Лекция 9. Скалярное поле. Градиент скалярного поля. Векторное поле. Векторные линии

Если на некотором множестве D в пространстве (области, кривой, поверхности) задано отображение, которое каждой точке множества ставит в соответствие значение какой-либо величины, то такое отображение называют *полем*. В случае скалярной величины говорят о скалярном поле, а в случае векторной величины - о векторном поле. Существуют поля и других типов, но они здесь не рассматриваются.

Скалярные и векторные поля - это функции точки и потому не связаны с какой-либо системой координат. Зафиксировав прямоугольную систему координат, мы можем представлять точки пространства упорядоченными тройками их координат, а скалярные и векторные поля - функциями многих переменных. Такое представление позволяет при изучении полей использовать аппарат дифференциального исчисления. В то же время не следует ставить знак равенства между терминами "поле" (скалярное или векторное) и "функция многих переменных". Понятие поля позволяет наиболее естественно характеризовать и описывать те свойства реальных объектов, которые не зависят от выбора системы координат: реальные физические свойства и не должны быть связаны с какой-либо системой координат.

Скалярное поле

Как уже было сказано, **скалярное поле**, заданное на множестве D, - это отображение с областью определения D, значениями которого являются действительные числа (значения скалярной величины). В качестве множества D, как правило, рассматривают некоторую пространственную область, поверхность или кривую.

Пример 9.1. Пусть пространственная кубируемая замкнутал область D заполнена веществом. Выберем в D точку M и произвольную кубируемую замкнутую область $D_M \subset D$, содержащую точку M. Обозначим через $V(D_M)$ и $d(D_M)$ объем и диаметр D_M. Если $m(D_M)$ - масса содержащегося в D_M вещества, то отношение $\dfrac{m(D_M)}{V(D_M)}$ представляет собой среднюю объемную плотность вещества в D_M. Предположим, что в каждой точке $M \in D$ существует конечный предел

$$\lim_{d(D_M)\to 0}\frac{m\left(D_M\right)}{V\left(D_M\right)}=\rho(M). \tag{9.1}$$

Тогда в D определено скалярное поле, значением которого в точке M является объемная плотность $\rho(M)$ массы вещества (такое поле обычно называют полем плотности вещества).

Объемная плотность $\rho(M)$ может изменяться от точки к точке, т.е. вещество в замкнутой области D может быть распределено неравномерно. Если скалярное поле во всех точках D принимает одно и то же значение, то говорят об **однородном поле**, а если скалярное поле меняется от точки к точке, то говорят о **неоднородном поле**. В рассматриваемом примере неравномерное распределение вещества описывается неоднородным полем плотности вещества. Если же $\rho(M)=\mathrm{const}$, т.е. вещество тела распределено по объему равномерно, то мы имеем дело с однородным полем плотности вещества. #

На практике встречаются ситуации, когда скалярная величина зависит не только от точки пространства, но и от времени. Примером такого рода является распределение температуры в нагретом теле, остывающем благодаря происходящему на его поверхности теплообмену с окружающей средой. Температура в каждой точке тела изменяется с течением времени до тех пор, пока не достигнет значения температуры окружающей среды. В этих случаях говорят, что скалярное поле зависит от времени и называют его **нестационарным скалярным полем**. Если же скалярное поле от времени не зависит, то его называют стационарным. Мы не будем рассматривать нестационарный случай и далее под скалярным полем будем понимать стационарное скалярное поле.

Пусть на множестве D в пространстве задано скалярное поле $u(M)$. Введем некоторую прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ с началом в точке O. Тогда каждая точка $M\in D$ будет определяться тройкой своих координат x_1,x_2,x_3, а скалярное поле будет представлено скалярной функцией трех переменных $u\left(x_1,x_2,x_3\right)$. Это позволяет исследовать скалярное поле с использованием теории функций многих переменных. Разумеется, вид функции трех переменных, соответствующей скалярному полю, зависит от выбранной системы координат, в то время как само скалярное поле с выбором системы координат никак не связано.

При фиксированной точке O в пространстве любую точку можно определить ее радиус-вектором. В этом случае скалярное поле $u(M)$ можно рассматривать как скалярную функцию $u(\boldsymbol{r})$ векторного аргумента $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$.

