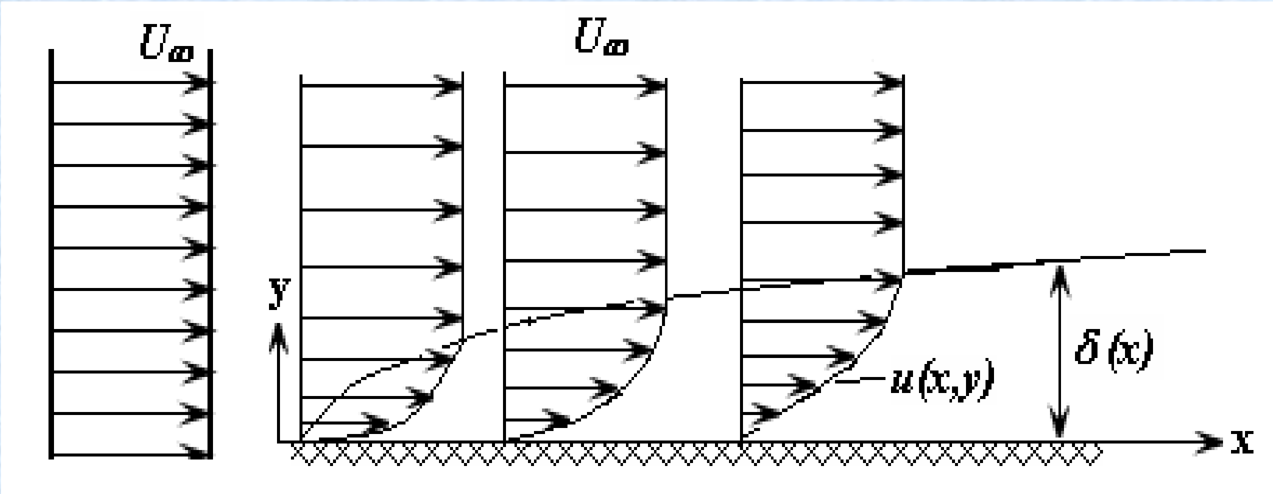
Пограничный слой



U_∞ - скорость набегания жидкости на тело

1. Пограничный слой – это тонкий слой вблизи тела, в котором велик **градиент скорости** $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ в направлении, перпендикулярном к стенке.

⇒ **Несмотря на то, что вязкость мала, касательное напряжение трения** $\sigma = \mu \dfrac{du}{dy}$, **может принимать большие значения.**

2. Область вне пограничного слоя - это область, где градиент скорости $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ мал, действие трения и вязкости мало. Это потенциальное течение можно рассматривать как течение идеальной жидкости с известной скоростью U_∞.

Динамический пограничный слой

Тепловой пограничный слой

Свойства динамического пограничного слоя

Толщина пограничного слоя δ_d.

Вне пограничного слоя, вследствие малой вязкости можно пренебречь силами трения по сравнению с силами инерции.

Внутри пограничного слоя действуют силы трения и силы инерции. Здесь эти силы величины одного порядка.

Выделим внутри пограничного слоя жидкости единичный объем $\Delta V = S \times \delta_d = \delta_d \times 1см^2$

$$\tau_w = \mu \frac{du}{dy}$$ **- сила трения, действующая на нижнее основание этого столбика**

$$\tau_w = 0$$ **- сила трения, на верхнем основании этого столбика**

Сила трения отнесенная к ед. объема: $$\frac{\tau}{V} = \frac{\mu}{V}\frac{du}{dy} = \mu \frac{du}{dy}\frac{1}{\delta_d}$$

Сила инерции внутри пограничного слоя, отнесенная к ед. объема: $$F = ma = m\frac{du}{dt}$$

$$\frac{F}{V} = \frac{m}{V}\frac{du}{dt} = \rho \frac{du}{dt} = \rho \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = \rho u \frac{du}{dx}$$

Запишем силу трения и силу инерции через характерные размеры:

Сила трения: $\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{\delta_d} \sim \mu \frac{U_\infty}{\delta_d^{\,2}}$

Сила инерции: $\rho u \frac{du}{dx} \sim \rho \frac{U_\infty^2}{L}$

Приравняв эти две силы, имеем: $\mu \frac{\cancel{U_\infty}}{\delta_d^{\,2}} \approx \rho \frac{\cancel{U_\infty^2}}{L} \Rightarrow \frac{\mu}{\rho} \frac{L}{U_\infty} \approx \delta_d^{\,2} \Rightarrow \delta_d \sim \sqrt{\frac{\nu L}{U_\infty}}$

$\frac{\mu}{\rho} \to \nu$

Безразмерная толщина пограничного слоя: $\bar{\delta} = \delta / L$ ***L* – длина пластины**

$\Rightarrow \frac{\delta_d}{L} \sim \frac{1}{L}\sqrt{\frac{\nu L}{U_\infty}} \Rightarrow \frac{\delta_d}{L} \sim \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty L}} \Rightarrow \boxed{\bar{\delta}_d \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}}$ **или** $\bar{\delta}_d = k\sqrt{\frac{1}{Re}}$

