

Дәріс 6

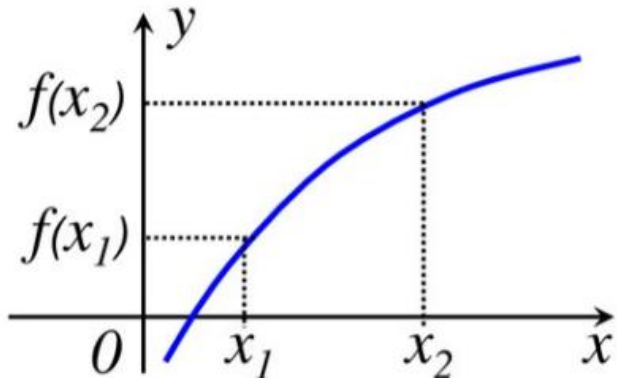
Функцияны туынды көмегімен толық зерттеу

Тлеулесова А.М.

Өсу және кему аралықтары

АНЫҚТАМА

Егер $[a, b]$ аралығында кез келген $x_1 < x_2$ үшін $f(x_1) < f(x_2)$ болса, функция өседі. Егер $f(x_1) > f(x_2)$ болса, кемиді.



Егер дифференциалданатын $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде экстремумы бар болса, онда сол нүктеде $f'(x_0) = 0$ болады.

Туындысы нөлге айналатын немесе болмайтын нүктелерді "күдікті" немесе "кризистік" нүктелер деп атайды. Экстремумды осы нүктелерден іздеу керек.

Теорема

Егер (a, b) аралығында дифференциалданатын $f(x)$ функциясының туындысы оң (теріс) болса, онда ол осы аралықта өседі (кемиді).

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ функциясының өсу және кему аралықтарын табайық.

Туындысы: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

Түбірлері: $x_1 = 0, x_2 = 2$.

- $(-\infty, 0)$ және $(2, +\infty)$ аралықтарында $f'(x) > 0$, демек функция өседі.
- $(0, 2)$ аралығында $f'(x) < 0$, демек функция кемиді.

Максимум

Егер x_0 нүктесінен өткенде $f'(x)$ таңбасы "плюс"-тен "минус"-ке өзгерсе, онда x_0 – максимум нүктесі.

$$f''(x_0) < 0$$

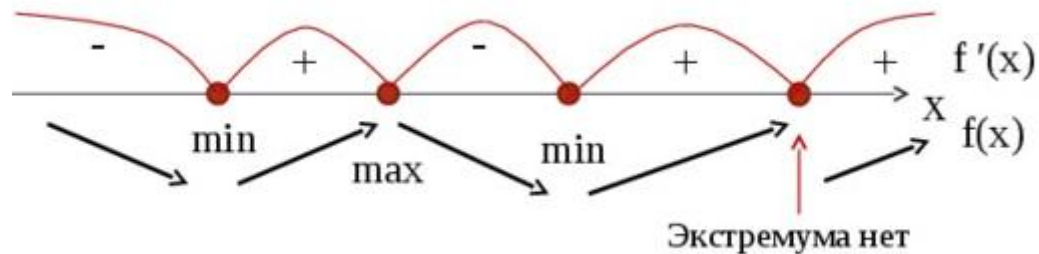
x_0 – максимум нүктесі.

Минимум

Егер x_0 нүктесінен өткенде $f'(x)$ таңбасы "минус"-тен "плюс"-ке өзгерсе, онда x_0 – минимум нүктесі.

$$f''(x_0) > 0$$

x_0 – минимум нүктесі.

