

Классификация дифференциальных уравнений

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) и дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП).

Одномерное ур-е
погр. слоя:

$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} + \xi \frac{\rho u^2}{2d}, \quad u(x), p(x) \quad (1)$$

Двумерное ур-е
погр. слоя:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u(x, y), p(x, y) \quad (2)$$

Волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad v(x, t) \quad (3)$$

Классификация ДУ

2. Порядок ДУ

ДУ II порядка в общем случае:

$$A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + D \frac{\partial f}{\partial x} + E \frac{\partial f}{\partial y} + Ff = G \quad (4)$$

A, B, C, D, E, F, G – константы или известные функции x, y

3. Тип ДУ II порядка:

$$B^2 - 4AC \begin{cases} < 0 - \text{ДУ (4) эллиптического типа;} \\ = 0 - \text{ДУ (4) параболического типа;} \\ > 0 - \text{ДУ (4) гиперболического типа.} \end{cases}$$

Классификация ДУ

Примеры ДУ II порядка:

Уравнение Пуассона: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -q(x, y)$ $A=1, B=0, C=1,$
 $B^2-4AC = -4 < 0$ (5)

Уравнение Трикоми: $x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin x$ $A=x, B=0, C=1,$
 $B^2-4AC = -4x$ (6)

(3) $\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ $A=1, B=0, C=-1/c^2,$
 $B^2-4AC = 4/c^2 > 0$ (7)

(2)=? *Тип ДУ II порядка определяется только коэффициентами при вторых производных*

Классификация ДУ

4. Линейность:

зависимая переменная и все ее производные входят в ДУ линейным образом:

не умножаются друг на друга

не возводятся в степень

не являются аргументами трансцендентных функций (sin, cos, tg, ctg, arcsin, arccos, lg, ln, exp)

Линейные уравнения: (3),(4),(5),(6)

Нелинейные уравнения: (1),(2)

Большинство ДУ, описывающих физические процессы, нелинейные