№5-дәріс. Тізбектің және функцияның шектері

Анықтама. X және Y бос емес сандар жиындары болсын. Егер X жиынының кез келген x элементіне белгілі бір заңдылықпен Y жиынының бір y элементі сәйкес келетін болса, онда X жиынында $y = f(x)$ ***функциясы*** берілді дейді. Мұндай жағдайда $x-$ті ***тәуелсіз шама (аргумент),*** ал $y-$ті ***тәуелді шама*** деп атайды. f әрпі X пен Y жиындарының арасында сәйкестік заңдылықты береді. X жиыны функцияның анықталу облысы, ал Y жиыны функция мәндерінің жиыны деп аталады.

Функцияның үш түрлі жолмен беріледі:

а)Аналитикалық тәсілмен;

б) Таблицалық, яғни мәндер тәсілімен;

в) Графиктік тәсілмен

Функцияның негізгі қасиеттері

1. Анықтама. Егер X аралығында жатқан барлық x нүктелері үшін $|f(x)| \le M$ теңсіздігі орындалатындай $M > 0$ саны табылса, онда $f(x)$ функциясы X аралығында ***шектелген функция*** деп аталады. Дербес жағдайда, $y = x$ болғанда $|x| \le M$ шарты $x-$айнымалысының шектеулігін көрсетеді.

2. Аралықта өсетін және кемитін функциялар

Анықтама. $[a,b]$ сегментінде (аралығында) анықталған $f(x)$ функциясы үшін $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$ болғанда $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ теңсіздігі орындалса, онда $f(x)$ осы аралықта өспелі (кемімелі) ***функция*** деп аталады.

Функция аралықта өспелі немесе кемімелі болса, онда бұл аралық ***монотондық аралық***, ал $f(x)$ функциясы осы аралықта ***монотонды*** деп аталады.

Мысал. $y = x^2$ функциясы $(-\infty,+\infty)$ аралығында монотонды және: $(-\infty;0)$ интервалында кемімелі, ал $(0;+\infty)$ интервалында өспелі.

3. Жұп және тақ функциялар.

а) $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$ болса, $f(x)$- жұп функция;

б) $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$ болса, $f(x)$- тақ функция.

4. Периодты функциялар. D облысында анықталған $f(x)$ фукциясы үшін $T > 0$ саны табылып, $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in D$, теңдігі орындалса, онда $f(x)$ периодты функция деп аталады.

5. Күрделі функция . $y = f(u)$ функциясының анықталу облысы U, мәндер жиыны Y болсын, ал u айнымалысы X жиынында анықталған $x-$ке тәуелді, мәндер жиыны U болатын функция болсын: $u = \varphi(x)$. Сонда X жиынында берілген, мәндер жиыны Y болатын $y = f(\varphi(x))$ функциясы ***күрделі функция*** деп аталады.

Мысалы, $y = lncosx$-күрделі функция, өйткені оны былай жазуға болады: $y = lnu, u = cosx$.

6. Кері функция. $y = f(x)$ функциясының анықталу облысы X, ал мәндер жиыны Y болсын. Әрбір $y \in Y$ мәніне $f(x) = y$ теңдігі орындалатындай бір $x \in X$ мәнін сәйкес қойсақ, онда Y жиынында анықталған, ал мәндер жиыны X болатын $x = \varphi(y)$ функциясы анықталады. Осы функция $y = f(x)$ функциясының ***кері функциясы*** деп аталады және ол $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$ түрінде жазылады. $y = f(x)$ және $x = \varphi(y)$ функциялары өзара кері функциялар деп аталады.

7. Белгісіз функция y анық түрде берілмей, $F(x,y) = 0$ түрінде берілсе, онда $F(x,y) = 0$ тәуелділігі ***айқындалмаған функция*** деп аталады.

8. Функцияның $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $\alpha < t < \beta$ параметрлік түрде берілуі. Егер $x=\varphi(t)$ функциясы үшін $t=\Phi(x)$ кері функция табылса, онда $y=\psi(\Phi(x))=f(x)$ түрдегі $y-$тің $x-$ке тәуелді функциясын аламыз.