Изучение скалярного поля существенно упрощается, если оно обладает какими-либо свойствами симметрии. Если в некоторой системе координат скалярное поле зависит лишь от двух координат, то такое поле называют **плоским** (или двумерным в отличие от трехмерного поля, которое в любой системе координат зависит от всех трех координат). Плоским является температурное поле грунта вокруг равномерно нагретой длинной прямолинейной горизонтальной круглой трубы теплотрассы. В этом случае в любой плоскости, перпендикулярной оси трубы, будет одно и то же распределение температуры. Плоское скалярное поле удобно рассматривать при фиксированном значении координаты, от которой это поле не зависит, т.е. как функцию точки на плоскости, а не в пространстве. Примером такого рода может служить поле температур тонкой металлической пластинки, толщиной которой можно пренебречь. Такой трактовкой плоских скалярных полей мы будем пользоваться в дальнейшем.

Скалярное поле называют **одномерным**, если в некоторой прямоугольной системе координат оно зависит лишь от одной координаты. Температурное поле в неподвижной воде, находящейся у поверхности покрытого льдом водоема, является одномерным, поскольку в некотором приближении можно считать, что в этом случае температура воды зависит только от расстояния от этой поверхности.

Скалярное поле можно рассматривать не только в прямоугольной, но и в цилиндрической системе координат. Если скалярное поле в некоторой цилиндрической системе координат $\mathrm{O}r\,\varphi z$ не зависит от угловой координаты φ, то такое поле называют **осесимметричным**. Упомянутое выше плоское температурное поле грунта будет к тому же и осесимметричным в некоторой области, охватывающей круглую трубу, если труба уложена горизонтально на значительной глубине и можно пренебречь влиянием теплообмена на поверхности грунта. Плоское осесимметричное скалярное поле, зависящее лишь от радиальной координаты $\boldsymbol{r}$, называют **осевым**. Примером осесимметричного скалярного поля является распределение давления воды в водоносном пласте вблизи вертикальной скважины с круглым поперечным сечением, ось которой совпадает с координатной осью Oz. Строго говоря, оно не является осевым, поскольку давление воды зависит не только от радиальной координаты, но и от глубины, определяемой координатой z.

Если в некоторой сферической системе координат $O\boldsymbol{r}\varphi\vartheta$ скалярное поле зависит лишь от расстояния $\boldsymbol{r}$ (расстояния от точки M до фиксированной точки O), то его называют **центральным скалярным полем** с центром в точке O. Примером центрального скалярного поля является гравитационный потенциал (от латинского слова potentia - сила) материальной точки M_0 массой m_0, который, как известно из курса физики, изменяется обратно пропорционально расстоянию $\boldsymbol{r}$ от этой точки и может быть записан в виде

$$u(r) = G\frac{m_0}{r}, \tag{9.2}$$

где G - гравитационная постоянная (постоянная тяготения), в соответствии с современными измерениями равная $6,672\times\ \times 10^{-11}\dfrac{H \cdot m^2}{\mathbf{kr}^2}$. Аналогично скалярное поле U электростатического потенциала, создаваемое точечным зарядом q_0, помещенным в точку M_0, является центральным и может быть представлено в виде

$$U(r) = -\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{9.3}$$

где $\varepsilon_0 \approx 8,8542 \cdot 10^{-12}\dfrac{A \cdot c}{B \cdot m}$ - электрическая постоянная.

Для исследования скалярного поля, как и скалярной функции трех переменных, удобно использовать поверхности уровня.

Поверхностью уровня скалярного поля называют множество точек M из области определения D скалярного поля, в которых оно имеет заданное значение C. Очевидно, что через каждую точку $M \in D$ проходит ровно одна поверхность уровня. Обратим внимание на то, что поверхность уровня, вообще говоря, может и не быть поверхностью. Например, нетрудно определить скалярное поле, одной из поверхностей уровня которого является прямая. В конкретных прикладных задачах для поверхностей уровня скалярного поля часто используют специальные термины: поверхности уровня температурного поля называют изотермами, поля давления - изобарами, поля гравитационного или электростатического потенциала - эквипотенциальными поверхностями и т.п.

Рассмотрим, например, поле электростатического потенциала, создаваемого точечным зарядом, помещенным в точку M_0. Это поле описывается функцией (9.3), вид которой позволяет заключить, что эквипотенциальными поверхностями скалярного поля являются концентрические сферы с общим центром в точке M_0.

