№3-дәріс. Векторлар. Скалярлық көбейтінді. Векторлар

Вектор деп бағытталған кесіндіні айтады, яғни кесіндінің белгілі бір ұзындығы және бағыты болады. Егер A – вектордың басы, ал B –вектордың ұшы болса, онда вектор $\overline{AB}$ немесе $\overline{a}$ символымен белгіленеді. $\overline{BA}$ векторы $\overline{AB}$ векторына ***қарама-қарсы вектор*** деп аталады (оның басы B нүктесінде, ал ұшы A нүктесінде орналасқан). $\overline{a}$ векторына қарама-қарсы векторды $-\overline{a}$ деп белгілейді. $\overline{a}$ векторының ***ұзындығы*** немесе ***модулі*** деп $\overline{AB}$ кесіндісінің ұзындығын айтады және оны $\left|\overline{AB}\right|$ немесе $\left|\overline{a}\right|$ деп белгілейді. Ұзындығы нөлге тең векторды ***нөлдік вектор*** деп атайды және ол $\overline{0}$ деп белгіленеді. Нөлдік вектордың бағыты болмайды.

Ұзындығы бірге тең векторды ***бірлік вектор*** деп атайды және оны $\overline{e}$ деп белгілейді. Егер бірлік вектордың бағыты $\overline{a}$ векторының бағытымен сәйкес келсе, онда ол $\overline{a}$ векторының ***орты*** деп аталады және $\overline{a}^{0}$ деп белгіленеді.

Параллель түзулерде немесе бір түзудің бойында жататын векторлар ***коллинеар векторлар*** деп аталады және $\overline{a}\parallel\overline{b}$ деп белгіленеді. Коллинеар векторлар бағыттас болуы да, қарама-қарсы бағытта да болуы мүмкін.

Егер екі $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторлары коллинеар болып, бағыттас және ұзындықтары бірдей болса, онда оларды ***тең векторлар*** ($\overline{a}=\overline{b}$) дейді. Тең векторлар еркін векторлар деп те аталады. Бұл векторлардың басталған нүктесін кеңістіктегі кез келген нүктеге көшіруге болады. Аналитикалық геометрияда еркін (бос) векторлар қарастырылады.

Егер кеңістіктегі үш вектор бір жазықтықта немесе параллель жазықтықтарда жатса, онда олар ***компланар векторлар*** деп аталады.

Векторларға қолданылатын сызықтық амалдар

Сызықтық амалдар деп, векторларды қосу және алу, векторды санға көбейту амалдарын айтады.

Екі вектордың қосындысын екі жолмен табуға болады: бірі параллелограмм әдісі, екіншісі үшбұрыштар әдісі.

Параллелограмм әдісі. $\overline{a}$ және $\overline{b}$ ***векторларының қосындысы*** $\vec{a}+\vec{b}$ деп, $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторларының ортақ бас нүктесінен шығатын, параллелограммның диагоналіне сәйкес келетін векторды айтады.

Үшбұрыштар әдісі. Егер $\overline{b}$ векторының басы $\overline{a}$ векторының ұшына орналасса, онда $\overline{a}$ және $\overline{b}$ ***векторларының қосындысы*** $\vec{a}+\vec{b}$ деп, $\overline{a}$ векторының басы мен $\overline{b}$ векторының ұшын қосатын векторды айтады.

Бір нүктеден шығатын $\overline{a}$ және $\overline{b}$ ***векторларының айырымы*** $\vec{a}-\vec{b}$ деп $\overline{b}$ векторының ұшын $\overline{a}$ векторының ұшымен қосатын векторды айтады.

$\overline{a}$ векторының λ санына көбейтіндісі деп ұзындығы $\left|\lambda\right|\left|\overline{a}\right|$-ға тең, $\overline{a}$ векторына коллинеар, егер $\lambda>0$ болса $\overline{a}$ векторымен бағыттас және $\lambda<0$ болса, $\overline{a}$ векторына қарама-қарсы бағытталған $\overline{b}=\lambda\overline{a}$ векторын айтады. $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторларының ***коллинеарлығының қажетті және жеткілікті шарты:*** $\overline{a}=\lambda\overline{b}$ $(\lambda\neq 0)$

Векторлардың сызықтық тәуелділігі. Базис

$\overline{a_1},\overline{a_2},\ldots,\overline{a_n}$ векторлар жүйесі берілсін.

$\overline{a_1},\overline{a_2},\ldots,\overline{a_n}$ векторлар жүйесі үшін бәрі бірдей нөлге тең емес және

$$\lambda_1\overline{a_1}+\lambda_2\overline{a_2}+\ldots+\lambda_n\overline{a_n}=0 \qquad (3.1)$$

теңдігін қанағаттандыратын $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ сандары табылса, онда $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ векторларын ***сызықтық тәуелді векторлар*** деп атайды. Ал егер (3.1) теңдік тек $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ сандарының барлығы бірдей нөлге тең болғанда ғана орындалса, онда $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ векторлар жүйесі ***сызықтық тәуелсіз*** деп аталады.