Ескерту: Функцияның параметр арқылы берілуі функцияның координат жүйесінде берілуінен көп тиімді, әрі кеңірек қолданылады.

Функцияның нүктедегі шегі

Анықтама. a нүктесінің маңайы осы нүкте жататын кез келген интервал.

Дербес жағдайда, a нүктесінің $\delta-$маңайы $-$ $(a-\delta, a+\delta)$ интервалы. $\delta-$маңайы $U_\delta(a)$ түрінде белгіленеді.

Анықтама. Егер кез келген $\varepsilon>0$ саны үшін $\delta>0$ саны табылып, кезкелген $x\in U_\delta(a)$ үшін $|f(x)-A|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда A саны $f(x)$ функциясының x шамасы $a-$ға ұмтылғандағы $(x\to a)$ шегі деп аталады да, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ түрінде белгіленеді.

Ескерту: $f(x)$ функциясы a нүктесінде анықталуы да, анықталмауы да мүмкін.

Анықтама. Егер $\forall\varepsilon>0$ (кезкелген $\varepsilon>0$) саны, үшін $\exists\delta>0$ ($\delta>0$ саны) табылып, $\forall x\in(a-\delta, a)$ үшін $|f(x)-A|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда A саны $f(x)$ функциясының $x-$тің $a-$ға сол жақтан ұмтылғандағы шегі немесе $f(x)$ функциясының a нүктесіндегі сол жақ шегі делінеді. Белгіленуінде: $f(a-0)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$.

Анықтама. Жоғарыдағыдай $f(a+0)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ $f(x)$ функциясының a нүктесіндегі оң жақ шегі деп аталады.

Функцияның ақырсыздықтағы шегі

Анықтама. Кезкелген $\varepsilon>0$ ($\forall\varepsilon>0$) саны үшін қандай да бір M саны табылып, $x>M$ болғанда $|f(x)-A|<\varepsilon$ орындалса, онда A саны $f(x)$ функциясының $x\to+\infty$ шегі деп аталады және $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ түрінде белгіленеді.

Анықтама. $\forall\varepsilon>0$ саны үшін, M саны табылып, $x<M$ болғанда $|f(x)-A|<\varepsilon$ орындалса, онда A саны $f(x)$ функциясының $x\to-\infty$ шегі деп аталады және $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ түрінде белгіленеді.

Анықтама. $\forall\varepsilon>0$ үшін, $M>0$ саны табылып, $|x|>M$ теңсіздігін қанағаттандыратын $x-$тер үшін $|f(x)-A|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда A саны $f(x)$ функциясының $x\to\infty$ шегі деп аталады және $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ түрінде белгіленеді.

Ескерту: Жоғарыдағы анықтамалардан $f(x)$ функциясы ретімен алғанда $(M,+\infty)$, $(-\infty, M)$, $(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)$ интервалдарында анықталады деп есептеледі. Дербес жағдайда, егер $f(x)$ функциясы $N=\{1,2,3,\dots\}$ натурал сандар жиынында да анықталса, онда

$$a_1=f(1),\ a_2=f(2),\ a_3=f(3),\ \dots,\ a_n=f(n,)\ \dots$$

Белгілеулері $\{a_n\}$ сан тізбегін анықтайды. Ал $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ өрнегі былайша $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ сан тізбегі шегіне көшеді. Функцияның нүктедегі және ақырсыздықтағы шектерін шартты түрде $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ($a-$сан немесе $+\infty$, $-\infty$, ∞ шексіздіктерінің біреуі) етіп белгілейік. Онда функция шегінің қасиеттері мен тізбектер шегінің қасиеттері бірдей болады. Мысалы:

1) Тұрақты функцияның (тізбектің) шегі осы тұрақтыға тең,
2) Егер функцияның (тізбектің) шегі болса, онда ол жалғыз болады.