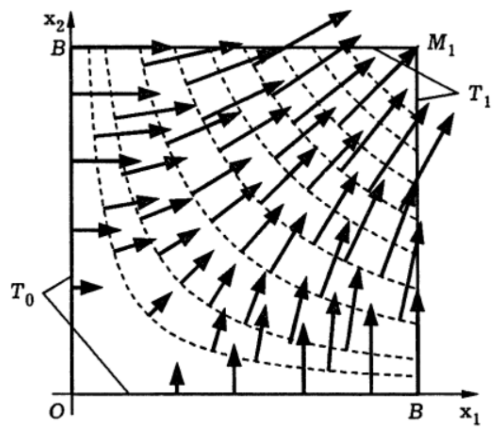

Рис. 1

На рис. 1 штриховыми линиями изображены изотермы плоского температурного поля $T(M)$, заданного функцией

$$T\left(x_1, x_2\right) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{B^2} x_1 x_2, \quad x_1, x_2 \in [0, B]. \tag{9.4}$$

На этом рисунке стрелки обозначают направление потока теплоты. Отметим, что изотермой со значением температуры T_0 является двузвенная ломаная, составленная из отрезков координатных осей Ox_1 и Ox_2, а изотерма со значением температуры T_1 вырождается в точку M_1 с координатами $x_1 = x_2 = B$. Остальные изотермы являются дугами равнобочных гипербол $x_1 x_2 = \text{const}$.

Градиент скалярного поля

Если скалярное поле в пространственной области D в некоторой прямоугольной системе координат представлено непрерывной (дифференцируемой) в D функцией трех переменных, то такое поле мы будем называть непрерывным (дифференцируемым) в D. Отметим, что непрерывное (дифференцируемое) скалярное поле в любой прямоугольной системе координат представляется непрерывной (дифференцируемой) функцией трех переменных.

Рассматривая скалярное поле $u(M)$ в заданной системе координат как скалярную функцию трех переменных, можно ввести понятия производной скалярного поля по направлению и градиента скалярного поля.

Напомним, что если функция $f\left(x_1, x_2, x_3\right)$ дифференцируема в точке $(x_1; x_2; x_3)$, то ее градиент $\operatorname{grad} f\left(x_1, x_2, x_3\right)$ в этой точке может быть вычислен по формуле

$$\operatorname{grad} f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \frac{\partial f\left(x_1, x_2, x_3\right)}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial f\left(x_1, x_2, x_3\right)}{\partial x_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial f\left(x_1, x_2, x_3\right)}{\partial x_3}\boldsymbol{e}_3,$$

где $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ - базисные векторы прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$, а производная этой функции по направлению вектора n в той же точке - по формуле

$$\frac{\partial f\left(x_1, x_2, x_3\right)}{\partial \boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n} \cdot \operatorname{grad} f\left(x_1, x_2, x_3\right).$$

Производная скалярного поля в точке M по заданному направлению характеризует скорость роста значений скалярного поля в заданном направлении. Ясно, что эта характеристика не связана с выбором системы координат и отражает свойства самого скалярного поля. Точно так же градиент функции трех переменных, в заданной системе координат представляющей рассматриваемое скалярное поле, есть вектор, указывающий направление наибольшего роста значений скалярного поля и величину этого роста. Этот вектор, вычисляемый в какойлибо системе координат, от выбора этой системы координат не зависит и характеризует свойства скалярного поля. Его и называют градиентом скалярного поля в заданной точке и обозначают $\operatorname{grad} u(M)$.

Своим появлением понятие градиента обязано шотландскому физику и математику Дж.К. Максвеллу (1831-1879) и происходит от латинского слова **gradior**, означающее "расти" (отсюда и обозначение grad, введенное им в 1873 г.). Однако сначала Максвелл намеревался обозначить это понятие словом **slope** - "склон", поскольку направление градиента противоположно направлению наискорейшего спуска по поверхности, которой можно изобразить плоское скалярное поле.

Если функция многих переменных $u(x, y, z)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0; z_0)$, то вектор градиента этой функции в точке ($x_0; y_0; z_0$) перпендикулярен поверхности уровня, проходящей через эту точку. В силу того, что понятия "поверхность уровня" и "градиент" не связаны с выбором системы координат, отмеченное свойство переносится и на скалярные поля. Отсюда, в частности, следует, что единичный вектор нормали к поверхности уровня скалярного поля $u(M)$ в точке M можно представить в виде

$$\boldsymbol{n}(M) = \pm\frac{\operatorname{grad} u(M)}{|\operatorname{grad} u(M)|}, \tag{9.5}$$

причем знак плюс соответствует направлению возрастания скалярного поля.