$\frac{\nu}{U_\infty L} \to \frac{1}{\mathrm{Re}}$

Для задачи об обтекании плоской пластины однородным потоком жидкости *k* =5 и тогда: $\Rightarrow \bar{\delta}_d = 5\sqrt{\frac{1}{Re}}$

$$\bar{\delta}_d = k\sqrt{\frac{1}{Re}} \qquad \delta_d \sim \sqrt{\frac{\nu L}{U_\infty}}$$

- **Если Re ↑, тогда δ_d ↓**

- **Если ν ↑, тогда δ_d ↑**

- **С удалением от передней кромки пластины (*x* увеличивается) $\delta_d \uparrow \sim \sqrt{x}$.**

- **В пограничном слое скорость меняется: $0 < u < U_\infty$.**

Так как толщина пограничного слоя мала ⇒ градиент скорости $\frac{du}{dy}$ - велик

⇒ Сила трения: $\tau_w = \mu \frac{du}{dy} \sim \mu \frac{U_\infty}{\delta_d} \sim \mu U_\infty \sqrt{\frac{\rho U_\infty}{\mu L}} \sim \sqrt{\frac{\mu \rho U_\infty^3}{L}}$

Полное сопротивление трения *W* пластинки равно: $W = bL\tau_w = b\sqrt{\mu \rho U_\infty^3 L}$

b – ширина пластины

- **Вне пограничного слоя градиент скорости $\frac{du}{dy}$ мал ⇒ сила трения мала**

Скорость не меняется и всюду равна U_∞.

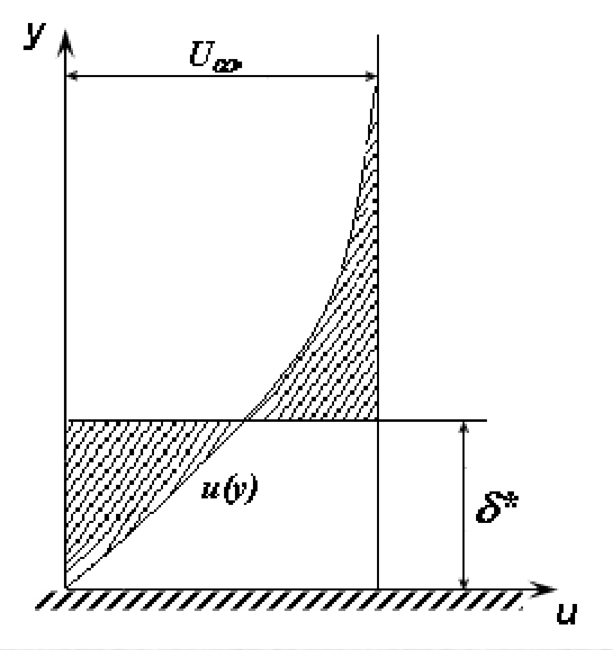
Здесь жидкость движется без трения ⇒ её можно считать идеальной

Толщина динамического пограничного слоя δ_d - такое расстояние от стенки, на котором скорость течения внутри пограничного слоя отличается от скорости внешнего течения на 1%:

$$\boxed{y = \delta_в,\ \delta_в,\ \text{если}\ u = 0.99U_\infty}$$

Толщина вытеснения $\delta_в*$ - такое расстояние, на которое отодвигаются от тела линии тока внешнего течения вследствие образования пограничного слоя:

$$\boxed{U_\infty \delta_d{}^* = \int_{y=0}^{\infty} \left(U_\infty - u\right) dy}$$



Пример: на пластине $\delta_d* = \frac{1}{3}\delta_d$

УРАВНЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Уравнения пограничного слоя можно получить двумя способами

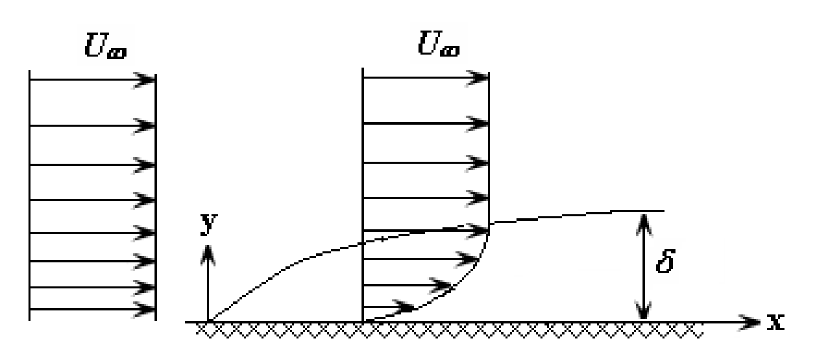
метод Прандтля (1904)

Производится оценка членов уравнений. Все величины порядка δ, δ^2, δ^3… отбрасываются как малые

метод Мизеса

Прямоугольные координаты x и y заменяются новыми независимыми переменными: координатой *x* и функцией тока *φ*.

