

Шәкір Айдос 

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

Көмекші нәтижелер

1 Функционалдық кеңістіктер

Пәнді жүргізу барысында нәтижелерді тұжырымдау үшін келесі функционалдық кеңістіктер қолданылады.

Айталық, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ шенелген облыс болсын. Ең алдымен $L^p(\Omega)$ Лебег кеңістігі деп p дәрежесімен интегралданатын өлшемді функциялар кеңістігін атайды, яғни $u(x) \in L^p(\Omega)$ функциясы

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < +\infty$$

шартын қанағаттандырады, мұндағы $p \geq 1$. Сонымен қатар, $L^p(\Omega)$ Лебег кеңістігі төменде енгізілген

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{немесе} \quad \|u\|_{p,\Omega} := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

норма бойынша Банах кеңістігін құрайды.

Сондай-ақ, $H(\Omega)$ Гильберт кеңістігі деп скаляр көбейтінді анықтауға болатын ақырсыз өлшемді Евклид кеңістігін атайды. Гильберт кеңістігінің қарапайым мысалы ретінде $p = 2$ жағдайда $L^2(\Omega)$ Лебег кеңістігін айтуға болады. Бұл $L^2(\Omega)$ кеңістігінде норма және скаляр көбейтінді, сәйкесінше,

$$\forall f \in L^2(\Omega), \quad \|f\|_{2,\Omega} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\forall u, v \in L^2(\Omega), \quad (u, v)_{2,\Omega} := \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

өрнектерімен анықталады.

Ал $W^{k,p}(\Omega)$ Соболев кеңістігі деп k -ретті жалпылама туындысымен бірге $L^p(\Omega)$ кеңістігіне тиісті

өлшемді функциялар кеңістігін атайды және ол төменде енгізілген норма бойынша

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |D^{\alpha} u|, & p = \infty \end{cases}$$

Банах кеңістігін құрайды, мұндағы $k \geq 1$ кез келген бүтін сан, α – мультииндекс, D^{α} – мультииндекс бойынша жалпылама туынды. Егер $p = 2$ болса, онда $W^{k,2}(\Omega)$ кеңістігі Гильберт кеңістігін құрайды және оны $H^k(\Omega)$ арқылы да белгілейді. Бұл кеңістікте скалярлық көбейтінді келесі өрнекпен анықталады:

$$\forall u, v \in H^k(\Omega), (u, v) := \sum_{|\alpha| \leq k} (D^{\alpha} u, D^{\alpha} v).$$

Енді $C_0^{\infty}(\Omega)$ арқылы шексіз ретті үзіліссіз дифференциалданатын әрі финитті функциялар кеңістігін белгілейік. Егер $C_0^{\infty}(\Omega)$ кеңістігін $W^{k,p}(\Omega)$ кеңістігінің нормасымен толықтыру жасасақ, онда $W_0^{k,p}(\Omega)$ Банах кеңістігі алынады. Бұл кеңістікке түйіндес Банах кеңістігін

$$W^{-k,p'}(\Omega) := \left(W_0^{k,p}(\Omega) \right)^*, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, p > 1$$

арқылы белгілейді.

$L^p(0, T; B)$ арқылы Бохнер бойынша интегралданатын, яғни $u(x) \in L^p(0, T; B)$ функциясы үшін

$$\int_0^T \|u\|_B^p dt < \infty$$

шарттын қанағаттандыратын өлшемді функциялар кеңістігін белгілейді, мұндағы $1 \leq p$ және B Банах кеңістігі. Сонымен қатар, $L^p(0, T; B)$ кеңістігі төменде енгізілген норма бойынша Банах кеңістігін құрайды

$$\|u\|_{L^p(0,T;B)} := \left(\int_0^T \|u\|_B^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Енді пәнді жүргізу барысында қолданылатын функционалдық тізбектердің әлсіз, жұлдызша әлсіз және әлді жинақтылықтардың анықтамаларына тоқталайық.

Анықтама 1.1. (Әлді жинақтылық) Егер $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^p(\Omega)$ тізбегі мен $u \in L^p(\Omega)$ элементі келесі

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_{p,\Omega} = 0$$

шектік теңдікті қанағаттандырса, онда u_n тізбегі u элементіне әлді жинақты деп атайды.