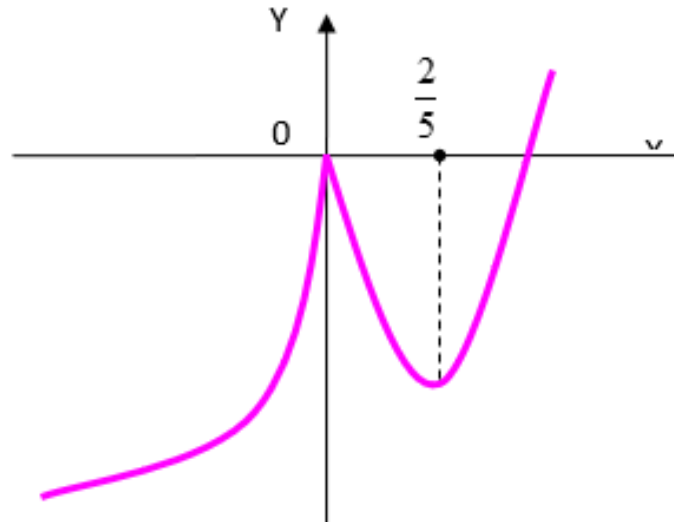


$$y = (x-1)x^{2/3}$$

$$f'(x) = \frac{5x-2}{3x^{1/3}}$$

$$x_1 = \frac{2}{5}$$

$$x_2 = 0$$

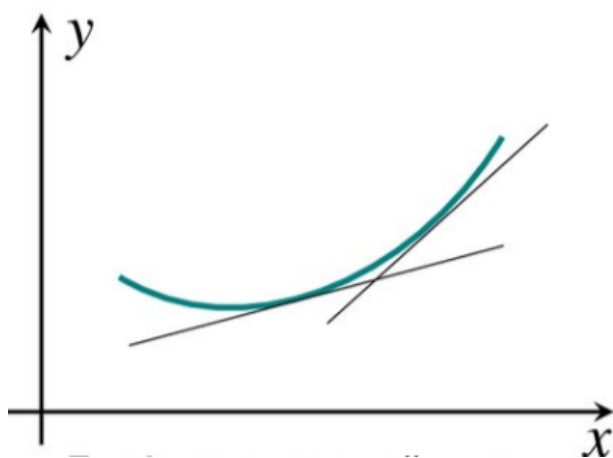


x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5}, +\infty)$
$f'(x)$	+	Туындысы жоқ	-	0	+
$f(x)$		0 max		$-\frac{3}{5}(\frac{2}{5})^{\frac{3}{2}}$ min	

Графиктің Дөңестігі, Ойыстығы және Иілу Нүктелері

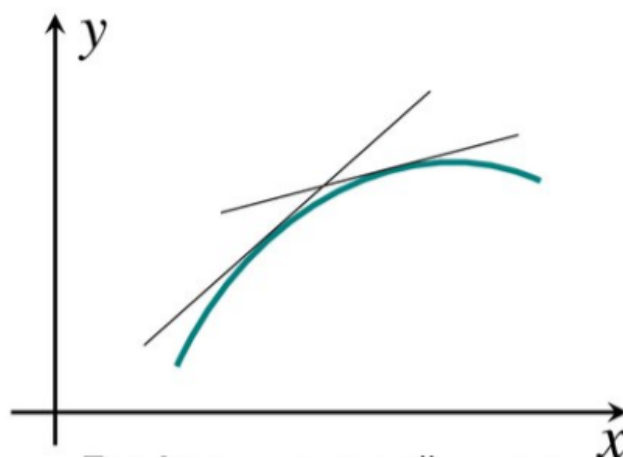
Ойыс (Concave Up)

Егер $f''(x) > 0$ болса, график ойыс болады.



Дөңес (Concave Down)

Егер $f''(x) < 0$ болса, график дөңес болады.

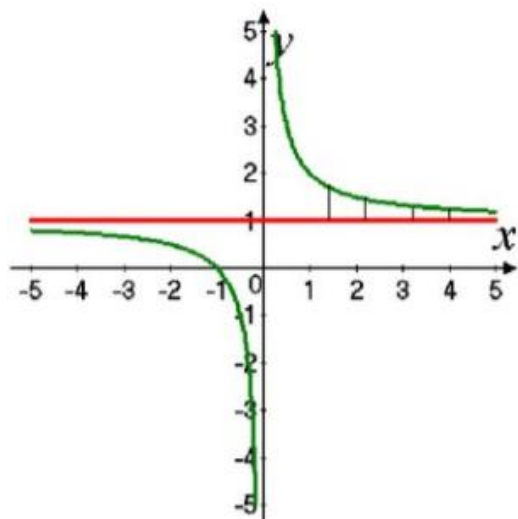


Иілу Нүктесі

Егер $f''(x_0) = 0$ болса және x_0 нүктесінен өткенде $f''(x)$ таңбасын өзгертсе, онда x_0 – иілу нүктесі.

Функция графигінің асимптоталары

Анықтама. Егер қисықтың $M(x, y)$ нүктесі шексіздікке ұмтылғанда $M(x, y)$ нүктесінен түзуге дейінгі қашықтық нөлге ұмтылса, онда мұндай түзуді қисықтың асимптотасы дейді.