Анықтама. $f(x)$ функциясы Δ жиынында анықталып, $\forall x \in \Delta$ үшін C саны табылып, $f(x) \le C$ ($f(x) \ge C$) теңсіздігі орындалса, онда $f(x)$ функциясы Δ жиынында жоғарыдан (төменнен) шектелген делінеді. Функция жоғарыдан (төменнен) шектелсе, онда ол Δ аралығында шектеулі. Мысалы,

а) $y = \sin x$ функциясы $(-\infty,+\infty)$ аралығында шектеулі, себебі кезкелген $x \in (-\infty,+\infty)$ үшін $-1 \le \sin x \le 1$;

б) $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ тізбегі шектеулі. $f(a-0)$, $f(a+0)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ шектері бар болғанда, функция $(a-\delta, a), (a, a+\delta), (M,+\infty), (-\infty, M)$ интервалдарында шектеулі.

в) $y = f(x)$ функциясы а нүктесінің маңайында шектеулі.

г) Шегі бар кезкелген сан тізбегі шектеулі.

Теорема. (a,b) интервалында функция өспелі (кемімелі) болса және осы аралықта жоғарыдан (төменнен) C санымен шектелсе, онда $f(b-0) = A$, $\left(f(a+0) = A\right)$, яғни функцияның b нүктесінде сол жақ (a нүктесінде оң жақ) шегі табылады және $A \le C$ $(A \ge C)$.

Жаттығу: Бұл теореманы сан тізбегі үшін келтіріңіз.

Шексіз аз және шексіз үлкен функциялар.

Анықтама. Егер $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$ болса, онда теңдігі орындалса, онда $\alpha(x)$ функциясы $x \to a$ (x шамасы a –ға ұмтылғанда) шексіз аз шама (ш.а.ш.) деп аталады.

Анықтама. Егер $\lim\limits_{x\to a}\beta(x) = +\infty$ болса, онда $\beta(x)$ функциясы $x \to a$ -ғы шексіз үлкен шама (ш.ү.ш.) деп атайды.

Теорема. Егер $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$ (ш.а.ш.) болса, $\alpha(x) \ne 0, \forall x\, U_\delta(a)$ болса, онда $F(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ - функциясы $x \to a$ -ға ш.ү.ш. болады. Бұл теорема керісінше де ақиқат.

Шектер туралы негізгі теоремалар. Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, болса, онда

1. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) \pm g(x)\right) = A \pm B$

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = A \cdot B$

3.Кезкелген $x \in U_\delta(a)$ үшін, $g(x) \ne 0$ және $B \ne 0$ болса, онда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

1-мысал. 1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2 - 2x + 7\right) = 3\cdot 1 - 2\cdot 1 + 7 = 8$. Шекті есептеу үшін x-тің мәнін қойғанда $\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$; 1^∞; $0\cdot\infty$; т.с.с. анықталмағандықтар пайда болады. Шекті есептеу деп осы анықталмағандықтарды ашуды айтады.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+16}{x-4} = \dfrac{18}{-2} = -9$.

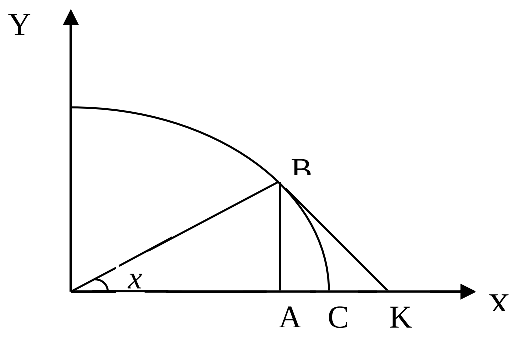
3. $$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 2x + 5} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2 + 3x + 1}{x^2}}{\dfrac{4x^2 + 2x + 5}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{4 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{x^2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

4.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\frac{2}{\infty}=0.$$

Бірінші және екінші тамаша шектер.

