Плоская свободная струя

$$J_x = \rho \frac{A^2}{B} x^{2\alpha-\beta} \int_{-\infty}^{\infty} F'^2 d\varphi = const = J_{0x}$$

$$\alpha = -\frac{1}{3}; \quad \beta = -\frac{2}{3};$$

$$A = \left(\frac{J_x}{\rho I 36\nu^2} \right)^{2/3} 6\nu; \quad B = \left(\frac{J_x}{\rho I 36\nu^2} \right)^{1/3}$$

Запишем автомодельное уравнение движения:

$$F''' + 3[(\alpha+1)FF'' - 2\alpha F'^2] = 0$$

$$F''' + 3[\frac{2}{3}FF'' + \frac{2}{3}F'^2] = 0$$

$$F''' + 2[FF'' + F'^2] = 0$$

$$F''' + 2[FF']' = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

С граничными условиями:

$F''(0) = 0$, $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$

$F'(\infty) = 0$, $F''(\infty) = 0$.

Проинтегрируем (5):

$$F'' + 2FF' = C_1$$

Граничные условия:

$F''(0) = 0,\ F(0) = 0,\ F'(0) = 1$

$F'(\infty) = 0,\ F''(\infty) = 0.$

Из граничных условий $\Rightarrow$ $C_1 = 0$

$$\Rightarrow F'' + 2FF' = 0 \Rightarrow F'' + (F^2)' = 0$$

Проинтегрируем последнее выражение $\Rightarrow$ $F' + F^2 = C_2$

Условия симметрии: $\varphi = 0,\ F(0) = 0, F'(0) = 1$ $\Rightarrow$ $C_2 = 1$

$$\Rightarrow F' + F^2 = 1 \Rightarrow \frac{dF}{1 - F^2} = d\varphi$$

Проинтегрируем последнее выражение $\Rightarrow$ $C_3 + \varphi = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+F}{1-F}$

$F(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$

Имеем: $\varphi = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+F}{1-F}$ или $\dfrac{1+F}{1-F} = e^{2\varphi}$

Преобразуем:

$$1+F=e^{2\varphi}(1-F)$$

$$1+F=e^{2\varphi}-Fe^{2\varphi}$$

$$F=\frac{e^{2\varphi}-1}{e^{2\varphi}+1}=\frac{e^{\varphi}-1/e^{\varphi}}{e^{\varphi}+1/e^{\varphi}}=\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}=th\varphi$$

Имеем $\Rightarrow$ $\boxed{F=th\varphi}$

$$\Rightarrow \quad F'=\frac{1}{ch^2\varphi}=1-th^2\varphi$$

$$\frac{u}{U_{max}}=1-th^2\varphi$$

$$U_{max}=Ax^{-1/3}$$

$$\Rightarrow \quad u=\frac{A}{x^{1/3}}\frac{1}{ch^2\varphi}$$

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}F'^2d\varphi=\int_{-1}^{1}F'dF=\int_{-1}^{1}(1-F^2)dF=F\Big|_{-1}^{+1}-\frac{F^3}{3}\Big|_{-1}^{+1}=1+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

$$A = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3J_x^2}{4\rho^2\nu}}$$

$\Rightarrow$

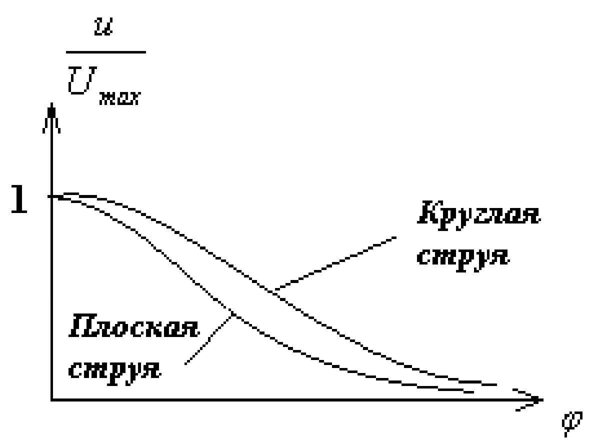
$$B = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{J_x}{6\rho\nu^2}}$$

ВЫВОДЫ

1. Универсальный профиль скорости:

$$\frac{u}{U_{max}} = F'(\varphi) = 1 - th^2\varphi$$

$$U_{max} = Ax^{\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3J_x^2}{4\rho^2\nu}}\, x^{-1/3}$$