Анықтама 1.2. (Әлсіз жинақтылық) Егер $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^p(\Omega)$ тізбегі мен $u \in L^p(\Omega)$ элементі келесі

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f, u_n \rangle_{L^p(\Omega)} = \langle f, u \rangle_{L^p(\Omega)}, \quad \text{кез келген } f \in (L^p(\Omega))^*$$

шектік теңдікті қанағаттандырса, онда u_n тізбегі u элементіне әлсіз жинақты деп атайды, мұндағы $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^p(\Omega) - L^p(\Omega)}$ және $(L^p(\Omega))^*$ Банах кеңістіктері арасындағы екіжақтылық жақшасы.

Ескерту 1.1. Сонымен бірге, u_n тізбегінің u элементіне $L^p(\Omega)$ кеңістігінде әлсіз жинақтылығын келесі түрде ықшамдап қайта жазуға болады

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{әлсіз жинақты } L^p(\Omega) \text{ — де, } n \rightarrow +\infty.$$

Анықтама 1.3. (*-әлсіз жинақтылық) Егер $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^\infty(\Omega)$ тізбегі мен $f \in L^\infty(\Omega)$ элементі келесі

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f_n, u \rangle_{L^\infty(\Omega)} = \langle f, u \rangle_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{кез келген } u \in L^1(\Omega)$$

шектік теңдікті қанағаттандырса, онда f_n тізбегі f элементіне *-әлсіз (жұлдызша әлсіз) жинақты деп атайды, мұндағы $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^\infty(\Omega) - L^1(\Omega)}$ және $L^1(\Omega)$ Банах кеңістіктері арасындағы екіжақтылық жақшасы.

Ескерту 1.2. Сонымен қатар, f_n тізбегінің f элементіне $L^\infty(\Omega)$ кеңістігінде *-әлсіз жинақтылығын келесі түрде ықшамдап қайта жазуға болады

$$f_n \xrightarrow{*} f \quad \text{*-әлсіз жинақты } L^\infty(\Omega) \text{ — де, } n \rightarrow +\infty.$$

Теорема 1.1. Айталық, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегі $L^p(\Omega)$ рефлексивті Банах кеңістігінің нормасымен бірқалыпты шенелген болсын. Онда u_n тізбегінен $L^p(\Omega)$ кеңістігінде u элементіне әлсіз жинақталатын u_{n_k} іштізбегін бөліп алуға болады, яғни

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{әлсіз жинақты } L^p(\Omega) \text{ — де, } n \rightarrow +\infty.$$

Теорема 1.2. Айталық, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегі $L^\infty(\Omega)$ Банах кеңістігінің нормасымен бірқалыпты шенелген болсын. Онда f_n тізбегінен $L^\infty(\Omega)$ кеңістігінде f элементіне *-әлсіз жинақталатын f_{n_k} іштізбегін бөліп алуға болады, яғни

$$f_{n_k} \xrightarrow{*} f \quad \text{*-әлсіз жинақты } L^\infty(\Omega) \text{ — де, } n \rightarrow +\infty.$$

2 Функционалдық және алгебралық теңсіздіктер

Сондай-ақ, пәнді жүргізу барысында төмендегі алгебралық және функционалдық теңсіздіктер қолданылады.

Юнг теңсіздігі. Кез келген $a > 0, b > 0$ және $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ көрсеткіштері үшін

$$ab \leq \varepsilon a^p + \frac{(\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}}}{q} b^q$$

теңсіздігі орынды, мұндағы ε кез келген оң еркін тұрақты.

Гельдер теңсіздігі. Келесі $1 \leq p_1, \dots, p_m \leq \infty, \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1$ дәрежелері және $u_k(x) \in L^{p_k}(\Omega), k = 1, \dots, m$ функциялары үшін төмендегі теңсіздік орынды

$$\int_{\Omega} \left| \prod_{k=1}^m u_k(x) \right| dx \leq \prod_{k=1}^m \|u_k(x)\|_{p_k, \Omega}.$$

Минковский теңсіздігі. Кез келген $f(x), g(x) \in L^p(\Omega)$ функциялары үшін

$$\int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^p dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

теңсіздігі орынды, мұндағы $1 \leq p \leq \infty$.