Рассмотрим обтекание плоской пластины потоком жидкости



$$x \sim L$$

$$y \sim \delta_d$$

Течение плоскопараллельное, двумерное $\Rightarrow \begin{cases} u\,(x, y) \\ v\,(x, y) \end{cases}$

Течение установившееся, стационарное $\Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial t} = 0$

Массовые силы отсутствуют $\Rightarrow$ $F_i = 0$

Запишем уравнения Навье-Стокса

$$\rho\upsilon_k \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\mu\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\delta_{ik}\frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_j}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho\upsilon_k\right) = 0$$

i* = 1, 2** $\Rightarrow$ ***u, υ

k* = 1, 2** $\Rightarrow$ ***x, y

Запишем эти уравнения в проекциях на ось *x* и *y*

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\upsilon\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right) - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)\right]$$

(1)

$$\rho u\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \rho\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right) - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)\right]$$

(2)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\upsilon) = 0$$

(3)

Граничные условия

При $y = 0 \Rightarrow u = \upsilon = 0$

При $y = \delta_d \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}_\infty$

Теперь оценим величины, входящие в уравнения Навье-Стокса

$$\boldsymbol{x \sim L} \Rightarrow \frac{x}{L} \sim 1 \qquad \boldsymbol{y \sim \delta}_{\mathrm{d}} \Rightarrow \frac{y}{\delta_d} \sim 1$$

$\boldsymbol{u \sim U_\infty}$; υ - ?

$$\frac{u}{U_\infty} \sim 1$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho \upsilon}{\partial y} = 0 \Rightarrow \rho\upsilon = -\int \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dy \sim \frac{\rho u y}{x} \sim \frac{\rho U_\infty \delta_d}{L} \sim \rho\delta_d \Rightarrow \upsilon \sim \delta_d$$

Если ρ = const, то $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \upsilon}{\partial y} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} \sim 1$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim 1; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta_d}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\delta_d{}^2}$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial x} \sim \delta_d$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial y} \sim 1; \quad \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2} \sim \frac{\delta_d}{\delta_d{}^2} \sim \frac{1}{\delta_d}$$

$$u \sim 1; \ \upsilon \sim \delta_d$$

Найдем порядок *μ*:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \Rightarrow \frac{\tau}{V} = \frac{\tau}{\Delta S \cdot \delta_d} = \frac{\mu\, du}{\partial y \cdot \delta \Delta S} \sim \frac{\mu U_\infty}{\delta_d \cdot \delta_d} \sim \frac{\mu U_\infty}{\delta_d{}^2} \Rightarrow \mu \sim \delta_d{}^2$$

$\frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{L}$ (ìàëàÿ âåëè÷èíà)

$\frac{\partial}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta_d}$ *(áîëüøàÿ âåëè÷èíà)*

(1)

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)}+\cancel{\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)}-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left[\cancel{\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}+\cancel{\mu\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)}\right]$$

1 1 1 1 δ 1/δ 1 δ² 1 1/δ δ² 1/δ δ² 1 1/δ δ² δ δ² 1 δ² 1

(2)

$$\cancel{\rho u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}}+\cancel{\rho\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y}}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)}+\cancel{\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)}+\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)}+\cancel{\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)}-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left[\cancel{\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}+\cancel{\mu\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)}\right]$$

1 1 δ 1 δ 1 1 δ² δ 1/δ δ² 1 δ² 1/δ 1/δ δ² 1 1/δ δ² 1 δ² 1

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho\upsilon)=0$$ (3)

1 1 1/δ 1 δ

Оценим каждый член уравнения и величины порядка δ_d, δ_d^2, δ_d^3… отбросим как малые.

(1) $\Rightarrow$ $$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

(2) $\Rightarrow$ $$\frac{\partial p}{\partial y}=0$$

(3) $\Rightarrow$ $$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho\upsilon)=0$$

(4)

Граничные условия

При $y = 0 \Rightarrow u = \upsilon = 0$

При $y = \infty \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}_\infty$ **или** $y = \delta_d \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}_\infty$

Если $\mu = const$, $\rho = const$ $\Rightarrow$ **система уравнений (4) примет вид:**

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{т.к.} \quad \frac{\mu}{\rho} = \nu$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = 0$$

система уравнений Прандтля для пограничного слоя

Определим давление p

На внешнем крае пограничного слоя:

Продольная скорость *u* → в скорость *U(x,t)* внешнего течения

Градиент скорости мал → $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

Для установившегося течения → $\frac{\partial U_\infty}{\partial t} = 0$

уравнение движения (4) примет вид:

$$U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U_\infty^2}{\partial x} = 2U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} \Rightarrow U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial U_\infty^2}{\partial x} \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\partial U_\infty^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

Проинтегрируем последнее выражение:

$$\rho\frac{U_\infty^2}{2} = -p + Const \Rightarrow \boxed{\rho\frac{U_\infty^2}{2} + p = Const}$$

- уравнение Бернулли