Лекция 7. Поверхностный интеграл второго рода. Физический смысл поверхностного интеграла второго рода. Формула Стокса

Поверхностный интеграл второго рода

Пусть Φ - кусочно-гладкая ограниченная двусторонняя поверхность.

Выберем одну из сторон поверхности Φ с помощью единичного вектора $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(M)$ нормали к этой поверхности. Координатами вектора $\boldsymbol{n}$ являются его направляющие косинусы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, представляющие собой функции точки поверхности. Зададим на поверхности Φ три функции $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$.

Поверхностный интеграл первого рода вида

$$\int_{\Phi} (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)dS \tag{7.1}$$

называют **поверхностным интегралом второго рода от функций** P, Q, R.

Поверхностный интеграл второго рода фактически представляет собой сумму трех отдельных интегралов, соответствующих трем подынтегральным функциям $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$. Рассмотрим первый из этих интегралов. Входящее в него выражение $\cos\alpha dS$ можно рассматривать как проекцию элемента площади dS на координатную плоскость yOz. Это позволяет $\cos\alpha dS$ заменить элементом площади $dydz$ на координатной плоскости Oz и записать интеграл в виде

$$\iint_{\Phi} P(x,y,z)dydz$$

Аналогичным образом можно обозначить две другие составляющие поверхностного интеграла, а весь поверхностный интеграл можно представить в виде

$$\iint_{\Phi} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy. \tag{7.2}$$

В ситуации, когда поверхностный интеграл вычисляется по замкнутой поверхности Φ, для него часто используют специальное обозначение $\oiint$. Таким образом, запись

$$\oiint\limits_{\Phi} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

означает, что поверхностный интеграл берется по замкнутой поверхности Φ.

Сформулируем свойства поверхностного интеграла второго рода на примере одного его слагаемого, соответствующего функции $R(x,y,z)$.

1°. При изменении стороны поверхности интеграл меняет знак.

2°. Интеграл от линейной комбинации m функций равен линейной комбинации интегралов от этих функций:

$$\iint\limits_{\Phi} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \boldsymbol{r}_j(x,y,z)dxdy = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \iint\limits_{\Phi} \boldsymbol{r}_j(x,y,z)dxdy, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}.$$

3°. Если поверхность Φ разбита на конечное число N частей $\Phi_k \subset \Phi$, $k = \overline{1,N}$, не имеющих общих өкутрекжих точек, то

$$\iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)dxdy = \sum_{k=1}^{N} \iint\limits_{\boldsymbol{\Phi}_k} R(x,y,z)dxdy$$

4°. Интеграл

$$\iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)dxdy$$

по любой цилиндрической поверхности Φ с образующими, параллельными оси Oz , равен нулю.

Интеграл (7.1) по выбранной стороне поверхности Φ является поверхностным интегралом первого рода от функции $P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$. Поэтому для его вычисления можно использовать формулы

$$\int\limits_{\Phi} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv \tag{7.3}$$

где функции E, F, G переменных u и $\boldsymbol{v}$ определены соотношениями

$$E = (\boldsymbol{r}'_u)^2 = (x'_u(u,v))^2 + (y'_u(u,v))^2 + (z'_u(u,v))^2, \tag{7.4}$$

$$F = \boldsymbol{r}'_u \boldsymbol{r}'_v = x'_u(u,v)x'_v(u,v) + y'_u(u,v)y'_v(u,v) + z'_u(u,v)z'_v(u,v), \tag{7.5}$$

$$G = \left(\boldsymbol{r}'_v\right)^2 = \left(x'_v(u,v)\right)^2 + \left(y'_v(u,v)\right)^2 + \left(z'_v(u,v)\right)^2, \tag{7.6}$$

или

$$\int\limits_{\Phi} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D^*} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy, \tag{7.7}$$

где D^* - проекция поверхности Φ на плоскость xOy.