Скалярные поля с общей областью определения можно складывать и умножать на действительные числа. В результате этих операций мы снова получаем скалярные поля. Пусть в области D заданы дифференцируемые скалярные поля $u(M)$ и $v(M)$. Используя свойства частных производных скалярных функций, несложно установить, что

$$\operatorname{grad}(\alpha u + \beta v) = \alpha \operatorname{grad} u + \beta \operatorname{grad} v, \tag{9.6}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Это равенство отражает свойство линейности операции взятия градиента скалярного поля в заданной точке.

Аналогичным образом, учитывая правило дифференцирования произведения скалярных функций, можно установить правило вычисления градиента от произведения скалярных полей:

$$\operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u. \tag{9.7}$$

Пример 9.2.

Вычислим градиент плоского скалярного по$\boldsymbol{\mu}T(M)$, которое задано функцией $T(x_1, x_2)$ вида (7.4), определенной в области $D = \{(x_1; x_2) : x_1 \in (0, B), x_2 \in (0, B)\}$.

Функция $T(x_1, x_2)$ дифференцируема в D, и поэтому для нее градиент определен в каждой точке области. Используя вид функции $T(x_1, x_2)$, находим, что проекции градиента скалярного поля на координатные оси $O\mathbf{x}_1$ и $O\mathbf{x}_2$ равны соответственно

$$\frac{\partial T(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{T_1 - T_0}{B^2} x_2 \quad \text{и} \quad \frac{\partial T(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{T_1 - T_0}{B^2} x_1.$$

Таким образом,

$$\operatorname{grad} T(M) = \frac{T_1 - T_0}{B^2}\left(x_2 \boldsymbol{e}_1 + x_1 \boldsymbol{e}_2\right), \quad M \in D, \tag{9.8}$$

где $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ - базисные векторы заданной прямоугольной системы координат. На рис. 1 изображены векторы градиента. Видно, что их длина по мере приближения к точке M_1 возрастает. В начале координат градиент скалярного поля нулевой. #

Векторное поле

Наиболее наглядным **примером векторного поля** является поле скоростей при течении жидкости. Пусть в некоторой области D пространства происходит движение частиц жидкости, при котором в каждой точке $M \in D$

частицы жидкости, попадающие в эту точку в различные моменты времени, имеют один и тот же вектор скорости $\boldsymbol{v}(M)$. В этом случае говорят, что течение жидкости является установившимся (или стационарным). Таким образом, при установившемся течении жидкости вектор $\boldsymbol{v}(M)$ в произвольной точке $M \in D$ не изменяется с течением времени, хотя в разных точках M_1 и M_2 векторы $\boldsymbol{v}\left(M_1\right)$ и $\boldsymbol{v}\left(M_2\right)$ могут различаться. Тем самым в области D определено векторное поле - поле скоростей жидкости.

Если в пространстве задана прямоугольная система координат $Ox_1x_2x_3$, векторное поле может быть представлено как векторная функция трех переменных. Действительно, в этом случае с помощью координат можно определить и точку в области определения, и вектор поля в этой точке. Обозначим через $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ базисные векторы системы координат $Ox_1x_2x_3$. Тогда векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ с областью определения D можно представить в виде

$$\boldsymbol{a}(M)=a_1\left(x_1, x_2, x_3\right) \boldsymbol{e}_1+a_2\left(x_1, x_2, x_3\right) \boldsymbol{e}_2+a_3\left(x_1, x_2, x_3\right) \boldsymbol{e}_3, \tag{9.9}$$

где $a_i\left(x_1, x_2, x_3\right), i=1,2,3,$ - некоторые скалярные функции трех переменных, определенные в D. Значениями этих функций в точке $M\left(x_1; x_2; x_3\right)$ являются координаты вектора $\boldsymbol{a}(M)$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Мы их будем называть **координатными функциями векторного поля** $\boldsymbol{a}(M)$.

Каждую из координатных функций можно рассматривать как представление некоторого скалярного поля. В этом смысле векторное поле можно считать комбинацией трех скалярных полей. Однако связь "векторное поле - три скалярных поля" напрямую зависит от выбора системы координат.

