1. Ерекше интегралдың бас мәні

Егер

$$\int_a^b \frac{1}{x-c}dx\ ,\ \left(a<c<b\right)$$

интегралын меншіксіз интеграл ретінде есептесек:

$$\int_a^b \frac{1}{x-c}dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\left[-\int_a^{c-\varepsilon_1}\frac{dx}{c-x}+\int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{dx}{x-c}\right] = \ln\frac{b-c}{c-a}+\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tag{1}$$

Мұның соңғы өрнегінің шегі ε_1 мен ε_2 шамаларының нөлге ұмтылу тәсілінен тәуелді.

Демек, меншікті мағынада қарастырылған интеграл мәні болмайды. Оны **ерекше** (сингулярлық) **интеграл** деп атайды. Бірақ ε_1 мен ε_2 арасында белгілі бір тәуелділік тауып, оған мән беруге болады. Егер c нүктесінің кесіліп алынып тасталған маңайы c нүктесі арқылы симметриялы орналасқан, яғни

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon \tag{2}$$

десек, онда біз ерекше интегралдың Коши бойынша бас мәні ұғымына келеміз.

Сонымен,

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c}\quad \left(a<c<b\right)$$

ерекше интегралының **Коши бойынша бас мәні** деп

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\varepsilon}^b\frac{dx}{x-c}\right]$$

шегін айтамыз.

Демек, (1) және (2) формулаларын ескерсек,

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c}=\ln\frac{b-c}{c-a}. \tag{3}$$

Енді

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}dx$$

интегралын қарастырайық, мұндағы $\varphi(x)$- белгілі бір (a,b) интервалында Гельдер шартын қанағаттандыратын функция. Мұны

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}dx = \int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}dx + \varphi(c)\int_a^b \frac{dx}{x-c}$$

түрінде өрнектеп, жоғарыда қарастырылған қарапайым түрге оңай келтіруге болады.

Ал Гельдер шарты бойынша

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}\right| < \frac{A}{|x-c|^{1-\lambda}}$$

болғандықтан, бірінші интеграл меншіксіз интеграл ретінде бар болады, ал екіншісі (3) формуламен есептеледі.

Демек, егер $\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}dx$ ерекше интегралында $\varphi(x)$ функциясы Гельдер шартын қанағаттандырса, онда ол Коши бойынша бас мән мағынасында бар және

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}dx = \int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}dx + \varphi(c)\ln\frac{b-c}{c-a} \; .$$

Әр түрлі оқулықтарда ерекше интегралды $\int^{|}$ немесе $V.P.\int$ түрлерінде белгілейді. Бізге олай белгілеудің қажеті жоқ, өйткені $\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}dx$ интегралы кәдімгі немесе меншіксіз интеграл түрінде бар болса, онда ол бас мән мағынасында да бар және олардың мәндері тең, екінші жағынан ерекше интегралды әрқашанда бас мән мағынасында түсінетін боламыз. Сондықтан ерекше интегралды интегралдың кәдімгі белгісімен белгілейтін боламыз.