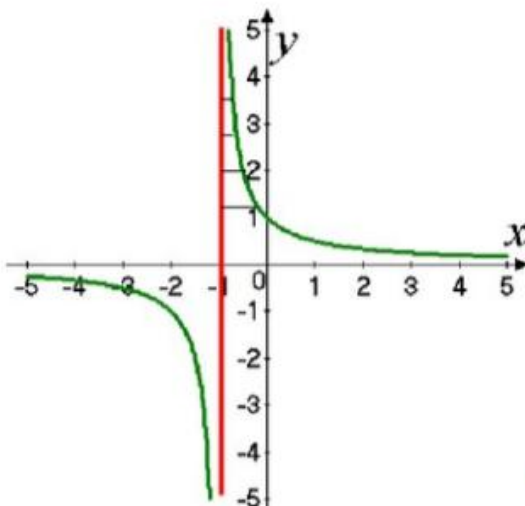


горизонталь

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$$

$$y = a$$

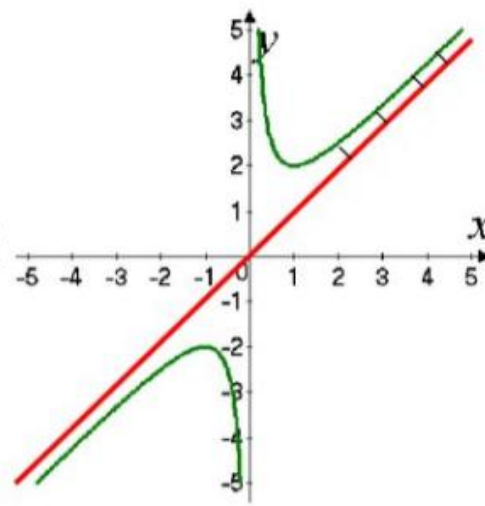


вертикаль

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty$$

$$x = x_0$$



көлбеу

$$k = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} (f(x) - kx)$$

$$y = kx + b$$

Функцияны зерттеудің жалпы сұлбасы (схемасы) және оның графигін салу

1. Функцияның анықталу облысын табу.
2. Функцияның графигінің координаттар өстерімен қиылысу нүктелерін табу және функцияның жұптығын анықтау.
3. Асимптоталарын табу. Функцияның ақырсыздықтағы жағдайын зерттеу.
4. Функцияның төңіректік экстремумын және монотондық интервалын табу.
5. Функцияның графигінің дөңестік интервалдарын және иілу нүктелерін табу.
6. Функцияның графигін сызу.

Функцияны зерттеп, графигін тұрғыз.

$$y = -\frac{x^2 + 289}{x}$$

$$y = -\frac{x^2}{x} - \frac{289}{x}$$
$$y = -x - 289 \cdot \frac{1}{x}$$

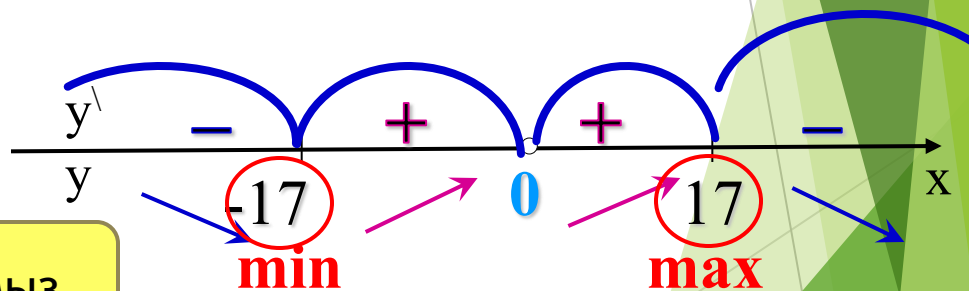
1. $D(y) : x \neq 0$

2. Функция -тақ, ендеше
графигі О-коор.басына
қар/да симм.

3. $y' = -1 - 289 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -1 + \frac{289}{x^2} = \frac{-x^2 + 289}{x^2} =$

$$= \frac{289 - x^2}{x^2} = \frac{(17 - x)(17 + x)}{x^2}$$

4. Функцияның асимптотасын табамыз.





4. Функцияның асимптоталарын табамыз.