Егер $\overline{b} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \ldots + \lambda_n \overline{a_n}$ теңдігі орындалатын $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ сандары табылса, онда $\overline{в}$ векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ векторларының ***сызықтық комбинациясы*** деп аталады.

Теорема. Екі вектор сызықтық тәуелді болуы үшін олардың өзара коллинеар болуы қажетті және жеткілікті.

Бұл теоремадан кез келген коллинеар емес ***екі вектор сызықтық тәуелсіз*** болады деген қорытынды шығады.

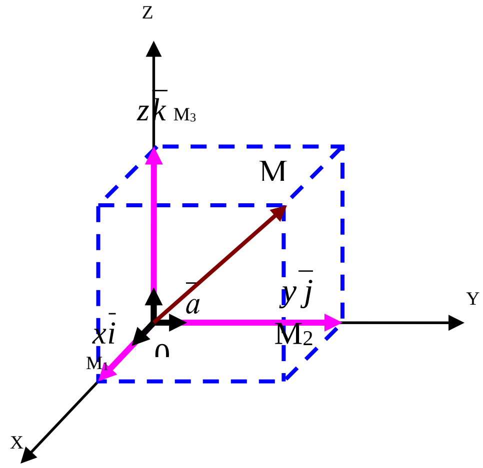
Теорема. Үш вектор сызықтық тәуелді болуы үшін олардың компланар болуы қажетті және жеткілікті. Бұл теоремадан кез келген компланар емес үш ***вектор сызықтық тәуелсіз векторлар*** жүйесін құрайды деген қорытынды шығады. Егер жазықтықта кез келген $\overline{a}$ векторы үшін x_1, x_2 нақты сандары табылып, мына теңдік $\overline{a} = x_1 \overline{e_1} + x_2 \overline{e_2}$ орындалса, онда белгілі ретпен алынған $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ сызықтық тәуелсіз векторлар жұбы ***жазықтықтағы базис*** деп аталады. Мұндағы x_1, x_2 сандары $\overline{a}$ векторының $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ базисіндегі координаттары деп аталады да былай белгіленеді: $\overline{a}(x_1, x_2)$. Егер кеңістікте кез келген $\overline{b}$ векторы үшін x_1, x_2, x_3 нақты сандары табылып, мына теңдік $\overline{b} = x_1 \overline{e_1} + x_2 \overline{e_2} + x_3 \overline{e_3}$ орындалса, онда белгілі ретпен алынған сызықтық тәуелсіз $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ векторлар үштігін ***кеңістіктегі базис*** деп атайды. Мұндағы x_1, x_2, x_3 сандары $\overline{b}$ векторының $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ базисіндегі координаттары деп аталады да былай белгіленеді: $\overline{b}(x_1, x_2, x_3)$.

Базисті құраушы векторлар ***базистік векторлар*** деп аталады. Осы анықтамалар мен теоремалардан кез келген коллинеар емес екі вектор жазықтықта, ал кез келген компланар емес үш вектор кеңістікте базистік векторлар жүйесі болады деген қорытынды шығады.

Векторды координат өстердің орттары арқылы жіктеу. Вектордың модулі. Кеңістіктегі тік бұрышты декарттық $Oxyz$ координаталар жүйесін қарастырайық. *Ox, Oy, Oz* координат өстерінің бойында жатқан бірлік (орт) векторларды сәйкесінше $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ деп белгілейік. Сонда реттелген үштік $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ кеңістікте базистік векторлар жүйесін құрайды. Мұндай, базистік векторлар жүйесін ортогональ базистік жүйе (базис) деп атайды $(\overline{i} \perp \overline{j} \perp \overline{k})$. $\overline{a} = \overline{OM} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, себебі үш вектордың қосындысы.

Бұл формула $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ ***вектордың координат өстерінің орттары арқылы жіктелген*** түрі деп аталады немесе қысқаша $\overline{a} = (x, y, z)$ деп жазады.

Екінші жағынан $\left|\overline{OM}\right|^2 = \left|\overline{OM_1}\right|^2 + \left|\overline{OM_2}\right|^2 + \left|\overline{OM_3}\right|^2 = x^2 + y^2 + z^2$, Осыдан $\overline{OM} = \overline{a}$ болғандықтан $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ***- вектордың модулі (ұзындығы).***



1-мысал. Егер $\vec{a}=(1,2,3)$, онда $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$ Егер $\bar{a}$ векторы $Ox,\ Oy,\ Oz$ өстерімен сәйкесінше α,β,γ бұрыштарын құрса, онда

$x=|\bar{a}|\cos\alpha,\quad y=|\bar{a}|\cos\beta,\quad z=|\bar{a}|\cos\gamma$, осыдан $\cos\alpha=\dfrac{x}{|\bar{a}|},\ \cos\beta=\dfrac{y}{|\bar{a}|},\ \cos\gamma=\dfrac{z}{|\bar{a}|}$ болады.