Бірінші тамаша шек. Құрамында тригонометриялық функциялар бар өрнектердің шектерін есептегенде бірінші тамаша шекті қолданады: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. *Дәлелдеу:* Радиусы бірге тең шеңбер аламыз. $\angle BOA=x$, сонда:



$AB<BC<BK$, мұндағы

$AB=\sin x,\ BC=x,\ BK=tgx$

$\sin x<x<tgx:\sin x$

$$1<\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}<\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

1-мысал. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\cdot\frac{1}{cosx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{cosx}=1$

2-мысал. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1\cdot 2x}{1\cdot 3x}=\frac{2}{3}.$

Екінші тамаша шек: $a)\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e,\quad б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,\quad в)\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

Мұндағы $e\approx 2{,}718282\ldots$ – иррационал сан.

3-мысал. Шекті есептеу керек

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+1}{2x+3}-1\right)^{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+1-2x-3}{2x+3}\right)^{3x+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2x+3}\right)^{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{-2}}\right]^{\frac{-2}{2x+3}(3x+2)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6x-4}{2x+3}}=e^{-3}.$$

Шексіз аздарды салыстыру. Екі шексіз аз шамаларды салыстыру үшін олардың қатынасын қарастырады. $y=\alpha(x)$, $y=\beta(x)$- ш.а.ш. болсын, яғни $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ және $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$.

1. Егер $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$ болса, онда $x\to a$ ұмтылғанда $y=\alpha(x)$, $y=\beta(x)$ ш.а.ш.-ның аздық реттері бірдей дейді.

2. Егер $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ болса, онда $x\to a$ ұмтылғанда $y=\alpha(x)$, $y=\beta(x)$ шексіз аз шамалар эквивалентті деп аталады және $\alpha(x)\sim\beta(x)$ деп белгіленеді.

Мысал. $y=x$, $y=\sin x$ шексіз аздар $x\to 0$ ұмтылғанда эквивалентті, бұл бірінші тамаша шектің қасиетінен шығады.

Теорема. $x\to a$ ұмтылғанда $\alpha(x)$ ш.а. болсын, онда:

1. $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$; 2. $tg\alpha(x)\sim\alpha(x)$;
3. $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$; 4. $arctg\alpha(x)\sim\alpha(x)$;
5. $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$; 6. $b^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\cdot\ln b$, $(b>0)$;

Теорема. Егер ш.а.ф. –ды оларға эквивалентті функциялармен алмастырса, онда екі ш.а.ф. қатынасының шегі өзгермейді.

4-мысал. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx\cdot\left(\sqrt{1+2x}-1\right)}{\ln(1+3x)\cdot\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{2x}{2}}{3x\cdot 5x}=\frac{1}{15}$,

себебі, $arctgx\sim x$, $\sqrt{1+2x}-1\sim 2x/2$, $\ln(1+3x)\sim 3x$, $\sin 5x\sim 5x$.

Функцияның үзіліссіздігі. Функцияның нүктедегі үзіліссіздігі ұғымын беру үшін 3 шартты келтіреміз:

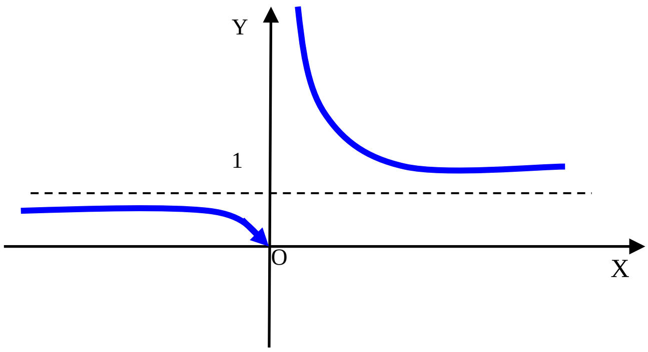
1. $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде анықталған (яғни $f(x_0)$ мәні бар);
2. $x\to x_0$ (x шамасы x_0-ге ұмтылғанда) болғанда $f(x)$ функциясының ақырлы шегі $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ бар;
3. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ шегі функцияның x_0 нүктесіндегі мәніне тең: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

1−анықтама. Егер $y=f(x)$ функциясы келтірілген үш шартты қанағаттандырса, онда оны x_0 нүктесінде үзіліссіз дейді. Функцияның x_0 нүктесіндегі үзіліссіздігінің анықтамасының формуласын былай жазуға болады: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0}x\right)$ Функция x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда оның графигін x_0 нүктесі арқылы үзіліссіз сызуға (қарындашты қағаздан алмай) болады. Енді үзіліссіздіктің екінші анықтамасын берейік. x_0 аргументіне Δx өсімшесін берсек, $y=f(x)$ функциясы Δy өсімшесін алады. Ол $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ формуласымен анықталады.