Предположим, что гладкая двусторонняя поверхность Φ без особых точек задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \qquad (u;v) \in D \subset \mathbb{R}^2. \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

Пусть A, B, C – координаты вектора нормали $\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v$ к поверхности, где векторы $\boldsymbol{r}'_u$ и $\boldsymbol{r}'_v$ вычислены по формулам

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}'_u = x'_u\left(u_0,v_0\right)\boldsymbol{i} + y'_u\left(u_0,v_0\right)\boldsymbol{j} + z'_u\left(u_0,v_0\right)\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{r}'_v = x'_v\left(u_0,v_0\right)\boldsymbol{i} + y'_v\left(u_0,v_0\right)\boldsymbol{j} + z'_v\left(u_0,v_0\right)\boldsymbol{k}. \end{cases} \tag{7.8}$$

Тогда, согласно равенствам

$$\begin{cases} A = y'_u\left(u_0,v_0\right)z'_v\left(u_0,v_0\right) - y'_v\left(u_0,v_0\right)z'_u\left(u_0,v_0\right), \\ B = z'_u\left(u_0,v_0\right)x'_v\left(u_0,v_0\right) - z'_v\left(u_0,v_0\right)x'_u\left(u_0,v_0\right), \\ C = x'_u\left(u_0,v_0\right)y'_v\left(u_0,v_0\right) - x'_v\left(u_0,v_0\right)y'_u\left(u_0,v_0\right), \end{cases} \tag{7.9}$$

и

$$\left|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v\right|^2 = \left(\boldsymbol{r}'_u\right)^2\left(\boldsymbol{r}'_v\right)^2 - \left(\boldsymbol{r}'_u\boldsymbol{r}'_v\right)^2 = EG - F^2, \tag{7.10}$$

получаем

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{A}{\sqrt{EG-F^2}}$$
$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{B}{\sqrt{EG-F^2}}$$
$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{C}{\sqrt{EG-F^2}}$$

Используя (7.3), находим

$$\int\limits_{\Phi} P\cos\alpha dS = \iint\limits_{D} P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))A(u,v)dudv, \tag{7.11}$$

$$\int\limits_{\Phi} Q\cos\beta dS = \iint\limits_{D} Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))B(u,v)dudv, \tag{7.12}$$

$$\int\limits_{\Phi} R\cos\gamma dS = \iint\limits_{D} R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))C(u,v)dudv. \tag{7.13}$$

Если гладкая поверхность Φ задана уравнением $z = f(x,y)$, $(x;y) \in D_{xy} \subset \mathbb{R}^2$, и выбрана ее верхняя сторона, т.е. единичный вектор $\boldsymbol{n}$ нормали определен равенством

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v}{|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v|} = \frac{-f'_x\boldsymbol{i} - f'_y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{1+(f'_x)^2+\left(f'_y\right)^2}}, \tag{7.14}$$

где для удобства аргументы у функции $f(x,y)$ и ее частных производных опущены, то

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+(f'_x)^2+\left(f'_y\right)^2}}$$

Поэтому, используя представление (7.7), для верхней стороны поверхности получаем

$$\int\limits_{\Phi} R\cos\gamma dS = \iint\limits_{\Phi} Rdxdy = \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,f(x,y))dxdy. \tag{7.15}$$

Для нижней стороны поверхности знак $\cos\gamma$ противоположный, и поэтому в правой части (7.15) перед интегралом следует поставить знак минус:

$$\int\limits_{\Phi} R\cos\gamma dS = \iint\limits_{\Phi} Rdxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,f(x,y))dxdy. \tag{7.16}$$

Аналогично можно вычислить два остальных интеграла (7.1), если гладкая поверхность Φ задана уравнением $x = x(y,z)$, $(y;z) \in D_{yz}$, или $y = y(x,z)$, $(x;z) \in D_{xz}$.

Пример 7.1. Вычислим поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_{\Phi} zdxdy$$

по нижней стороне части Ф конуса, заданной уравнением $z = \sqrt{x^2+y^2}$ и заключенной между плоскостями $z=0$ и $z=1$.

△ Проекцией этой части конуса на координатную плоскость xOy является замкнутый круг

$$D_{xy} = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 1\right\}.$$

Используя (7.16) и переходя к полярным координатам, находим

$$\iint\limits_{\phi} zdxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2 dr = -\frac{2\pi}{3}. \quad \blacktriangle$$

Пример 7.2. Вычислим поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_{\Phi} ydzdx$$

по верхней стороне части Ф параболоида $z = x^2+y^2$, заключенной между пиоскостями $z=0$ и $z=2$ (рис. 1, a).