Мұндағы $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ сандары $\bar{a}$ ***векторының бағыттаушы косинустары*** деп аталады. Алдыңғы өрнекті вектордың модулінің формуласына қойып, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ теңдігін аламыз. $\bar{e}$ бірлік векторының коодинаттары $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ екенін оңай байқауға болады . Сонымен, $\bar{e}=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$.

2-мысал. $\vec{a}=(1,2,2)$, векторы үшін $\vec{a}^0=\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$

Координаттарымен берілген векторларға амалдар қолдану

$\bar{a}=(x_1,y_1,z_1)=x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k},\ \ \bar{b}=(x_2,y_2,z_2)=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}$ болса,

$1.\ \bar{a}\pm\bar{b}=(x_1\pm x_2;y_1\pm y_2;z_1\pm z_2)$

$2.\ \lambda\bar{a}=(\lambda x_1;\lambda y_1;\lambda z_1)$

Векторлардың теңдігі

$x_1=x_2,\ y_1=y_2,\ z_1=z_2$ болғанда ғана $\bar{a}$ және $\bar{в}$ векторлары тең болады, яғни

$\bar{a}=\bar{b}\ \Leftrightarrow\ \ x_1=x_2,\ y_1=y_2,\ z_1=z_2$

Векторлардың коллинеарлығы. $\bar{a}\parallel\bar{в}$ болғандықтан оны $\bar{a}=\lambda\bar{b}$ деп жазуға болады, мұндағы λ - қайсыбір сан. Осыдан $(x_1,y_1,z_1)=\lambda(x_2,y_2,z_2)\ \Rightarrow\ \dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$ -екі вектордың коллинеарлығының белгісі.

Нүктенің координатасы. Кеңістікте тік бұрышты декарттық $Oxyz$ координаттар жүйесі берілсін. Кез келген ***М нүктесінің координаты*** деп, $\overline{OM}$ векторының координатын айтады. $\overline{OM}$ векторы M нүктесінің радиус-векторы деп аталады және $\overline{OM}=\bar{r}$ деп белгіленеді. Сонымен, $\bar{r}=(x;y;z)$ немесе $\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$. M нүктесінің координатасы $M(x;y;z)$ деп жазылады.

Вектордың координатасы. Егер $A(x_1;y_1;z_1)$ және $B(x_2;y_2;z_2)$ нүктелерінің координаттары берілсе, онда $\bar{a}=\overline{AB}$ ***векторының координатасы*** былай есептелінеді: $\overline{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$.

3-мысал. $A(1,-1,1)$, $B(2,3,4)$ берілсе, онда $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ базисінде $\overline{AB}=\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$,

$\vec{AB}=\{1;4;3\}$.

Кесіндіні берілген қатынаста бөлу. $A(x_1;y_1;z_1)$ және $B(x_2;y_2;z_2)$ нүктелері арқылы өтетін кесінді берілсін. Осы кесіндіні $\lambda>0$ қатынасындай етіп бөлетін $N(x;y;z)$ нүктесінің координаттары: $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$ - ***кесіндіні берілген қатынаста бөлу формулаларымен*** анықталады. Егер $\lambda=1$ болса, яғни $\overline{AN}=\overline{NB}$ онда

$x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$, $z=\frac{z_1+z_2}{2}$ - ***кесіндінің ортасын табу формуласы.***

Векторлардың скалярлық көбейтіндісі

Анықтама. Екі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының ***скалярлық көбейтіндісі*** деп $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$ санын айтады. Скаляр көбейтінді $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\vec{b}$, $(\vec{a},\vec{b})$ символдармен белгіленеді. Мұндағы $\varphi=(\bar{a},\wedge\bar{b})$ $пр_{\bar{в}}\bar{a}=|\bar{a}|\cos\varphi$ ($\varphi=(\bar{a},\wedge\bar{b})$), болғандықтан $\bar{a}\bar{b}=|\bar{b}|пр_{\bar{в}}\bar{a}=|\bar{a}|пр_{\bar{a}}\bar{в}$ деп жазуға болады.