а) Вертикаль асимптота: $x=0$ түзуі (Оу өсі), себебі:

$$\lim_{x \rightarrow -0} \left(-\frac{x^2 + 289}{x} \right) = -\frac{289}{-0} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \left(-\frac{x^2 + 289}{x} \right) = -\frac{289}{+0} = -\infty$$

б) Көлбеу асимптота: $y=kx+b$ түзуі, мұндағы k, b сандары келесі формулалардан табылады:

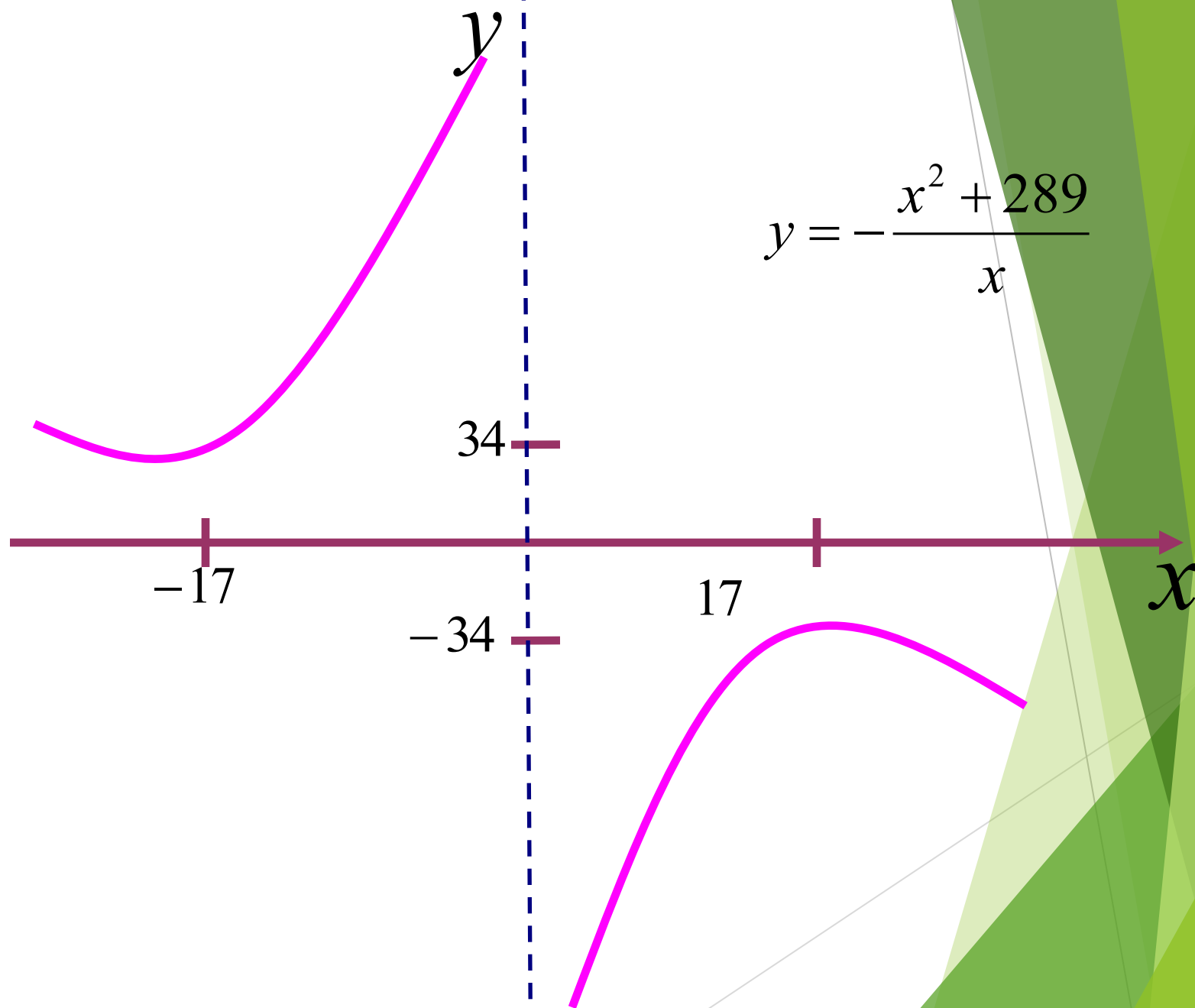
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{x^2 + 289}{x} \right) = \infty,$$

∞ , ендеше көлбеу асимптотасы жоқ.

5. Зерттеулер негізінде кесте құрамыз:

x	$(-\infty; -17)$	-17	$(-17; 0)$	0	$(0; 17)$	17	$(0; +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	-	+	0	-
$f(x)$		34		-		-34	
extr		min		-		max	





Бекіту сұрақтары

- ▶ Функцияның экстремум нүктелерінің анықтамасын келтіріңіз.
- ▶ Функцияның экстремумын бірінші туынды арқылы табу.
- ▶ Функцияның экстремумын екінші туынды арқылы табу
- ▶ Иілу нүктесін табу.
- ▶ Функцияның графигінің асимптотасын табу.