Как и скалярные поля, векторные поля могут быть **стационарными** и **нестационарными**. В первом случае вектор поля зависит не только от точки, но и от времени, во втором - только от точки. Можно также выделить **однородные** и **неоднородные** векторные поля. Значением однородного векторного поля во всех точках области является один и тот же вектор, неоднородное векторное поле в разных точках принимает разные значения. В дальнейшем под векторным полем будем понимать стационарное векторное поле.

Векторное поле называют **двумерным** (**одномерным**), если в некоторой прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ оно не зависит от переменного x_3 (переменных x_2 и x_3). Одномерное векторное поле естественно рассматривать как частный случай двумерного векторного поля. Поле, не являющееся двумерным (а значит, и одномерным), будем называть **трехмерным**. Двумерное векторное поле $\boldsymbol{v}(M)$ называют **плоским**, если в той системе координат, в которой оно не зависит от третьей координаты x_3, каждый вектор $\boldsymbol{v}(M)$ параллелен плоскости x_1Ox_2, т.е. в этой системе координат $a_3\left(x_1, x_2, x_3\right) \equiv 0$. Плоские векторные поля удобно рассматривать на плоскости, т.е. как функции точки на плоскости, а не в пространстве. Двумерное векторное поле, не являющееся плоским, называют **плоскопараллельным**.

Пример 9.3.

Твердое тело, вращающееся вокруг оси с постоянной угловой скоростью, описывает некоторую осесимметричную замкнутую область D (рис. 2). В точке $M \in D$ частицы (точки) твердого тела имеют скорость $\boldsymbol{v}(M) = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{\Omega}$ - вектор угловой скорости, направленный вдоль оси вращения, а r - радиус-вектор точки M, имеющий начало в некоторой фиксированной точке O на оси вращения. Отметим, что выбор точки O на оси вращения не является существенным.

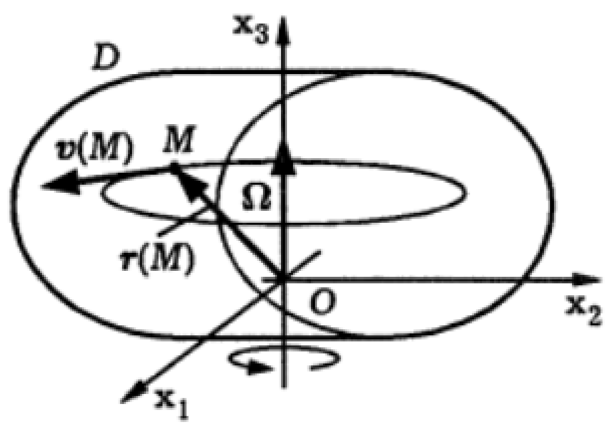

Рис. 2

Таким образом, в D определено векторное поле $\boldsymbol{v}(M)$, которое представлено векторной функцией $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$ векторного аргумента $\boldsymbol{r}$.

Выберем прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ так, чтобы ось вращения совпала с координатной осью Ox_3, а вектор $\boldsymbol{\Omega}$ и орт $\boldsymbol{e}_3$ были сонаправленными (см. рис. 7.2). Тогда $\boldsymbol{\Omega} = = \Omega \boldsymbol{e}_3$, где $\Omega = |\Omega|-$ длина вектора угловой скорости. Так как в выбранной системе координат радиус-вектор $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ точки $M\left(x_1; x_2; x_3\right)$ имеет координаты x_1, x_2, x_3, то векторное произведение $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$ может быть вычислено следующим образом:

$$\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{e}_3 \times \left(x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + x_3 \boldsymbol{e}_3\right) = \Omega\left(x_1 \boldsymbol{e}_2 - x_2 \boldsymbol{e}_1\right).$$

Следовательно, векторное поле $\boldsymbol{v}(M)$ представляется функцией

$$\boldsymbol{v}\left(x_1, x_2\right) = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r} = \Omega\left(x_1 \boldsymbol{e}_2 - x_2 \boldsymbol{e}_1\right),$$

а координатные функции векторного поля имеют вид

$$v_1\left(x_1, x_2, x_3\right) = -\Omega x_2, \quad v_2\left(x_1, x_2, x_3\right) = \Omega x_1, \quad v_3\left(x_1, x_2, x_3\right) = 0.$$

Таким образом, рассматриваемое векторное поле плоское, поскольку третья координатная функция равна нулю, а первые две не зависят от x_3. Впрочем, это ясно и из геометрических соображений: векторы точек вращающегося тела перпендикулярны оси вращения и не меняются при переходе от точки к точке вдоль прямой, параллельной оси вращения.