4-мысал. Егер $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $(\vec{a},\wedge\vec{b})=\frac{\pi}{3}$, онда $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot4\cdot\cos\frac{\pi}{6}=6$

Теорема. $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ базисінде $\vec{a}$ векторының координаталары (x_1,y_1,z_1), ал $\vec{b}$ векторының координаталары (x_2,y_2,z_2) болсын. Онда $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

5-мысал. Егер $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(4,5,6)$ болса, онда $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6=32$

Скалярлық көбейтіндінің қолданылуы

1. $\cos\varphi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ немесе $\cos\varphi=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

2. $\bar{a}\perp\bar{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$

3. $пр_{\bar{в}}\bar{a}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{в}}{|\bar{в}|}$ ($пр_{\bar{a}}\bar{в}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{в}}{|\bar{a}|}$) немесе $пр_{\bar{в}}\bar{a}=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

Векторлық және аралас көбейтінділер. Векторлардың векторлық көбейтіндісі

Үш компланар емес $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторлары берілсін. Егер $\bar{c}$ векторының ұшынан қарағанда $\bar{a}-$дан $\bar{b}-$ға дейінгі ең қысқа бұрылыс сағат тіліне қарсы бағытта орындалса, онда $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторлары ***оң үштік***, ал $\bar{a}-$дан $\bar{b}-$ға дейінгі ең қысқа бұрылыс сағат тілімен бағыттас болса, онда $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ ***сол үштік*** құрайды дейді.

Анықтама. $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының ***векторлық көбейтіндісі*** деп, келесі үш шартты қанағаттандыратын $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ векторын айтады:

1) $\bar{c} \perp \bar{a},\ \bar{c} \perp \bar{b}$;

2) $\vec{c}$ векторының ұзындығы $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларына тұрғызылған параллелограммның ауданына тең, яғни $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$, мұндағы $\varphi = (\bar{a}, \wedge \bar{b})$;

3) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторлары оң үштік құрайды.

Векторлық көбейтінді $\vec{a} \times \vec{b}$ немесе $[\bar{a}, \bar{b}]$ деп белгіленеді.

Векторлық көбейтіндінің анықтамасынан $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$, $\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$ болады

Векторлық көбейтіндінің қасиеттері:

1. $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$;

2. $\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda \bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda \bar{b})$;

3. Нөлдік емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары $\vec{b} \times \vec{a} = 0$ жағдайда ғана колинеар;

4. $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}$.

Теорема. Егер $(\bar{i}; \bar{j}; \bar{k})$ базисінде $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ векторлары берілсе, онда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \bar{k}.$$

1-мысал. $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (4, 5, 6)$ векторларының векторлық көбейтіндісін табу керек.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) - \vec{j}(1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) + \vec{k}(1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = -3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k} = (-3,\ 6,\ -3).$$

Векторлық көбейтіндінің қолданылуы

1. $S_{пар} = |\bar{a} \times \bar{b}|$, $S_{\Delta} = \dfrac{|\bar{a} \times \bar{b}|}{2}$

2. Егер $\bar{a} \parallel \bar{b}$ болса, онда $\bar{a} \times \bar{b} = 0$ (және керісінше)

Векторлардың аралас көбейтіндісі

Анықтама. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі деп, $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісі мен $\bar{c}$ векторының скаляр көбейтіндісін айтады. $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$

Аралас көбейтінді $(\overline{a}\times\overline{b})\overline{c}$ не $[\overline{a}\overline{b}]\overline{c}$ немесе $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ түрінде жазылады. Аралас көбейтіндінің нәтижесі санға тең.

Аралас көбейтіндінің қасиеттері:

1. $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=(\overline{b}\times\overline{c})\cdot\overline{a}=(\overline{c}\times\overline{a})\cdot\overline{b}$;
2. $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c})$;
3. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}$;
4. Егер векторлар $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланар болса, онда $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=0$.

Теорема. $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ базисінде $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$ векторлары берілсін, онда олардың аралас көбейтіндіні анықтауыш түрінде жазуға болады.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Аралас көбейтіндінің қолданылуы

1. Егер $\overline{a}\overline{b}\overline{c}>0$ болса, онда $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ -оң үштік; егер $\overline{a}\overline{b}\overline{c}<0$ болса, онда $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - сол үштік құрайды.
2. $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=0 \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторлары компланар.
3. $V_{пар}=|\overline{a}\overline{b}\overline{c}|$, $V_{пир}=\frac{1}{6}|\overline{a}\overline{b}\overline{c}|$.

Әдебиеттер: 1 нег. [45-65 беттер, 11 қос. [136-156].

Бақылау сұрақтар:

1. Вектор деген не? Векторларға қандай амалдар қолданылады?
2. Скаляр көбейтіндінің механикалық мағынасын түсіндіріңіз.
3. Скаляр көбейтіндінің векторлық көбейтіндіден айырмашылығы неде?
4. Аралас көбейтінді дегеніміз не?
5. Векторлық және аралас көбейтінділердің геометриялық мағынасын түсіндіріңіз.