2. Поперечная составляющая скорости υ:

$$\upsilon = -\frac{A}{B} x^{\alpha-\beta-1}[(\alpha-\beta)\varphi F + \beta\varphi F'] = -\frac{\sqrt[3]{\dfrac{J_x^2}{6\rho^2 I^2 \nu}}}{\sqrt[3]{\dfrac{J_x}{36\rho I \nu^2}}} x^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-1}\left(\frac{1}{3}th\varphi - \frac{2}{3}\frac{\varphi}{ch^2\varphi}\right) =$$

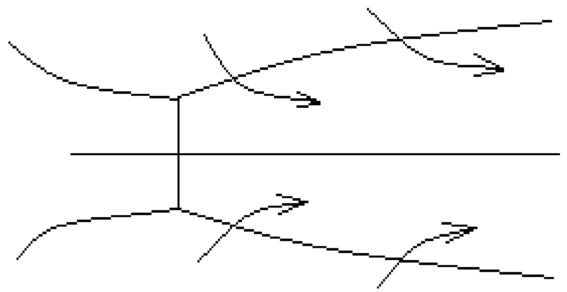
$$= -\sqrt[3]{\frac{J_x 6\nu}{\rho I x^2}}\left(\frac{1}{3}th\varphi - \frac{2}{3}\frac{\varphi}{ch^2\varphi}\right) \qquad \upsilon_\infty = -\frac{1}{3}\left(\frac{J_x 6\nu}{\rho I x^2}\right)$$

3. Максимальная скорость падает с увеличением x: $U_{max}\downarrow, x\uparrow$.

4. Оценим толщину пограничного слоя

$$\varphi = Byx^{-2/3}$$

$$\varphi_\delta = B\delta x^{-2/3} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{\varphi_\delta x^{2/3}}{B}$$



Струя имеет не прямоугольные границы. Струя расширяется. Максимум скорости падает, но импульс струи остается постоянным:

$$\boldsymbol{U_{max}\downarrow,\ J_x = const.}$$

$$\delta = \frac{\varphi_\delta x^{2/3}}{B} = \frac{\varphi_\delta x^{2/3}}{\sqrt[3]{\dfrac{J_x}{36\rho\nu^2 I}}}$$

$\Rightarrow$ чем больше импульс струи J_x, тем уже струя:

$$\Downarrow$$

$$J_x\uparrow,\ \delta\downarrow \sim \frac{1}{B}$$

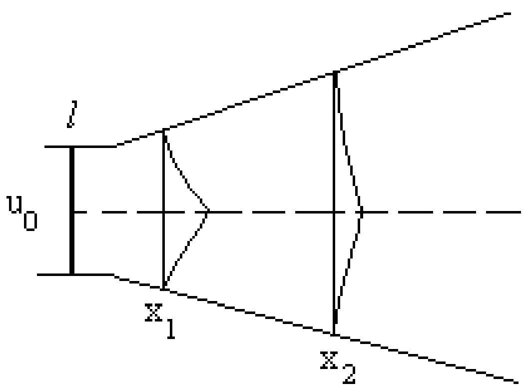
4. Найдем секундный расход в плоскопараллельной струе:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} u\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Ax^\alpha F' d\varphi}{Bx^\beta} = \frac{A}{B} x^{\alpha-\beta} \int_{-\infty}^{\infty} F' d\varphi = \frac{A}{B} x^{\frac{1}{3}} F \Big|_{-\infty}^{\infty} = 2\frac{A}{B} x^{\frac{1}{3}}$$

Пусть l - ширина щели, u_0 - скорость на срезе сопла.

Определим на срезе сопла:

$$J_{0x} = \int_{-l/2}^{l/2} \rho u^2 dy = \int_{-l/2}^{l/2} \rho u_0{}^2 dy = \rho u_0{}^2 y \Big|_{-l/2}^{l/2} = \rho u_0{}^2 l$$



Зная импульс на срезе, мы будем знать его во всей струе, т.к. он остается постоянным и неизменным. Таким образом J_x должен быть задан. Это дополнительное условие, из которого мы определим α.

В плоской струе $Q(x)\uparrow$ при $x\uparrow$,
но медленнее, чем в круглой.

В круглой струе $Q = 8\pi\nu x$.

В плоской струе $$Q = 3{,}3019\left(\frac{J_x}{\rho}\nu\, x\right)^{1/3}$$