Предположим, что твердое тело, вращаясь вокруг оси, к тому же еще перемещается поступательно с постоянной скоростью $v_0 = v_0 \boldsymbol{e}_3$, направленной по оси вращения. Тогда векторная функция, представляющая поле в выбранной системе координат, изменится следующим образом:

$$\tilde{\boldsymbol{v}}\left(x_1, x_2\right) = \Omega\left(x_1(M) \boldsymbol{e}_2 - x_2(M) \boldsymbol{e}_1\right) + v_0 \boldsymbol{e}_3.$$

В этом случае векторное поле скоростей уже не будет плоским, хотя оно останется двумерным, т.е. оно плоскопараллельное. #

Если векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ в некоторой цилиндрической системе координат $O\boldsymbol{r}\varphi z$ не зависит от угловой координаты φ, причем в каждой точке M вектор $\boldsymbol{a}(M)$ параллелен плоскости, проходящей через точку M и ось Oz, то это поле называют осесимметричным. Осесимметричное плоское вежторное поле, векторы которого во всех точках M параллельны плоскости, перпендикулярной оси Oz , называют осевым. В осевом поле вектор в любой точке круговой цилиндрической поверхности $r = C = \mathrm{const}$ перпендикулярен этой поверхности и имеет на поверхности постоянную длину. В связи с этим осевое векторное поле иногда называют цилиндрическим.

Пример 9.4.

Рассмотрим однородный стержень, имеющий форму цилиндра высотой H с круговым поперечным сечением радиуса R и плоскими торцами (рис. 3). Пусть в материале стержня действуют внутренние источники тепловыделения с постоянной объемной мощностью q_V, торцы стержня идеально теплоизолированы, а его боковая поверхность охлаждается за счет теплообмена с окружающей средой. При установившемся распределении температуры в стержне количество теплоты выделившейся в стержне за единицу времени, пропорционально его объему $\pi R^2 H$ и равно $\pi q_V R^2 H$. Вся выделившаяся теплота будет проходить через боковую поверхность, поэтому плотность теплового потока на единицу площади этой поверхности в силу осевой симметрии стержня всюду одинакова и равна $q_V R/2$.

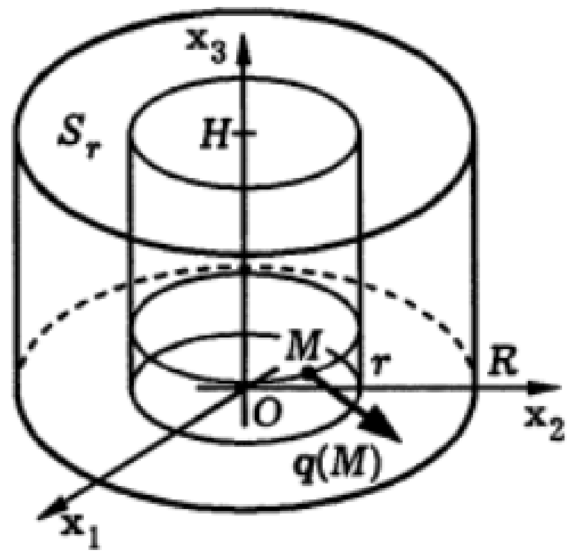

Рис. 3

Рассуждая аналогично, можно установить, что на любой цилиндрической поверхности S_r радиуса $r < R$, соосной с боковой поверхностью (см. рис. 3), плотность теплового потока равна $q_V r/2$. Вектор $\boldsymbol{q}(M)$ плотности теплового потока, проходящего через поверхность S_r, в любой точке $M \in S_r$ в силу осевой симметрии стержня перпендикулярен поверхности S_r и имеет на поверхности постоянную длину $|\boldsymbol{q}(M)| = q_V r/2$. Таким образом, перенос теплоты в стержне описывается векторным полем $\boldsymbol{q}(M)$, являющимся осевым.