Интерполяциялық теңсіздік. Айталық, $1 \leq s \leq r \leq t \leq \infty$ және

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}, \theta \in (0, 1)$$

болсын. Сонымен қатар, $u(x) \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$ болсын. Онда $u(x) \in L^r(\Omega)$ функциясы үшін келесі теңсіздік орынды

$$\|u\|_{r, \Omega} \leq \|u\|_{s, \Omega}^{\theta} \|u\|_{t, \Omega}^{1-\theta}.$$

Интегралдық Гронуолл теңсіздігі Айталық, $y(x)$ және $f(x)$ функциялары теріс емес, $[a, b]$ аралығында үзіліссіз функциялар болсын. Сондай-ақ,

$$y(x) \leq C_1 \int_0^x y(\tau) f(\tau) d\tau + C, \quad a \leq x \leq b$$

теңсіздігін қанағаттандырсын, мұндағы C оң тұрақты. Онда $y(x)$ функциясы үшін төмендегі бағалау орынды

$$y(x) \leq C e^{\int_a^x f(\tau) d\tau}.$$

Лемма 2.1 (Сызықты емес Гронуолл теңсіздігі). [1] Айталық, $y(x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, +\infty)$ үзіліссіз функциясы келесі

$$y(x) \leq C_1 \int_0^x y^\mu(s) ds + C_2, x \in \mathbb{R}^+, \mu > 1$$

теңсіздігін қанағаттандырсын, мұндағы C_1 және C_2 оң тұрақтылар. Онда $y(x)$ функциясы үшін

$$y(x) \leq C_2 \left(1 - (\mu - 1)C_1 C_2^{\mu-1} x\right)^{-\frac{1}{\mu-1}}, 0 \leq x < x_{max} := \frac{1}{C_1 C_2^{\mu-1}}.$$

Лемма 2.2. [2] Барлық $p \in (1, \infty)$ және $\delta \geq 0$ мәндерінде p және d тәуелді C_1 және C_2 тұрақтылары табылып, сонымен қатар барлық $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d, d \geq 1$ үшін

$$||\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta| \leq C_1 |\xi - \eta|^{1-\delta} (|\xi| + |\eta|)^{p-2-\delta} \quad (2.1)$$

және

$$(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta) \cdot (\xi - \eta) \geq C_2 |\xi - \eta|^{2+\delta} (|\xi| + |\eta|)^{p-2+\delta}. \quad (2.2)$$

теңсіздіктері орынды.

Ладыженская теңсіздіктері. Кез келген $u(x) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ функциясы үшін келесі теңсіздіктер орынды

$$\|u\|_{4,\Omega}^4 \leq 2 \|u\|_{2,\Omega}^2 \|\nabla u\|_{2,\Omega}^2, \quad \text{егер } d = 2, \quad (2.3)$$

$$\|u\|_{4,\Omega}^4 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \|u\|_{2,\Omega} \|\nabla u\|_{2,\Omega}^3, \quad \text{егер } d = 3, \quad (2.4)$$

$$\|u\|_{6,\Omega} \leq (48)^{\frac{1}{6}} \|\nabla u\|_{2,\Omega}, \quad \text{егер } d = 3. \quad (2.5)$$

Сұйық механикасынан белгілі келесі функционалдық кеңістіктердің анықтамасын берейік:

$$\mathcal{V} := \{u \in C_0^\infty(\Omega) : \operatorname{div} u = 0\}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{H} := L^2(\Omega) \text{ нормасы бойынша } \mathcal{V} \text{ тұйықталуы,} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{V}_p := W^{1,p}(\Omega) \text{ нормасы бойынша } \mathcal{V} \text{ тұйықталуы.} \quad (2.8)$$

Ескерек жәйт, $p = 2$ жағдайда $\mathbf{V}_p$ кеңістігін $\mathbf{V}$ арқылы белгілейді.

Лемма 2.3. [4] Айталық, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ шенелген облыс және оның $\partial\Omega$ липшиц үзіліссіз шекарасы болсын.

Егер $u \in W_0^{1,r}(\Omega)$ болса, онда келесі теңсіздіктер орынды

$$\|u\|_{r^*,\Omega} \leq C(r,d) \|\nabla u\|_{r,\Omega}, \quad r^* = \frac{dr}{d-r}, \quad 1 \leq r < d, \quad (2.9)$$

$$\|u\|_{q,\Omega} \leq C(r,q,d) \|\nabla u\|_{W^{1,r}(\Omega)}, \quad d \leq q < \infty, \quad r = d, \quad (2.10)$$

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C(r,d) \|\nabla u\|_{r,\Omega}, \quad 0 < \alpha \leq 1 - \frac{d}{r}, \quad r > d. \quad (2.11)$$

