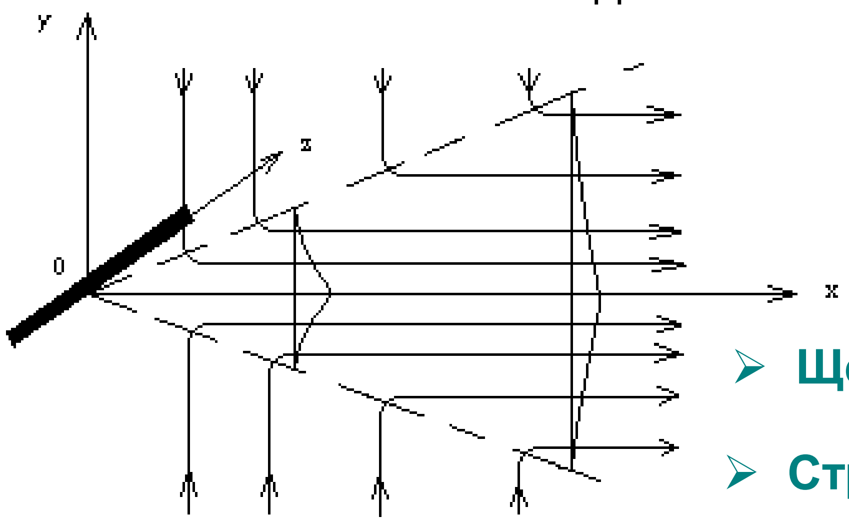
ПЛОСКАЯ СВОБОДНАЯ СТРУЯ (ЗАТОПЛЕННАЯ)

! Струя - конечный поток жидкости или газа неограниченный твёрдыми стенками

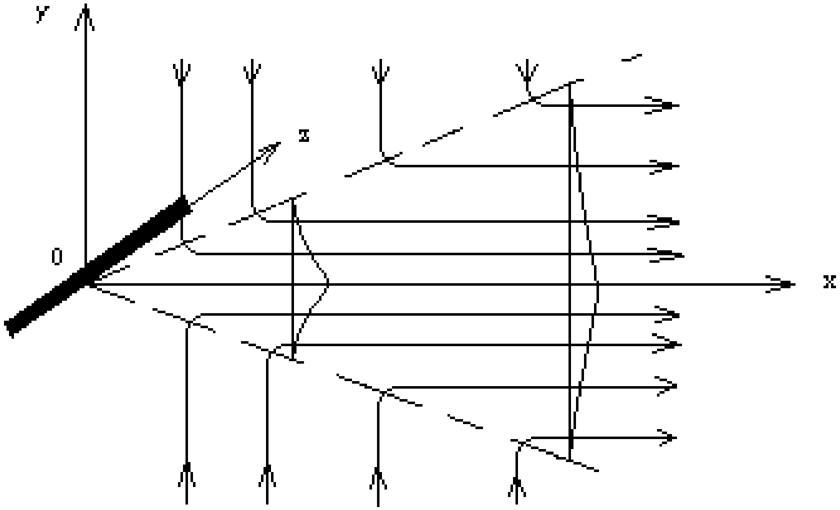
СВОБОДНАЯ ИЛИ ЗАТОПЛЕННАЯ СТРУЯ

- струя жидкости, исходящая в безграничное пространство, заполненное той же жидкостью, но неподвижной



- **Щель бесконечно тонкая**
- **Струя направлена из точки O вдоль оси OX**
- **Скорость истечения струи бесконечно большая**
- **Начальный импульс струи J_{ox}**

При наличии вязкости этот бесконечно тонкий слой жидкости сразу же после выхода из щели смешивается с окружающей жидкостью, вовлекает ее в движение и одновременно подтормаживается сам.



Ось ОХ примем за основную, нулевую линию тока.

Симметрично по обе стороны образуется тонкий пограничный слой

СВОБОДНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

обладает всеми свойствами пограничного слоя

$\upsilon << u,\ y << x,\ y \sim \delta,\ x \sim 1,\ \upsilon \sim \delta,\ u \sim 1$

Изменение всех величин вдоль потока меньше, чем поперек

$$\frac{\partial}{\partial x} << \frac{\partial}{\partial y}; \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial y} \sim 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} \sim 1$$

Общее свойство пограничных слоев: давление поперек струи не меняется - $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$

определяется давлением в окружающей жидкости

во внешнем потоке – неподвижной жидкости – давление всюду одинаково

$\Rightarrow$ $$U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$ -Уравнение движения на внешней границе.

Т.к. $U_\infty = 0$, то $\Rightarrow$ $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$

Т.о во всех точках струи давление будет одним и тем же

Полный импульс в направлении *x* не должен зависеть от *x* $\Rightarrow$ $\boldsymbol{J_x = J_{0x} = const}$

Покажем это в дальнейшем

Для того, чтобы не рассматривать начальный профиль скорости, положим, что щель бесконечно тонкая, т.е. ширина щели $l \to 0$

Чтобы количество протекающей жидкости и импульс струи имели конечные значения, необходимо предположить, что жидкость истекает из щели с бесконечно большой скоростью.

