетінін ескердік.

**I,3,б.** $\frac{1}{p}=\frac{a}{b}$,яғни, интеграл астындағы үшмүшелікте $x$ пен $x^2$-ң коэффициенттері пропорционал; олардан толық квадратты бөліп аламыз да, $x+\frac{p}{2}=y$ деп белгілесек, алдыңғы **I,3,а.** жағдайға келеді.

*Мысал 10.* ***1962.*** $\int\frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}=$

Мұнда $x^2+px+q=4-2x+x^2, \quad p=-2;$

$$ax^2+bx+c=-x^2+2x+2, \quad a=-1; \quad b=2;$$

$$\frac{1}{p}=\frac{a}{b}=-\frac{1}{2}, \qquad x+\frac{p}{2}=x-1,$$

$x-1=y$ деп белгілейміз:

$$=\int\frac{(y+1)^2dy}{(3+y^2)\sqrt{3-y^2}}=\int\frac{(y^2+3)+2y-2}{(3+y^2)\sqrt{3-y^2}}dy=$$

$$=\int\frac{dy}{\sqrt{3-y^2}}+\int\frac{2y}{(3+y^2)\sqrt{3-y^2}}dy-2\int\frac{dy}{(3+y^2)\sqrt{3-y^2}}=I_1+I_2-2I_3$$

алынған интегралдарды осылай таңбалап, әрқайсысын жеке табамыз:

$$I_1=\int\frac{dy}{\sqrt{3-y^2}}=\arcsin\frac{y}{\sqrt{3}}+C_1=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C_1;$$

$$I_2=\int\frac{2y}{\left(3+y^2\right)\sqrt{3-y^2}}dy=\int\frac{d\left(y^2\right)}{\left(3+y^2\right)\sqrt{3-y^2}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\sqrt{3-y^2}=t\\ 3-t^2=y^2\\ d\left(y^2\right)=-2tdt\end{array}\right|=\int\frac{-2tdt}{\left(6-t^2\right)t}=-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+t}{\sqrt{6}-t}\right|+C_2=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}\right|+C_2;$$

$$I_3=\int\frac{dy}{\left(3+y^2\right)\sqrt{3-y^2}}=\frac{1}{\operatorname{sgn} y}\int\frac{dy}{y^3\left(\frac{3}{y^2}+1\right)\sqrt{\frac{3}{y^2}-1}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\sqrt{\frac{3}{y^2}-1}=t\\ \frac{3}{y^2}=t^2+1\\ -\frac{6}{y^3}dy=2tdt\\ \frac{dy}{y^3}=-\frac{t}{3}dt\end{array}\right|=\frac{-1}{3\operatorname{sgn} y}\int\frac{tdt}{\left(t^2+2\right)t}=$$

$$=\frac{-1}{3\operatorname{sgn} y}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+C_3=\frac{-1}{3\sqrt{2}\operatorname{sgn} y}\cdot arctg\frac{\sqrt{3-y^2}}{|y|\sqrt{2}}+C_3=$$

$$=\frac{-1}{3\sqrt{2}}\cdot arctg\frac{\sqrt{2+2x-x^2}}{(x-1)\sqrt{2}}+C_3.$$

**I,3,в.** Интеграл астындағы үшмүшеліктің коэффициенттері алдыңғы **I,3,а.**, **I,3,б.** жағдайлардың шарттарын қанағаттандырмайды. Бұл түрдегі квадрат иррационалдықтың интегралдары бөлшек-сызықты $x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$ алмастыруын жасау арқылы **I,3,а.** жағдайдағы интегралға келтіріледі. Мұнда $\alpha$, $\beta$

коэффициенттерін алынған екінші дәрежелі көпмүшелікте $t$-ң (бірінші дәреженің) коэффициентін нөлге теңестіру арқылы табады.

*Мысал 11.* $\int \frac{dx}{\left(x^2+2\right)\sqrt{2x^2-2x+5}}dx =$

$$x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t} \quad \Rightarrow x^2+2=\left(\frac{\alpha+\beta t}{1+t}\right)^2+2=\frac{\alpha^2+2+\left(2\alpha\beta+4\right)t+\left(\beta^2+2\right)t^2}{\left(1+t\right)^2}, \qquad (1)$$

$$2x^2-2x+5=\frac{2\left(\alpha+\beta t\right)^2}{\left(t+1\right)^2}-2\frac{\left(\alpha+\beta t\right)}{t+1}+5=$$

$$=\frac{2\alpha^2-2\beta+5+\left(4\alpha\beta-2\alpha-2\beta+10\right)t+\left(2\beta^2-2\beta+5\right)t^2}{\left(1+t\right)^2} \qquad (2)$$

(1) және (2) теңдіктердің алымындағы екінші дәрежелі көпмүшеліктерде $t$-ң (бірінші дәреженің) коэффициентін нөлге теңестіру арқылы $\alpha$, $\beta$ коэффициенттерін табамыз:

$$\begin{cases} 2\alpha\beta+4=0 \\ 4\alpha\beta-2\alpha-2\beta+10=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\beta=-2 \\ \alpha+\beta=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=2, \end{cases}$$