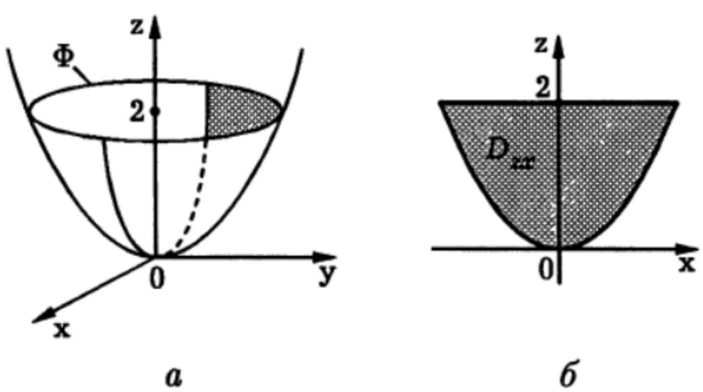

Рис. 1

Разобьем поверхность Ф координатной плоскостью xOz на две части Φ_1 и Φ_2, расположенные по разные стороны от этой поскости. Поверхности Φ_1 и Φ_2 представляют собой графики функций $y = \sqrt{z-x^2}$ и $y = -\sqrt{z-x^2}$. Эти функции имеют общую область определения D_{xx} - проекцию поверхности Ф на плоскость xOz, которая описывается неравенствами $0 \leqslant z \leqslant 2$, $z \geqslant x^2$ (рис. 1, б). В соответствии со свойством 3° поверхностного интеграла второго рода запишем

$$\iint\limits_{\Phi^2} ydzdx = \iint\limits_{\Phi_1} ydzdx + \iint\limits_{\Phi_2} ydzdx.$$

Выбор верхней стороны поверхности Φ раначает выбор левой стороны Φ_1 и правой стороны Φ_2. Для поверхности Φ_1 с выбранной стороной имеем

$$\iint\limits_{\Phi_1} ydzdx = \iint\limits_{D_x} ydzdx,$$

где левая часть равенства - это поверхностный интеграл, а правая часть - двойной. Вычислим двойной интеграл:

$$\iint\limits_{D_{zx}} ydzdx = -\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^2}^{2} \sqrt{z-x^2}dz =$$

$$= -\frac{2}{3}\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(z-x^2\right)^{3/2}\Bigg|_{x^2}^{2} dx = -\frac{2}{3}\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(2-x^2\right)^{3/2} dx.$$

Определенный интеграл от функции $\left(2-x^2\right)^{3/2}$ вычислим с помощью тригонометрической замены $x=\sqrt{2}\sin t$ (при этом $dx=\sqrt{2}\cos tdt$). В результате получим

$$-\frac{2}{3}\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(2-x^2\right)^{3/2} dx = -\frac{2}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^4 tdt = -\frac{2}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2t)^2 dt =$$

$$= -\frac{2}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right) dt = -\pi.$$

Для поверхности Φ_2 с выбранной стороной (правой) имеем

$$\iint\limits_{\boldsymbol{\Phi}_2} ydzdx = \iint\limits_{\boldsymbol{D_x}} ydzdx = -\iint\limits_{\boldsymbol{D_x}} \sqrt{z^2-x^2}dzdx.$$

Вычисления аналогичны предыдущим и дают тот же результат $(-\pi)$.

Таким образом,

$$\iint\limits_{\Phi} ydzdx = -2\pi. \quad \blacktriangle$$

Физический смысл поверхностного интеграла второго рода

Рассмотрим задачу о нахождении количества жидкости, протекающей за единицу времени через заданную поверхность Φ (в этом случае говорят о расходе жидкости через Φ). Предположим, что плотность жидкости постоянна, поверхность проницаема для жидкости и процесс течения жидкости установившийся, т.е. вектор $\boldsymbol{v}$ ее скорости в каждой точке M пространства не изменяется во времени.

Если поверхность Φ площадью S является частью плоскости, а вектор $\boldsymbol{v}$ перепендикулярен этой плоскости, то объемный расход жидкости через Φ, т.е. ее объем, протекающий через Φ в единицу времени, равен $\boldsymbol{Q} = |\boldsymbol{v}|S$. Если же вектор $\boldsymbol{v}$ составляет угол φ с вектором нормали к этой плоскости, то $\boldsymbol{Q} = |\boldsymbol{v}|S\cos\varphi$. Ясно, что в зависимости от выбора направления вектора нормали к плоскости расход может быть положительным, отрицательным, а в частном случае и равным нулю.