2−анықтама. Егер $y=f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде анықталса және $\lim\limits_{x\to 0}\Delta y=0$ теңдігі орындалса, онда ол функцияны x_0 нүктесінде үзіліссіз дейді. Үзіліссіздіктің осы екі анықтамасы өзара эквивалентті. Егер $f(x)$функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз болмаса, онда бұл нүкте $f(x)$ функциясының үзіліс нүктесі деп аталады. Үзіліс нүктесінің екі түрі бар. Егер $f(x)$ функциясың x_0 нүктесінде оң жақты және сол жақты шектері бар болып, бірақ олар өзара тең болмаса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының ***бірінші текті үзіліс нүктесі*** деп аталады. Егер оң жақты және сол жақты шектердің ең болмағанда біреуі не шексіздікке тең болып, не жоқ болса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының ***екінші текті үзіліс нүктесі*** деп аталады. Егер $x=x_0$ нүктесінде ақырлы оң жақты және сол жақты шектер бар болып, бірақ олар осы нүктедегі функцияның мәніне тең болмаса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының ***түзетілетін үзіліс нүктесі*** деп аталады.

5-мысал. $y = e^{1/x}$ функциясы үшін $x_0 = 0$ нүктесі екінші текті үзіліс нүктесі болады, себебі

$$\lim_{x \to 0-} e^{1/x} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{\infty} = 0, \qquad \lim_{x \to 0+} e^{1/x} = e^{+\infty} = +\infty$$



Егер $y = f(x)$ функциясы (a,b) аралығының әрбір нүктесінде үзіліссіз болса, онда оны (a,b) ***аралығында үзіліссіз*** дейді. Егер $y = f(x)$ функциясы (a,b) аралығында үзіліссіз болып, ал $x = a$ нүктесінде оң жақтан (яғни $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$), ал $x = b$ нүктесінде сол жақтан (яғни $\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$) үзіліссіз болса, онда $y = f(x)$ функциясын $[a,b]$ ***кесіндісінде үзіліссіз*** дейді.

Кесіндіде үзіліссіз функциялардың қасиеттері

1. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда ол осы кесіндіде ақырлы (шенелген)
2. **Вейерштрасс теоремасы** Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда ол осы кесіндіде өзінің ең кіші және ең үлкен мәндерін қабылдайды.
3. **Больцано-Коши теоремасы** Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және және $x = a$, $x = b$ нүктелеріндегі мәндері әртүрлі таңбалар қабылдаса ($f(a) \cdot f(b) < 0$), онда $f(c) = 0$ теңдігі орындалатындай $[a,b]$ кесіндісінің ең болмағанда $c \in (a,b)$ бір нүктесі бар.

Бір айнымалы функциялардың дифференциалдық есептеулері. Функцияның туындысы

Айталық, $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде және оның маңайында анықталған болсын.

Анықтама. Аргумент x-тің x_0 нүктесіндегі өсімшесі деп $\Delta x = x - x_0$ айырмасын атайды.

Анықтама. $y = f(x)$ функцияның x_0 нүктесіндегі өсімшесі деп $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ айырмасын айтады .

Анықтама. Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінің маңайында анықталған және $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$ болса, онда ол x_0 нүктесінде үзіліссіз деп аталады. Шындығында да $\lim_{\Delta x \to 0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Анықтама. $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысы деп

$$y'(x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ ақырлы шегін айтады.

Бұл туынды мына символдардың бірімен белгіленеді: $y'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, $y'\big|_{x=x_0}$, $\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}$, $f'(x_0)$.