ендеше, $x=\frac{2t-1}{t+1}$ алмастыруын жасаймыз:

$$=\left| \begin{array}{ll} x=\frac{2t-1}{t+1} \quad \Rightarrow (1),(2)\text{ - ден}: & x^2+2=\frac{6t^2+3}{\left(t+1\right)^2}, \\ & 2x^2-2x+5=\frac{9\left(t^2+1\right)}{\left(t+1\right)^2} \\ dx=\frac{2\left(t+1\right)-\left(2t-1\right)}{\left(t+1\right)^2}dt=\frac{3dt}{\left(t+1\right)^2} & \end{array} \right| =$$

$$=3\int\frac{\left(t+1\right)^2\left|t+1\right|}{\left(t+1\right)^2 3\left(2t^2+1\right)3\sqrt{t^2+1}}dt=\frac{1}{3}\operatorname{sgn}\left(t+1\right)\int\frac{t+1}{\left(2t^2+1\right)\sqrt{t^2+1}}dt=$$

**I,3,а.** пунктте қарастырылған квадрат иррационалдыққа келтірдік; оны екі интегралдың қосындысы түрінде жазамыз да, әрқайсысын жеке табамыз:

$$=\frac{1}{3}\operatorname{sgn}(t+1)\int\frac{t}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}dt+\frac{1}{3}\operatorname{sgn}(t+1)\int\frac{dt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{3}\operatorname{sgn}(t+1)(I_1+I_2);$$

$$I_1=\int\frac{t}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}dt=\left|\begin{array}{l}\sqrt{t^2+1}=u\\ t=\sqrt{u^2-1}\\ du=\dfrac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}\end{array}\right|=\int\frac{du}{2(u^2-1)+1}=\int\frac{du}{2u^2-1}=$$

$$=\int\frac{du}{2u^2-1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(u\sqrt{2})}{1-2u^2}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+u\sqrt{2}}{1-u\sqrt{2}}\right|+C_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-u\sqrt{2}}{1+u\sqrt{2}}\right|+C_1=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-\sqrt{2(t^2+1)}}{1+\sqrt{2(t^2+1)}}\right|+C_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(t^2+1)}-1}{\sqrt{2(t^2+1)}+1}+C_1;$$

$$I_2=\int\frac{dt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{\operatorname{sgn}t}\int\frac{dt}{t^3\left(2+\dfrac{1}{t^2}\right)\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}=z\\ \dfrac{1}{t^2}=z^2-1\\ -\dfrac{2dt}{t^3}=2zdz\\ \dfrac{dt}{t^3}=-zdz\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{\operatorname{sgn}t}\int\frac{z}{(z^2+1)z}dz=-\frac{1}{\operatorname{sgn}t}arctgz+C_2=-\frac{1}{\operatorname{sgn}t}arctg\frac{\sqrt{t^2+1}}{|t|}+C_2=-arctg\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}+C_2.$$

Енді жауапты берілген айнымалы арқылы жазу үшін келесі өрнектерді $x$ арқылы өрнектейік:

$$x=\frac{2t-1}{t+1}=2-\frac{3}{t+1}\quad\Rightarrow\quad t+1=\frac{3}{2-x},\quad t=\frac{3}{2-x}-1=\frac{x+1}{2-x},$$

$$t^2+1=\left(\frac{x+1}{2-x}\right)^2+1=\frac{2x^2-2x+5}{(2-x)^2}.$$

Сондықтан жауап былай болады:

$$\frac{1}{3}\operatorname{sgn}(t+1)I_1=\frac{1}{6\sqrt{2}}\operatorname{sgn}(2-x)\ln\left|\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-|2-x|}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+|2-x|}\right|+C_1=$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(2-x)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(2-x)}+C_1,$$

$$\frac{1}{3}\operatorname{sgn}(t+1)I_2=-\frac{1}{3}\operatorname{sgn}(2-x)arctg\left|\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}(2-x)}{|2-x|(x+1)}\right|+C_2=$$

$$=-\frac{1}{3}arctg\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{(x+1)}+C_2,$$

$$\frac{1}{3}\operatorname{sgn}(t+1)(I_1+I_2)=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(2-x)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(2-x)}-\frac{1}{3}arctg\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{(x+1)}+C;$$

Біз мұнда

$$\operatorname{sgn} v\cdot\ln\frac{w+|v|}{w-|v|}=\begin{cases}\ln\dfrac{w+v}{w-v} \quad егер \quad v\ge 0\\ -\ln\dfrac{w-v}{w+v}=\ln\dfrac{w+v}{w-v} \quad егер \quad v<0\end{cases}=\ln\frac{w+v}{w-v}\quad \forall v\in(-\infty;+\infty)$$

ескердік.