Дәріс 4. Голоморфты функциялар. Функцияның нүктеде голоморфтылығының қажетті шарттары. Функцияның нүктеде голоморфтылығының жеткілікті шарттары

1 Голоморфты функциялар

Комплекс анализ мағынасында функцияның дифференциалданатындары нақты анализ мағынасындағы дифференциалданатындардан елеулі айырмашылығы бар. Мысалға, барлық жерде үзіліссіз,бірақ нақты анализде еш жерде туындысы болмайтын функциялар, біршама шебер түрде құрастырылады. Осымен қатар, комплекс анализде мұндай функциялар жиірек кездеседі. Бұған қарамастан, комплекс және нақты анализдердегі дифференциалданудың сөзбе анықтамалары сәйкес келеді.Мұнан былай функцияның анықталу облыстарын ашық жиын деп санаймыз, яғни біз функцияның тек ішкі нүктелеріндегі қасиеттерін ғана зерттейміз. Комплекс айнымалы функциялардың шекаралық мәндері қалай зерттелетінін КАФТ-тың алдағы дәрістерінде танысуға болады.

f функциясының z_0 нүктесіндегі туындысы деп

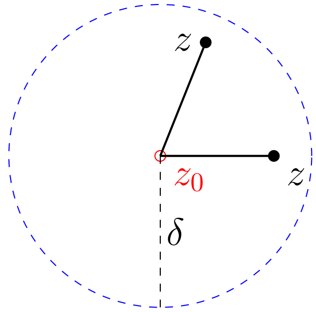
$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

шегі аталады. z_0 – f функциясының D_f анықталу облысының ішкі нүктесі. Туынды әдеттегідей қалыпты $f'(z_0)$ арқылы белгіленеді.

Бұл туындының ерекшелігін байқау үшін бізге белгілі нақты айнымалыға тәуелді функцияның нүктедегі шегімен салыстырамыз:

$$\left(\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)\right)\overset{def}{=}$$
$$\left(\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\forall z\in D_f\cap\{|z-z_0|<\delta\}\Rightarrow\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\right|<\varepsilon\right).$$

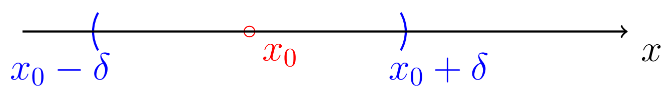
Жеткілікті аз δ үшін соңғы кірістірудің геометриялы мағынасы мынадай:



Дөңгелектің ішінде z нүктесі z_0-ге әртүрлі бағытта ұмтылуы мүмкін, әрі шек (туынды) ұмтылу бағытына тәуелді болмау керек. Басқаша айтқанда,шектер барлық бағыттарда бар, және олар өзара тең.

$$\left(\lim_{x\to x0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)\right) \stackrel{def}{=}$$
$$\left(\forall\varepsilon>0\exists\delta>0 : \forall x\in D_f\cap\{|x-x_0|<\delta\} \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon\right).$$

Жеткілікті аз δ үшін соңғы кірістірудің геометриялық мағынасы келесіде:



интервалдың ішінде x нүктесі x_0-ге тек 2 бағытта ғана ұмтыла алады (оң жағынан және сол жағынан), және де сол жақты шек оң жақты шекпен сәйкес келу керек.

Демек, комплекс жазықтығындағы шек жағдайында шектердің әртүрлі бағытта сәйкес келу талаптары осьтегіден әлдеқайда көп. Сондықтан, әрине, комплекс анализ мағынасында туындының бар болуы осьтегі түсінікті фактіден өте сирек кездесетін жайт.

Шынында да, бір қарағанда, ең қарапайым болып көрінетін $f(z)=\bar{z}$ функциясының өзі де комплекс анализ мағынасында туындысы жоқ. Бұған көз жеткізу үшін, рет-ретімен есептейік:

1. өсімше $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$
2. өсімше $\Delta f = \Delta x - i\Delta y$
3. z нүктесі z_0-ге көлденең бағытта ұмтылғанда $\frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$ қатынасының шегін аламыз. Бұл жағдайда, $\Delta y = 0$, сондықтан шек 1 тең.
4. z нүктесі z_0-ге тігінен ұмтылғанда $\frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$ қатынасының шегін табуымыз керек. Бұл жағдайда $\Delta x = 0$, сондықтан, шек (-1) тең.