Если один или оба торца стержня охлаждаются окружающей средой, то направление теплового потока уже не будет перпендикулярно оси стержня, а векторное поле $\boldsymbol{q}(M)$ не будет осевым. #

Векторное поле (M) называют **центральным** (иногда **сферическим**) с центром в точке O, если в любой точке M его области определения вектор $a(M)$ имеет длину, зависящую лишь от расстояния $r = OM$, и направлен вдоль прямой, проходящей через точки O и M. Выбрав точку O как начало радиус-векторов точек пространства, центральное поле $\boldsymbol{a}(M)$ с центром в точке O можно описать векторной функцией

$$\boldsymbol{a}(M) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = f(r)\boldsymbol{r} \tag{9.10}$$

векторного аргумента $\boldsymbol{r}$, где $r = |\boldsymbol{r}| = OM$.

Пример 9.5.

Векторное поле (M), описывающее распределение сил в пространстве, называют **силовым**. Примером силового векторного поля является поле тяготения, порождаемое материальной точкой массой m_0. Пусть эта масса расположена в начале прямоугольной системы координат. Согласно закону Ньютона, на материальную точку M массой m с радиус-вектором $\boldsymbol{r}$ действует сила притяжения

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -G\frac{mm_0}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}. \tag{9.11}$$

где G - гравитационная постоянная (см. пример 9.1). Таким образом, в области $\mathbb{R}^3 \backslash \{O\}$ (пространстве с выколотой точкой) определено силовое поле

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = -G\frac{m_0}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}, \tag{9.12}$$

которое в данном случае записано как векторная функция векторного аргумента. Вектор $\boldsymbol{a}(M)$ характеризует силу, с которой масса m_0 притягивает единичную массу, расположенную в точке M. Ясно, что векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ является центральным. #

Пример 9.6.

Другой пример центрального векторного поля - поле сил притяжения или отталкивания, возникающих при взаимодействии точечных электрических зарядов. Пусть точечный заряд q_0 находится в начале координат. В этом случае в соответствии с законом Кулона [1] на заряд q, помещенный в точку с радиусвектором r, действует сила

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}, \tag{9.13}$$

где ε_0 - электрическая постоянная (см. пример 9.1). Векторная функция

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r} \tag{9.14}$$

[1] Ш.О. Кулон (1736-1806) - французский физик

векторного аргумента r задает в пространстве силовое поле $\boldsymbol{E}(M)$, значением которого в точке M является вектор напряженности эктрического поля, т.е. вектор силы, с которой заряд q_0 отталкивает помещенный в точку M единичный заряд, имеющий с q_0 одинаковый знак. #

На векторные поля, как и на скалярные, можно распространить понятия непрерывности и дифференцируемости. Векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$, определенное в пространственной области D, называют непрерывным (дифберенциируемым) в точке M, если в некоторой прямоугольной системе координат оно представляется функцией многих переменных, непрерывной (дифференцируемой) в этой точке. Векторное поле, непрерывное (дифференцируемое) в каждой точке области D, называют непрерывным (дифференцируемым) в D. Введенные понятия не зависят от выбора системы координат, так как если в одной системе координат векторное поле представлено непрерывной (дифференцируемой) функцией, то и в любой другой системе координат оно будет представлено непрерывной (дифференцируемой) функцией.

Для векторных полей можно ввести понятие производной по направлению.

Векторные линии

Пусть векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ определено в области $D \subset\subset \mathbb{R}^3$. Гладкую кривую Γ в D называют векторной линией векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$, если в каждой точке $P \in \Gamma$ касательный вектор к кривой коллинеарен вектору $a(P)$ (рис. 4).

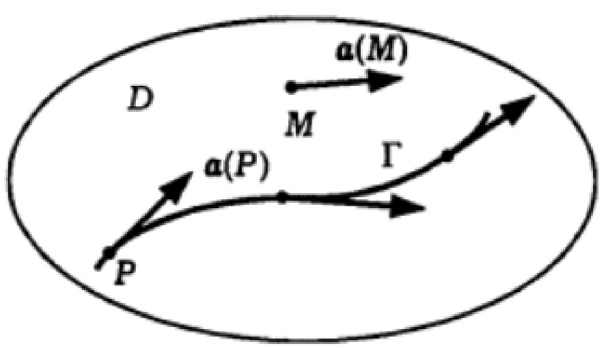

Рис. 4

Если векторное поле является силовым, то векторные линии такого поля называют **силовыми линиями**. Также называют векторные линии и в случае, когда речь идет о векторном поле электрической и магнитной напряженности. На векторной линии стрелками обычно указывают направление векторного поля в точках, принадлежащих этой линии.