Пусть теперь Φ - некоторая гладкая поверхность и в каждой точке $M(x;y;z) \in \Phi$ задан вектор скорости с помощью векторной функции $\boldsymbol{v}(M) = \boldsymbol{v}(x,y,z)$. Выберем разбиение поверхности Φ на n частичных областей Φ_i с площадими ΔS_i и диаметрами $d_i, i = \overline{1,n}$, и в каждой частичной области Φ_i рассмотрим произвольную точку $M_i\left(x_i;y_i;z_i\right)$. Естественно считать, что при мальх значениях диаметров d_i каждую частичную область Φ_i можно заменить его проекцией на касателькую плоскость к поверхности Φ в точке M_i. Кроме того, предполагаем, что в пределах частичной области Φ_i вектор скорости жидкости можно считать постоянным и равным $\boldsymbol{v}\left(M_i\right)$. При этих предположениях объемный расход жидкости через поверхность Φ_i в выбранном направлении единичного вектора $\boldsymbol{n}\left(M_i\right)$ нормали к поверхности в точке M_i приближенно равен

$$\boldsymbol{Q}_i \approx \left|\boldsymbol{v}\left(M_i\right)\right|\cos\varphi_i \Delta S_i, \quad i = \overline{1,n}$$

где φ_i - угод между векторами $\boldsymbol{v}\left(M_i\right)$ и $\boldsymbol{n}\left(M_i\right)$, а общий расход через всю поверхность Φ равен

$$\boldsymbol{Q} \approx \sum_{i=1}^{n} \left|\boldsymbol{v}\left(M_i\right)\right|\cos\varphi_i \Delta S_i.$$

Ясно, что точность последнего соотношения будет тем выше, чем мельче разбиение поверхности Φ на частичные области. По определению полагают

$$\boldsymbol{Q} = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{v}(M_i)| \cos\varphi_i \Delta S_i, \tag{7.17}$$

где $d = \max\limits_{i=\overline{1,n}} d_i$.

Пусть $\cos\alpha(M_i), \cos\beta(M_i), \cos\gamma(M_i)$ – направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{n}(M_i)$, так что

$$\boldsymbol{n}(M_i) = \cos\alpha(M_i)\,\boldsymbol{i} + \cos\beta(M_i)\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma(M_i)\,\boldsymbol{k}$$

а $P(M), Q(M), R(M)$ - координаты вектора $\boldsymbol{v}(M)$ скорости жидкости, т.е.

$$\boldsymbol{v}(M) = P(M)\boldsymbol{i} + Q(M)\boldsymbol{j} + R(M)\boldsymbol{k}. \tag{7.18}$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{v}(M_i)| \cos\varphi_i &= \boldsymbol{v}(M_i)\,\boldsymbol{n}(M_i) = \\ &= P(M_i)\cos\alpha(M_i) + Q(M_i)\cos\beta(M_i) + R(M_i)\cos\gamma(M_i), \end{aligned}$$

где $M_i \in \Phi_i$. Подставляя это равенство в (7.17), согласно определениям поверхностного иктеграла первого рода и поверхностного интеграла второго рода, приходим к следующему:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q} &= \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(P(M_i)\cos\alpha(M_i) + Q(M_i)\cos\beta(M_i) + R(M_i)\cos\gamma(M_i)\right)\Delta S_i = \\ &= \int\limits_{\Phi} (P(M)\cos\alpha(M) + Q(M)\cos\beta(M) + R(M)\cos\gamma(M))dS. \end{aligned}$$

Поэтому для объемного расхода жидкости, протекающей через поверхность Φ и имеющей вектор скорости $\boldsymbol{v}(M)$ вида (7.18), можем записать

$$\boldsymbol{Q} = \iint\limits_{\Phi} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy.$$

Выбор сторокы поверхности Φ, определяемой выбором единичного вектора нормали этой поверхности, влияет на знак объемного расхода жидкости.

Формула Стокса

Пусть гладкая двусторонняя поверхность Φ, ограниченная гладким контуром L, задана параметрическики уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u;v) \in D, \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

с помощью функций $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$, дважды непрерывно дифференцируемых в замкнутой области $D \subset \mathbb{R}^2$, ограниченной гладким контуром L^*.