Туындысы бар болған жағдайда, шектері бірдей бола беретін еді. Бірақ біздің жағдайда шектері әртүрлі болып шықты. Кейбіреулерінде, өте қарапайым функцияның еш жерде туындысының болмауы, қанағатсыз сезімін туғызды.

Бірақ $f(z) = \bar{z}$ барлық жерде үзіліссіз, себебі оның нақты және жорамал бөліктері сондай болғандықтан.

3-тұжырым. *Дәрежелік қатар қосындысының жинақтылық дөңгелегінің барлық нүктелерінде туындылары бар, ягни ең болмаганда, Тейлор қатарына локалды жіктелетін функциялар дифференицалданатын болады.*

Дәлелі. $|z - z_0| < R$ болғанда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ дәрежелік қатары $f(z)$-ке жинақталсын. Жалпылықты кемітпей, $z_0 = 0$ деп санауға болады. Егер $\rho < R$ болса, онда $\{c_n z^n\}$ тізбегі $|z| < \rho$ болғанда шектелген, бір K санымен дейік. $|z| < \rho u |z + h| < \rho$ деп есептегенде айырымды дәрежелік қатар

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left\{ \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} \right\}$$

түрінде жазайық, мұндағы $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nc_n (z - z_0)^{n-1}$ және $z_0 = 0$. Жақшаның ішіндегі өрнек былай бағаланады

$$\left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} \right| = \left| \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} z^{n-2} h + \cdots + h^{n-1} \right| \leq$$
$$\leq \frac{n(n-1)}{2} |z|^{n-2} |h| + \cdots + |h|^{n-1} = \frac{|z+h|^n - |z|^n}{h} - n|z|^{n-1}$$

бұдан айырым модулін бағалаймыз

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) \right| \leq K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} \left\{ \frac{||z| + |h||^n - |z|^n}{|h|} - n|z|^{n-1} \right\} =$$
$$= K \left\{ \frac{1}{|h|} \left(\frac{\rho}{\rho - |z| - |h|} - \frac{\rho}{\rho - |z|} \right) - \frac{\rho}{(\rho - |z|)^2} \right\} = \frac{K\rho |h|}{(\rho - |z| - |h|)(\rho - |h|)^2}$$

h нөлге ұмтылғанда, соңғы теңсіздіктің оң жағындағы өрнегі де нөлге ұмтылады. Демек, $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = g(z)$ шектік тендеуін аламыз, бұдан дәрежелік қатар қосындының туындысы бар екені шығады.

Қорытындылай келе, нүктеде голоморфты функция деп, нүктеде комплекс анализ мағынасында туындысы бар функцияны айтатынымызды ескертейік. Сонымен, $\bar{z}$ жазықтықтың ешбір нүктесінде голоморфты болмайды, ал дәрежелік қатар қосындысы жинақтылық дөңгелегінде голоморфты функцияны береді.

2 Функцияның нүктеде голоморфты болуының қажетті шарттары

Нүктеде голоморфты функцияларды голоморфты еместерден қалай ажырата аламыз? $f(z)$ функциясы D_f анықталу облысының z_0 ішкі нүктесінде голоморфты болсын. Бұл,

$$\lim \frac{f(z)-f\left(z_0\right)}{z-z_0} \quad \text{егер} \quad z-z_0=\left|z-z_0\right| e^{i\varphi} \quad \text{және} \quad \left|z-z_0\right| \rightarrow 0$$

шектері φ бұрышынан тәуелсіз екенін білдіреді. Көрсетілген шектерді $\varphi=0$ және $\varphi=\frac{\pi}{2}$ үшін салыстырайық.

$$\begin{aligned}
\varphi=0 \Rightarrow f'\left(z_0\right)=\lim \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}+i \frac{\Delta v}{\Delta x}\right)= \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_0, y_0}+\left.i \frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x_0, y_0} \\
\varphi=\frac{\pi}{2} \Rightarrow f'\left(z_0\right)=\lim \left(\frac{\Delta u}{i \Delta y}+i \frac{\Delta v}{i \Delta y}\right)=-\left.i \frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x_0, y_0}+\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{x_0, y_0}
\end{aligned}$$