Сонымен қатар, келесі үзіліссіз енгізулер орынды

$$W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \text{егер } 1 \leq q \leq r^* \text{ және } 1 \leq r < d,$$

$$W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \text{егер } d \leq q < \infty \text{ және } r = d,$$

$$W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad \text{егер } \alpha = 1 - \frac{r}{d} \text{ және } r > d.$$

Сондай-ақ, төмендегі компактiлi енгізулер орынды

$$W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \text{егер } 1 \leq q < r^* \text{ және } 1 \leq r < d,$$

$$W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \text{егер } 1 \leq q < \infty \text{ және } r = d,$$

$$W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad \text{егер } 0 < \alpha \leq 1 - \frac{d}{r} \text{ және } r > d.$$

Алдағы уақытта $\frac{dr}{d-r}$ өрнегін қысқаша r^* арқылы белгіленеді, ал $r = d$ жағдайда $r^* = \infty$ -ға тең, мұндағы $d > r$.

Лемма 2.4. (Обэн-Лионс леммасы [5]) Айталық, X , E және Y Банах кеңістіктері болсын. Бұл Банах кеңістіктері $X \hookrightarrow\hookrightarrow E \hookrightarrow Y$, сәйкесінше, компактiлi және үзіліссіз енгізулерді қанағаттандырса, онда келесі

$$L^r(0,T;X) \cap \{v : v_t \in L^1(0,T;Y)\} \hookrightarrow\hookrightarrow L^r(0,T;E), \quad \text{егер } 1 \leq r \leq \infty, \quad (2.12)$$

$$L^\infty(0,T;X) \cap \{v : v_t \in L^q(0,T;Y)\} \hookrightarrow\hookrightarrow C([0,T];E), \quad \text{егер } q \in (1,\infty]. \quad (2.13)$$

компактiлi енгізулері орынды.

Сондай-ақ, 2.3-леммада келтірілген Соболев теңсіздіктерімен қоса келесі пайдалы теңсіздіктер қолданылады.

Лемма 2.5. [4] Айталық, Ω облысы $\mathbb{R}^d$ пенелген облыс және $r \geq 1$ болсын. Егер $\partial\Omega$ шекарасы $C^{0,1}$ класының элементі болса, онда $\forall u \in W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)$ функциясы үшін келесі теңсіздіктер орынды

$$\|\nabla u\|_{r^*,\Omega} \leq C(r,d) \|D^2 u\|_{r,\Omega}, \quad (2.14)$$

$$\frac{1}{C(r,d)} \|\Delta u\|_{r,\Omega} \leq \|D^2 u\|_{r,\Omega} \leq C(r,d) \|\Delta u\|_{r,\Omega}. \quad (2.15)$$

Егер $\partial\Omega$ шекарасы $C^{1,1}$ класының элементі болса, онда $\forall u \in W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)$ функциясы үшін келесі теңсіздіктер орынды

$$\|\nabla u\|_{r^*,\Omega} \leq C(r,d) \|\Delta u\|_{r,\Omega}, \quad (2.16)$$

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C(r,d) \|\Delta u\|_{r,\Omega}, \quad 0 < \alpha \leq 1 - \frac{d}{r^*}, \quad 2r > d. \quad (2.17)$$

Мұндағы $|D^m u|$, $m \in \mathbb{N}$ келесі өрнекпен анықталады

$$|D^m u| := \sum_{|\gamma|=m} \left| \frac{\partial^{|\gamma|} u}{\partial x_1^{\gamma_1} \dots \partial x_d^{\gamma_d}} \right|, \quad |\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_d.$$

дербес жағдайда, $|Du|^2 = |\nabla u|^2$ және $|D^2 u|^2 = |\nabla u_{x_1}|^2 + \dots + |\nabla u_{x_d}|^2$. Айта кету керек, соңғы лемманың тармақтарында қолданылған $C = C(r,d)$ белгілеулері әр түрлі оң константалар болып есептелінеді.

Пәнді жүргізу барысында қарастырылатын кейбір есептерде қысымды қалпына келтіруге маңызды рөлге ие келесі де Рамм леммасын тоқталайық.