Струя обладает осевой симметрией $\rightarrow$

- ✓ Максимум скорости находится на оси
- ✓ Минимум скорости на краю струи

Ширина щели << длины щели $\Rightarrow$ течение двумерное и плоскопараллельное

$$\left.\begin{aligned} &u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ &\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Граничные условия:

$$y=0,\ u=U_{max},\ \upsilon=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0; \qquad y=\infty,\ u=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad (2)$$

Используем автомодельные преобразования:

$$u = Ax^{\alpha} F'(\varphi)$$

$$\upsilon = -\frac{A}{B} x^{\alpha-\beta-1}[(\alpha - \beta)F + \beta\varphi F']$$

$$\varphi = Byx^{\beta}$$

Найдем:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = A\alpha x^{\alpha-1}F' + Ax^{\alpha-1}F''\beta\varphi \\
&\frac{\partial u}{\partial y} = Ax^{\alpha+\beta}BF''; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = AB^2 x^{\alpha+2\beta}F'''
\end{aligned}\right\} \rightarrow \text{в (1)}$$

Чтобы решение было автомодельным, оно не должно зависеть от *x* $\Rightarrow$ $\alpha - 2\beta = 1$ $\Rightarrow$ $\beta = \frac{\alpha - 1}{2}$

(1) $\Rightarrow$ $$F''' + \frac{A}{2\nu B^2}[(\alpha+1)FF'' - 2\alpha F'^2] = 0$$

$$F''' + \frac{A}{2\nu B^2}\left[(\alpha+1)FF'' - 2\alpha F'^2\right] = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

с граничными условиями

$$\varphi = 0,\ F''(0) = 0,\ F(0) = 0,\ F'(0) = 1$$

$$\varphi = \infty,\ F'(\infty) = 0,\ F''(\infty) = 0$$

Неизвестные: $F'(\varphi)$, α, β, A, B.

$$\text{Пусть}\ \frac{A}{2\nu B^2} = 3 \ \Rightarrow\ F''' + 3\left[(\alpha+1)FF'' - 2\alpha F'^2\right] = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

$\boldsymbol{\alpha}$ **?**

Для определения α составим интегральное условие.

Перепишем уравнение (1) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u\upsilon) = \rho 2u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\upsilon\frac{\partial u}{\partial y} + \rho u\frac{\partial \upsilon}{\partial y} = \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\upsilon\frac{\partial u}{\partial y} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho u\frac{\partial \upsilon}{\partial y} =$$

$$\rho u\cancelto{0}{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)} + \rho\upsilon\frac{\partial u}{\partial y} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} = \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\upsilon\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\rho\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow \quad u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho u\upsilon)=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Проинтегрируем это выражение:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2)dy+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial y}(\rho u\upsilon)dy=\mu\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2)dy=\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}\rho u^2 dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial y}(\rho u\upsilon)dy=\rho u\upsilon\Big|_{-\infty}^{\infty}=0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy=\frac{\partial u}{\partial y}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}\rho u^2 dy=0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty}\rho u^2 dy=const=J_x$$ - интегральное условие

Полный импульс струи сохраняется в любом сечении струи, т.е. на любом расстоянии от щели. Этот результат определяет свойства течения.

Подставим автомодельные переменные:

$$J_x = \int_{-\infty}^{\infty} \rho u^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} \rho A^2 x^{2\alpha} F'^2 \frac{d\varphi}{Bx^{\beta}} = \rho \frac{A^2}{B} x^{2\alpha-\beta} \int_{-\infty}^{\infty} F'^2 d\varphi = const$$

т.к. $J_x = \text{const} \Rightarrow \begin{matrix} 2\alpha - \beta = 0 \\ \beta = \dfrac{\alpha - 1}{2} \end{matrix} \Rightarrow 2\alpha - \dfrac{\alpha-1}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \alpha = -\dfrac{1}{3} \\ \beta = -\dfrac{2}{3} \end{matrix}}$

$$\frac{A}{2\nu B^2} = 3 \Rightarrow A = B^2 6\nu$$

Обозначим: $I = \int_{-\infty}^{\infty} F'^2 d\varphi$

Тогда $J_x = \rho I \dfrac{A^2}{B} \Rightarrow \dfrac{36\nu^2 B^4}{B} = \dfrac{J_x}{\rho I}$

$$\Rightarrow B = \left(\frac{J_x}{\rho I 36\nu^2}\right)^{1/3} \Rightarrow A = \left(\frac{J_x}{\rho I 36\nu^2}\right)^{2/3} 6\nu$$

$$\boxed{I = ?}$$