№8-дәріс. Анықталмаған интеграл. Алғашқы функция. Анықталмаған интеграл

Анықтама. Егер $x \in (a,b)$ аралығында берілген $f(x)$ функциясы үшін $F'(x) = f(x)$ теңдігі орындалса, онда $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының (a,b)аралығындағы ***алғашқы функциясы*** деп аталады. Басқаша айтқанда, берілген функцияның алғашқы функциясын табу – оның туындысын табуға кері есеп болып саналады.

$C-$кез келген тұрақты шама (константа), яғни кез келген сан болсын. Егер $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы $F(x)$ болса, онда $F(x)+C$ функциясы да оның алғашқы функциясы болады, себебі $[F(x)+C]' = [F(x)]' = f(x)$. $F(x)+C$ функциясы $f(x)$ функциясының барлық алғашқы функцияларын анықтайды.

Анықтама. Егер $F'(x) = f(x)$ болса, онда $F(x)+C$ функциясын $f(x)$ функциясының анықталмаған интегралы дейді және ол $\int f(x)dx$ символымен белгіленеді.

Сонымен, $\int f(x)dx = F(x)+C$ мұндағы $\int-$интеграл белгісі, dx- x айнымалысының дифференциалы, $f(x)dx$ -интеграл астындағы өрнек. Берілген функцияның анықталмаған интегралын табу жолын осы функцияны интегралдау дейді.

Анықталмаған интегралдардың қасиеттері

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
3. $\int k f(x)dx = k\int f(x)dx$, мұндағы $k-$кез келген сан.
4. $\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
5. $\int dF(x) = F(x) + C$, мұндағы C - кез келген сан.

Практикада интегралдау үшін келесі интегралдар кестесін жатқа білген жөн.

Анықталмаған интегралдардың негізгі кестесі

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \ \ (n \neq -1).$
2. $\int \dfrac{dx}{x} = ln|x| + C.$
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{ln\, a} + C \ \ (a > 0, a \neq 1).$

   Дербес жағдайда, $\int e^x dx = e^x + C.$
4. $\int sin\, x dx = -cos\, x + C.$
5. $\int cos\, x dx = sin\, x + C.$
6. $\int \dfrac{dx}{cos^2 x} = tgx + C.$
7. $\int \dfrac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C.$
8. $\int tgx dx = -ln|cos\, x| + C.$
9. $\int ctgx dx = ln|sin\, x| + C.$
10. $\int \dfrac{dx}{sin\, x} = ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right| + C.$
11. $\int \dfrac{dx}{cos\, x} = ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C.$
12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + C \ \ (a > 0).$
13. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} ln\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right| + C \ \ (a > 0).$
14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$ $(a > 0).$
15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\dfrac{x}{a} + C \ \ (a > 0).$
16. $\int shx dx = chx + C.$
17. $\int chx dx = shx + C.$
18. $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = thx + C.$
19. $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C.$

Кестедегі кез келген интегралды тексеру үшін теңдіктің оң жағынан туынды алу керек.
Интегралдаудың негізгі әдістері
1. Анықталмаған интегралда айнымалыларды алмастыру. Айнымалыны алмастыру әдісі мына формулаға негізделген

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (12.1)$$

Мұндағы $x = \varphi(t)$ - берілген аралықта дифференциалданатын функция. Тиімді табылған айнымалыны алмастыру формуласы берілген интегралды жеңіл интегралдайтын интегралға, ал кейбір жағдайларда таблицалық интегралға келтіреді.

1- мысал. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+1}$ интегралын табу керек.

Ол үшін $2x+1=t^2$ алмастыруын жасаймыз. Сонда $x = \frac{t^2-1}{2}$ болады.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+1} = \left| x = \frac{t^2-1}{2}, \quad dx = \left(\frac{t^2-1}{2}\right)' dt = tdt \right| = \int \frac{tdt}{t+1} =$$

$$= \int \frac{(t+1)-1}{t+1}dt = \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = t - ln|t+1| + C = \left|t = \sqrt{2x+1}\right| = \sqrt{2x+1} - ln\left|\sqrt{2x+1}+1\right| + C .$$

Мұнда интегралдаудың соңында бастапқы x - айнымалысына көшу керек.

2. Дифференциал астына енгізу әдісі. Бұл әдіс айнымалыны ауыстыру сияқты жиі қолданылады. Интеграл астындағы функцияның көбейткіштерінің біреуін d белгісінің астына жазамыз да, оны жаңа айнымалы ретінде қарастырамыз. Еске сала кетейік, $u'(x)$ функциясын dx таңбасының астына жазғанда d таңбасынан кейін функцияның алғашқы функциясы жазылады, яғни $u'(x)dx = du(x)$.

Салдар. Айталық $y = f(u)$ үзіліссіз және $u = u(x)$ үзіліссіз дифференциалданатын функциялар болсын, онда

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du \qquad (12.2)$$

2-мысал. $\int \frac{ln\,x}{x}dx = \int (ln\,x)\frac{1}{x}dx = \int lnxd\,ln\,x = |ln\,x = u| = \int udu = \frac{u^2}{2} + C = \frac{ln^2 x}{2} + C .$ Бұл формулада d таңбасының астына $\frac{1}{x}$ функциясын енгізіп $ln\,x$ деп жаздық. Модуль таңбасын қолданбаса да болады, себебі интеграл астындағы функция тек $x > 0$ болғанда анықталады. Дифференциал таңбасы астында кез келген функцияның алғашқы функциясына тұрақтыны қосып пайдалануға болады.

3- мысал.

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx^2 = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \left|x^2+1 = u\right| = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}ln|u| + C = \frac{1}{2}ln(x^2+1) + C .$$

3. Бөліктеп интегралдау әдісі. Айталық, $u = u(x), v = v(x)$ -дифференциалданатын функциялар болсын. Онда $d(u \cdot v) = udv + vdu$ теңдігі орындалады. Немесе $udv = d(u \cdot v) - vdu$. Осы теңдіктің екі жағынан интеграл алайық, сонда $\int udv = \int d(u \cdot v) - \int vdu$. Осыдан

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (12.3)$$

формуласын аламыз. (12.3) формуласын ***бөліктеп интегралдау формуласы*** дейді. Кейбір жағдайда бөліктеп интегралдау формуласын қолдану арқылы берілген интегралды алғашқыға қарағанда анағұрлым жеңіл алынатын интегралға келтіруге болады.

4- мысал. $\int arctgx dx = \left| \begin{array}{l} arctgx = u\ , \\ du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx, v = x \end{array} \right| = xarctgx - \int \dfrac{x}{1+x^2}dx = xarctgx - \dfrac{1}{2}ln(x^2+1) + C$

5 - мысал. $\int x\cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx, \\ \cos x dx = dv, v = \sin x \end{array} \right| = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$.

Әдебиеттер: 1 нег.[357-374], 11 қос. [458-467].

Бақылау сұрақтар:

1. Алғашқы функцияның анықтамасын беріңіз.
2. Анықталмаған интегралдың анықтамасын беріңіз.
3. Анықталмаған интерал кестесі.
4. Анықталмаған интегралда айнымалыны алмастыру.
5. Бөліктеп интегралдау формуласын жазыңыз.