Егер $y=f(x)$ функциясының (a,b) интервалының әрбір нүктесінде туындысы болса, онда оны осы интервалда дифференциалданады дейді. Туындыны табу амалын дифференциалдау дейді.

Теорема. Егер $y=f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданатын функция болса, онда ол бұл нүктеде үзіліссіз болады.

Ескерту: теорема керісінше дұрыс емес.

Туындының геометриялық маганасы. Туындының геометриялық мағынасы: $f'(x_0)$ туындысы $y=f(x)$ функциясының графигіне $(x_0, f(x_0))$ нүктесінде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті болады. Осы жанаманың теңдеуін былай жазады: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. Туындының механикалық мағынасы. Егер $x-$айнымалысын уақыт деп есептеп, $f(x)$ $-$ функциясы дененің жүрген жолын сипаттаса, онда $f'(x)$ дененің $x-$уақытындағы жылдамдығын білдіреді.

Дифференциалдаудың негізгі ережелері. Туындының анықтамасын пайдаланып, кейбір элементар (қарапайым) функциялардың туындыларын есептейміз.

1. Көрсеткішті функция $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$.

$$\left(a^x\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$ Дербес жағдайда

$$\left(e^x\right)' = e^x \ln e = e^x.$$

2. Тригонометриялық функциялар $y=\sin x$, $y=\cos x$.

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$ Дәл осылай $(\cos x)' = -\sin x$.

2. Дәрежелік функция $y=x^\alpha$. $\left(x^\alpha\right)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$

Дербес жағдайда, $\left(x^2\right)' = 2\cdot x^{2-1} = 2x$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -1x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}$.

Теорема 1. (қосындыны, көбейтіндіні және қатынасты дифференциалдау ережелері). Егер $y=u(x)$ және $y=v(x)$ дифференцианалданатын болса, онда бұл функциялардың қосындысы, көбейтіндісі және қатынасы да (қатынастың бөлімі $v(x)\neq 0$) осы нүктеде дифференцианалданады және мына формулалар орынды:

1. $(u\pm v)' = u'\pm v'$ 2. $(u\cdot v)' = u'v+uv'$ 3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Күрделі функцияның туындысы. $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ функциялары үзіліссіз және дифференциалданатын функциялар болсын. Сонда күрделі $y=f(\varphi(x))$ функциясының туындысы: $y' = f'_x = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = f'_u\cdot u'_x$. Сонымен $y' = f'_u\cdot u'_x$.

1–мысал. $y = \left(\sin x^2\right)'$ туындысын табу керек. Функцияны былай жазамыз $y = \sin x^2 = \sin u$, мұндағы $u = x^2$. Сондықтан $\left(\sin x^2\right)' = (\sin u)'\cdot(u)' = \cos u\cdot 2x = 2x\cdot\cos x^2$.

2–мысал. $y = (6x+7)^4$ туындысын табу керек. $y' = 4(6x+7)^3\cdot 6 = 24(6x+7)^3$.

Кері функцияның туындысы. $y = y(x)$ және оған кері $x = x(y)$ функциялары $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және дифференциалданатын болсын. Сонда кері функцияның туындысы: $x'_y = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}$. Сонымен $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ болады.

3–мысал. $(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Мұнда $y = \arcsin x$, $x = \sin y$. $y = \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$.

4–мысал. $(arctgx)' = \frac{1}{(tgy)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$.

Негізгі элементар функциялар туындыларының кестесі

1. $(c)' = 0.$	10. $(chx)' = shx$.
2. $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$.	11. $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$.
3. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$, $\left(e^x\right)' = e^x$.	12. $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$.
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.	13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
5. $(\sin x)' = \cos x$.	14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
6. $(\cos x)' = -\sin x$.	15. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$.
7. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.	16. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.
8. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.	
9. $(shx)' = chx$.	

Осы кесте мен туындыны есептеу ережелерінің жәрдемімен кез келген функциялардың туындысын табуға болады.