Контуру L^* при отображении, определяемом функциями $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$, соответствует контур L, ограничивающий поверхность Φ. Обходу контура L^* на плоскости отвечает обход контура L, и наоборот. Условимся считать положительным такое направление обхода контура L, которому соответствует положительное направление обхода контура L^*. Если единичный вектор $\boldsymbol{n}$ нормали к поверхности определить формулой

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v}{|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v|}, \tag{7.19}$$

где векторы $\boldsymbol{r}'_u$ и $\boldsymbol{r}'_v$ определены соотношениями (7.8), то при положительном обходе контура L поверхность будет оставаться слева, если смотреть с конца вектора $\boldsymbol{n}$. Таким образом, положительное направление обхода границы поверхности согласуется с выбором ее стороны.

Как и ранее, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора n в произвольной точке M поверхности Φ.

Пусть в некоторой пространственной области G, целиком содержащей поверхность Φ, заданы непрерывно дифференцируемые функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$. Тогда имеет место бормула Стокса [1]

$$\begin{aligned} &\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \\ &\quad = \iint\limits_\Phi \left((Q'_x - P'_y)\cos\gamma + (P'_z - R'_x)\cos\beta + \left(R'_y - Q'_z\right)\cos\alpha \right) dS, \end{aligned} \tag{7.20}$$

где обход контура L при выбранной стороне поверхности Φ происходит в положительном направлении.

[1]Дж.Г. Стокс (1819-1903) - английский физик и математик

Эту формулу, используя поверхностный интеграл второго рода, можно записать следующим образом:

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_\Phi \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \\ + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz. \tag{7.21}$$

□ Докажем, что

$$\oint\limits_L Pdx = \iint\limits_\Phi \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy. \tag{7.22}$$

Сначала преобразуем криволинейный интеграл второго рода по контуру L в левой части (7.22). Пусть контур L^*, ограничивающий область D, задан параметрическими уравнениями

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t \in T = [t_1, t_2]$$

где $u(t)$ и $v(t)$ - функции, непрерывно дифференцируемые на отрезке $[t_1, t_2]$. Тогда параметрические уравнения, задающие контур L, примут вид

$$x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \quad z = z(u(t), v(t)), \quad t \in T.$$

В соответствии с правилами вычисления криволинейного интеграла второго рода запишем

$$\oint\limits_L Pdx = \int\limits_{t_1}^{t_2} P\left(\frac{\partial x}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v} v'(t)\right) dt = \\ = \oint\limits_{L^*} P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right).$$

К интегралу в правой части этого равенства применим формулу Грина дая односвязмой области:

$$\oint\limits_{L^*} P\frac{\partial x}{\partial u} du + P\frac{\partial x}{\partial v} dv = \iint\limits_D \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right) dudv = \\ = \iint\limits_D \left(\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right) dudv - \\ - \iint\limits_D \left(\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + P\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}\right) dudv.$$

Так как смешанные производные функции $x(u, v)$ непрерывны, верно равенство $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}$. Поэтому после упрощений с учетом соотношений (7.9) и (7.11)-(7.13) получаем

$$\oint\limits_L P dx = \iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) dudv -$$

$$- \iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) dudv =$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial z}B - \frac{\partial P}{\partial y}C\right) dudv = \iint\limits_\Phi \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

что доказывает равенство (7.22).

Аналогично можно доказать, что

$$\oint\limits_L Q dy = \iint\limits_\Phi \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}dydz, \tag{7.23}$$

$$\oint\limits_L R dz = \iint\limits_\Phi \frac{\partial R}{\partial y}dydz - \frac{\partial R}{\partial x}dxdz. \tag{7.24}$$

Складывая (7.22)-(7.24), получаем формулу Стокса (7.21). Она выражает криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру L через общий поверхностный интеграл второго рода по поверхности Φ, ограниченной этим контуром (иногда говорят "опирающейся на контур L"). ■

Замечание 7.1. Отметим, что если поверхность Φ является плоской областью и лежит в плоскости, параллельной координатной плоскости xOy, то формула Стокса переходит в формулу Грина.