Лемма 2.6. [3] Айталық, $1 < q < \infty$ және $\varphi^* \in W^{-1,q'}(\Omega)$ болсын. Егер

$$\langle \varphi^*, \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in V_q$$

болса, онда

$$\int_{\Omega} p \, dx = 0 \quad \text{және} \quad \langle \varphi^*, \varphi \rangle = \int_{\Omega} p \operatorname{div} \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in W_0^{1,q}(\Omega).$$

шарттарын қанағаттандыратын жалғыз түрде $p \in L^q(\Omega)$ табылады. Сонымен қоса, C оң тұрақтысы үшін келесі бағалау орынды

$$\|p\|_{q,\Omega} \leq C \|\varphi^*\|_{W^{-1,q'}(\Omega)}.$$

Мұнымен қоса, регуляр нәтижелер үшін қажетті Стокс операторының анықтамасын келтірейік.

Келесі

$$\begin{aligned} \mathbb{A} : H^2(\Omega) \cap V &\longrightarrow H \\ u &\longmapsto -\mu \mathbb{P}(\Delta u) \end{aligned} \quad (2.18)$$

шарттарын қанағаттандыратын $\mathbb{A}$ бейнелеуі Стокс операторы деп аталады, мұндағы $\mathbb{P} : L^2(\Omega) \rightarrow H$ Лере проекциясы. Бұл оператор

$$\operatorname{div} u = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega\text{-де}, \quad (2.19)$$

$$-\mu \Delta u = f - \nabla p, \quad \mathbf{x} \in \Omega\text{-де}, \quad (2.20)$$

$$u = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega\text{-да} \quad (2.21)$$

стационарлық Стокс есебінің u шешімі мен f сыртқы күштер арасындағы сәйкестікті орнатады. Лере проекциясының симметриялығынан келесі өрнек тұжырымдалады

$$\mu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} \mathbb{A}(u) \cdot \varphi \, dx \quad \forall u \in W^{2,2}(\Omega) \cap V, \quad \forall \varphi \in V. \quad (2.22)$$

Эллиптикалық операторлар теориясынан белгілі келесі нәтижені келтірейік.

Лемма 2.7. [3] Айталық, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ шенелген облыс және оның $\partial\Omega$ шекарасы болсын, сонымен қатар $\partial\Omega$ беті C^2 класына тиісті болсын. Егер $f \in L^r(\Omega)$, $r \in (1, \infty)$ болса, онда (2.19)-(2.20) Стокс есебін Ω -да барлық дерлік нүктеде қанағаттандыратын, сонымен қатар $u \in W^{2,r}(\Omega)$ және $p \in W^{1,r}(\Omega)$, $\int_{\Omega} p(x) \, dx = 0$ қасиеттерге ие жалғыз (u, p) шешімі табылады және әрі келесі бағалауды

$$\|u\|_{W^{2,r}(\Omega)} + \|p\|_{W^{1,r}(\Omega)} \leq C \|f\|_{r,\Omega}. \quad (2.23)$$

қанағаттандырады, мұндағы $C = C(\mu, r, \Omega)$ оң тұрақты сан. Сондай-ақ, u функциясы үшін (2.21) шарт орынды.

(2.23) өрнектен келесі бағалауды алуға болады

$$\|D^2 u\|_{r,\Omega} + \|\nabla p\|_{r,\Omega} \leq C \|f\|_{r,\Omega}. \quad (2.24)$$

(2.18) Стокс операторы мен f күш өрісі арасындағы сәйкестікті пайдаланып, (2.24) өрнекте $r = 2$ жағдайында, төмендегі бағалау алынады

$$\|D^2 u\|_{2,\Omega} + \|\nabla p\|_{2,\Omega} \leq C \|\mathbb{A}(u)\|_{2,\Omega}. \quad (2.25)$$

Список литературы

- [1] S.N. Antontsev, J.I. Diaz, S. Shmarev, Energy Methods for Free Boundary Problems: Applications to Nonlinear PDEs and Fluid Mechanics, Progress in Nonlinear (Differential Equations and their Applications 48), Birkhäuser, Basel, 2002. 2.1

- [2] J.W. Barret, W.B. Liu. Finite element approximation of the parabolic p-Laplacian. SIAM Journal on Numerical Analysis, **31(2)** (1994), 413–428. 2.2
- [3] Galdi G. P. An introduction to the mathematical theory of the Navier–Stokes equations. Steady-state problems. – New York: Springer, 2011. 2.6, 2.7
- [4] V. Maz'ya. Sobolev Spaces with Applications to Elliptic Partial Differential Equations. Springer, Heidelberg, 2011. 2.3, 2.5
- [5] J. Simon. Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$. Ann. Mat. Pura Appl. 146 (1987), no. 4, 65–96. 2.4