Параметр арқылы берілген функцияның туындысы. $y = f(x)$ функциясын кейде параметрлік түрде жазған ыңғайлы болады $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \qquad t \in [\alpha, \beta]. \end{cases}$

Онда $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{1}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$. Сонымен параметр арқылы берілген функцияның туындысы: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$

5–мысал. $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$, y'_x табу керек. Шешімі: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{2t}{3t^2} = \dfrac{2}{3t}$

Функцияның дифференциалы. $y = f(x)$ функциясының шектелген туындысы бар болсын, онда: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, демек $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$ $\left(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0 \right)$, $\alpha -$шексіз аз шама.

Онда функцияның өсімшесі былай жазылады: $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$. Осы теңдікте екінші қосылғыш $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, $\Delta x -$ке қарағанда жоғарғы ретті шексіз аз шама болғандықтан, бірінші қосылғыш $\Delta y -$ке эквивалентті шама болады.

Анықтама. Функцияның туындысының аргументтің өсімшесіне көбейтіндісін дифференциал деп атайды және мына түрде жазады: $dy = f'(x)\Delta x$. Дербес жағдайда, егер $y = x$ болса, онда $dy = (x)'\Delta x = \Delta x$, осыдан $dx = \Delta x$ және осыны пайдаланып дифференциалдың формуласын былай жазуға болады: $dy = f'(x)dx$. Осыдан $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, яғни туынды функцияның дифференциалының аргумент дифференциалына бөлінген мәніне тең.

Дифференциалды есептеу ережесі. Айталық $y = u(x)$ және $y = v(x)$ дифференциалданатын функциялар болсын,

1) $d(u \pm v) = du \pm dv$, $d(u + c) = du$, мұндағы c –сан.

2) $d(u \cdot v) = vdu + udv$, $d(cu) = c \cdot du$,

3) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$, егер $v(x) \neq 0$.

4) Егер $u = u(x)$ функциясы x нүктесінде дифференциалданатын, ал $y = f(u)$ u нүктесінде дифференциалданатын болса, онда $y = f(u(x))$күрделі функция үшін, $df(u) = f'(u) \cdot u'(x)dx = f'(u)du$. Бұл ережені ***бірінші дифференциал формасының инварианттығы*** деп атайды. Дифференциалды жуықтап есептеуге қолдануға болады. Айталық, $y = f(x)$ функциясы дифференциалданатын болсын, онда оның өсімшесі:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x), \text{ осыдан } f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Егер x_0 нүктесінде функцияның мәні берілсе, онда: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$.

6–мысал. $\sin 46^\circ$ -ты жуықтап есепте.

$f(x) = \sin x$, $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$, $x_0 = 45^\circ = \dfrac{\pi}{4}$, $\Delta x = 1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$

$$sin(45^{\circ}+1^{\circ}) \approx sin\frac{\pi}{4}+cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3,14}{180}\approx 0,7191.$$

Әдебиеттер: нег.[128-163], [173-181], 11 қос. [314-334].
Бақылау сұрақтар:
1. Фукцияның анықтамасын беріңіз. Функцияның анықталу облысы дегеніміз не?
2. Тақ және жұп функциялардың анықтамасын беріңіз.
3. Период және периодты функциялар.
4. Функциялардың шектері туралы негізгі теоремаларды атаңыз.

Әдебиеттер: 1 нег.[159-162], [164-169], [191-211], 11 қос. [335-358].
Бақылау сұрақтар:
1. Бірінші тамаша шек.
2. е санының анықтамасын келтіріңіз (екінші тамаша шек).
3. Функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің анықтамасын беріңіз.
4. Қандай нүктелер функцияның үзіліс нүктелері деп аталады?

Әдебиеттер: 1 нег.[211-238], 11 қос. [359-375], [377-385].
Бақылау сұрақтар:
1. Туындының анықтамасын келтіріңіз. Оның механикалық және геометриялық мағынасы қандай?
2. Кері функцияның туындысы туралы теорема. Кері тригонометриялық функцияларды дифференциалдау формулаларын жазыңыз.
3. Функцияның дифференциалының анықтамасын келтіріңіз. Жуықтап есептеуде дифференциалдың қолдануы неге негізделген?