Замечание 7.2. Как и формула Грина, формула Стокса обобщается на случай, когда поверхность ограничена несколькими кусочно гладкими контурами. При этом в левой части равенства (7.20) появляется сумма криволинейных интегралов по граничным контурам, проходимым в положительном направлении, т.е. так, что при обходе каждого контура поверхность остается слева, если смотреть с конца выбранного вектора нормали к поверхности. Доказательство формулы Стокса для поверхностей, ограниченных несколькими контурами, аналогично доказательству формулы Грина для многосвязных областей.

Пример 7.3. Вычислим двумя способами (непосредственным подсчетом криволинейного интеграла второго рода и по формуле Стокса) криволинейный интеграл

$$I = \oint\limits_L y dx + z^2 dy + x^2 dz,$$

где L - окружность, по которой плоскость $z = \sqrt{3}$ пересекает сферу, заданную уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

△ Подставляя в уравнение сферы значение $z = \sqrt{3}$, получаем $x^2 + y^2 = 1$, т.е. радиус окружности L равен единице.

Чтобы вычислить криволинейный интеграл непосредственно, составим параметрические уравнения окружности L :

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \\ z = \sqrt{3}, \end{cases}$$

Из параметрических уравнений находим $dx = -\sin t dt$, $dy = \cos t dt$ и $dz = 0$. Используя формулу вычисления криволинейного интеграла, получаем

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \left(-\sin^2 t + 3\cos t\right) dt = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt = -\pi. \quad \blacktriangle$$

△ Чтобы вычислить криволинейный интеграл с помощью формулы Стокса, положим $P = y, Q = z^2, R = x^2$. Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -2z.$$

Согласно (7.21), рассматриваемый криволинейный интеграл сводится к поверхностному интегралу

$$I = -\iint\limits_{\phi} dxdy + 2xdzdx + 2zdydz, \tag{7.25}$$

где Φ - произвольная гладкая поверхность, ограниченная контуром L. Рассмотрим два варианта такой поверхности: верхний сегмент сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, на которой расположен контур L, и круг в плоскости $z = \sqrt{3}$, ограниченный контуром L.

Сначала вычислим поверхностный интеграл по верхнему сегменту сферы. Чтобы направление обхода контура L было положительным, на сегменте сферы следует выбрать верхнюю сторону. Проекциями сегмента сферы Φ на координатные плоскости будут области

$$D_{xy} = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\right\},$$
$$D_{xz} = \left\{(x;z) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{4-z^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{4-z^2}, z \in [\sqrt{3}, 2]\right\},$$
$$D_{yz} = \left\{(y;z) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{4-z^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4-z^2}, z \in [\sqrt{3}, 2]\right\}.$$

На область D_{yz} проектируются две части поверхности, на которые она разделяется плоскостью yOz. Одна из этих частей ошисывается уравнением $x = \sqrt{4-x^2-y^2}$, и для нее $\cos\alpha \geqslant 0$, а другая - уравнением $x = -\sqrt{4-x^2-y^2}$, и для нее $\cos\alpha \leqslant 0$. Поэтому для входящего в (7.25) поверхностного иНтеграла второго рода от функции $2z$ получаем

$$\iint\limits_{\Phi} 2z dy dz = 2\iint\limits_{D_{yz}} z dy dz - 2\iint\limits_{D_{yz}} z dy dz = 0.$$

Аналогично для области D_{xz} имеем

$$\iint\limits_{\Phi} 2x dz dx = 2\iint\limits_{D_{zz}} x dz dx - 2\iint\limits_{D_{xz}} x dz dx = 0.$$

Учитывая, что $\cos\gamma > 0$ для выбранной стороны сегмента сферы, находим

$$\iint\limits_{\Phi} dx dy = \iint\limits_{D_{xy}} dx dy = \pi$$

поскольку область D_{xy} есть круг радиуса 1 с площадью π. Подставляя полученные результаты в (7.25), приходим к полученному ранее результату $I = -\pi$. ▲

△ Теперь вычислим поверхностный интеграл (7.25) по верхней стороне круга $x^2 + y^2 \leqslant 1$ в плоскости $z = \sqrt{3}$. В этом случае $dz = 0$, и поэтому получаем

$$I = -\iint\limits_{\Phi} dx dy + 2x dz dx + 2z dy dz = -\iint\limits_{\Phi} dx dy = -\iint\limits_{D_{zy}} dx dy = -\pi. \quad ▲$$

Итак, все три способа вычисления рассматриваемого криволинейного интеграла дали одинаковый результат. #