В гидродинамике векторные линии называют лижилми тока. Они представляют собой траектории установившегося движения частиц жидкости. Действительно, в этом случае векторным полем является поле скоростей, а вектор скорости направлен по касательной к траектории движения частицы жидкости.

Пусть в пространственной области D задано векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$, причем $\boldsymbol{a}(M) \neq 0, M \in D$. Выберем некоторую прямоугольную декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ (рис. 5). Тогда векторное поле $a(M)$ в этой системе координат будет представлено векторной функцией $\boldsymbol{a}\left(x_1, x_2, x_3\right)$ с координатными функциями $a_i\left(x_1, x_2, x_3\right), i = 1, 2, 3$. Пусть векторная линия Γ в D задана параметрическими уравнениями

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = x_1(t), \\ x_2 = x_2(t), \qquad t \in [\alpha, \beta]. \\ x_3 = x_3(t) \end{array}\right. \tag{9.15}$$

В точке P, которой соответствует значение t параметра кривой Γ, касательный вектор к кривой имеет вид

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \boldsymbol{e}_1\frac{dx_1(t)}{dt} + \boldsymbol{e}_2\frac{dx_2(t)}{dt} + \boldsymbol{e}_3\frac{dx_3(t)}{dt}. \tag{9.16}$$

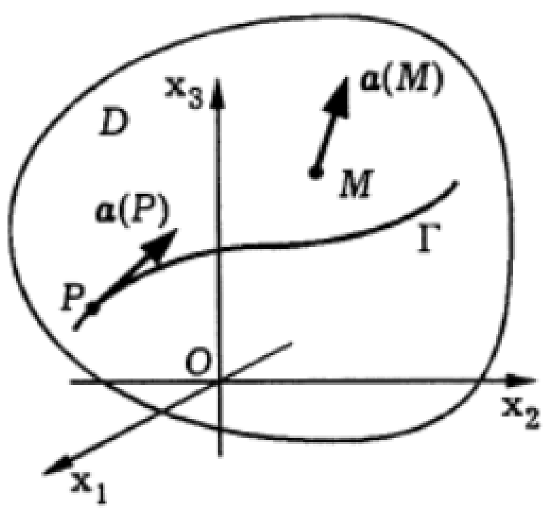

Рис. 5

Согласно определению векторной линии, этот вектор коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}(P) = a_1(P)\boldsymbol{e}_1 + a_2(P)\boldsymbol{e}_2 + a_3(P)\boldsymbol{e}_3$. Записав условие коллинеарности двух векторов, получим

$$\frac{x_1'(t)}{a_1\left(x_1, x_2, x_3\right)} = \frac{x_2'(t)}{a_2\left(x_1, x_2, x_3\right)} = \frac{x_3'(t)}{a_3\left(x_1, x_2, x_3\right)},$$

или, переходя к записи в дифференциалах,

$$\frac{dx_1}{a_1\left(x_1, x_2, x_3\right)} = \frac{dx_2}{a_2\left(x_1, x_2, x_3\right)} = \frac{dx_3}{a_3\left(x_1, x_2, x_3\right)}. \tag{9.17}$$

Напомним, что если в уравнении (9.17) какой-либо из знаменателей $a_i\left(x_1, x_2, x_3\right)$ обращается в нуль, то нулю равен и числитель соответствующей дроби. В силу условия $\boldsymbol{a}(M) \neq 0$, $M \in D$, в каждой точке области один из знаменателей отличен от нуля.

Уравнения (9.17) представляют собой симметричную форму записи автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Пример 9.7.

Найти векторные линии векторного поля

$$\vec{a} = 9z\vec{j} - 4y\vec{k}.$$

Так как первая координата поля $a_1(x, y, z) = 0$, то $dx = 0$ и, следовательно, $x = C$. Поэтому запишем дифференциальное уравнение векторных линий в виде:

$$\frac{dy}{9z} = -\frac{dz}{4y} \quad \text{при} \quad x = C.$$

Решая дифференциальное уравнение, получим

$$\begin{cases} 9z^2 + 4y^2 = C_1, \\ x = C_2. \end{cases}$$

Таким образом, векторные линии определяются системой уравнений

$$\begin{cases} 9z^2 + 4y^2 = C_1, \\ x = C_2. \end{cases} \qquad \#$$