мұндағы $u=\operatorname{Re} f$ және $v=\operatorname{Im} f$. Бұдан, алғашқы функцияның нақты және жорамал бөліктерінің дербес туындылары өзара тәуелді екені шығады, яғни

$$\left\{\begin{array}{l}
\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_0, y_0}=\left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{x_0, y_0} \\
\\
\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{x_0, y_0}=-\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x_0, y_0}
\end{array}\right.$$

Бұл шарттарды кейбір әдебиеттерде Коши-Риман шарттары деп атайды. Басқа деректерде Даламбер-Эйлер шарттары деп атайды. Егер келтірілген шарттардың ең болмағанда біреуі орындалмаса, функция нүктеде голоморфты болмайды. Сонымен, Коши-Риман шарттары функцияның нүктеде голоморфтылығының қажетті шарттары болып табылады. Шынында да, φ көп мән қабылдайтындықтан, қажетті шарттардың саны шексіз. Мұның ғажаптылығы, Коши-Риман шарттары жеткілікті дерлік. Яғни бір-бірінен айырмашылығы $\frac{\pi}{2}$-ге тең екі φ бұрыштары үшін қажетті шарттарды жазу жеткілікті.

3 Функцияның нүктедегі голоморфты болуының жеткілікті шарттары

Коши-Риман қатынастары функцияның нүктедегі голоморфтылығының қажетті шарттары болып табылады. Бірақ олар жеткілікті емес. Шынында да,

$f(z) = \sqrt{|xy|}$ функциясы үшін $z_0 = 0$ нүктесінде Коши-Риман шарттары орындалады, дегенмен функция бұл нүктеде дифференциалданбайды, себебі, $2f(z) = \sqrt{|z^2 - \bar{z}^2|}$. Бұған көз жеткізу үшін $\dfrac{f(z)}{z} = \frac{\sqrt{|xy|}}{x+iy}$ қатынасын қарастыру керек, мұнда $x = \alpha r, y = \beta r$ и устремим r кнулю шарттарын қоямыз. Нәтижесінде шек α, β-ға тәуелді, бұл туындының бар болуына қарама-қарсы. Келтірілген мысалда $f(z)$ функциясының нақты бөлігінің дербес туындылары $z = 0$ нүктесінде үзіліссіз болмайды. Осындай нақты және жорамал бөліктердің дербес туындыларының кемістіктерін жойған кезде Коши-Риман шарттары функцияның голоморфтылығымен қамтамасыз етеді.

5-теорема. *Жорамал және нақты бөліктерінің барлық төрт бірінші ретті дербес туындылары (x_0, y_0) нүктесінің аймагында бар деп ұйгарайық. Онда Коши-Риман қатынасы алгашқы функцияның $z_0 = x_0 + iy_0$ нүктесіндегі голоморфты болуының қажетті және жеткілікті шарттарын құрайды.*

Теорема шартынан, жорамал бөлігі екі айнымалының функциясы ретінде (x_0, y_0) нүктесінде дифференциалданатын функция болатыны шығады. Олай болса, жорамал бөліктің (x_0, y_0) аймағындағы өсімшесі мына түрде жазылады

$$\Delta u(x,y) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_0 \Delta x + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_0 \Delta y + \bar{\bar{o}}\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right).$$

Ұқсас тәсілмен

$$\Delta v(x,y) = \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_0 \Delta x + \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_0 \Delta y + \bar{\bar{o}}\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$$

қатынасын аламыз.

$$\begin{aligned}\Delta f = \Delta u + i\Delta v = \left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_0 + i\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_0\right)\Delta x + \\ + \left(\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_0 + i\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_0\right)\Delta y + \bar{\bar{o}}\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)\end{aligned}$$

болғандықтан. Бұдан, Коши-Риман қатынасын ескерсек,

$$\Delta f = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_0 + i\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_0 \right)\Delta x + \left(-\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_0 + i\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_0 \right)\Delta y + \overline{\overline{o}}\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_0 + i\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_0 \right)(\Delta x + i\Delta y) + \overline{\overline{o}}\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_0 + i\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_0 \right)(\Delta z) + \overline{\overline{o}}(\sqrt{|\Delta z|})$$

теңдігін аламыз. Осыдан $f(z)$ функциясының z_0 нүктесінде туындысының бар болуы шығады. Жеткіліктілік дәлелденді. Қажеттілік бұрын дәлелденген.