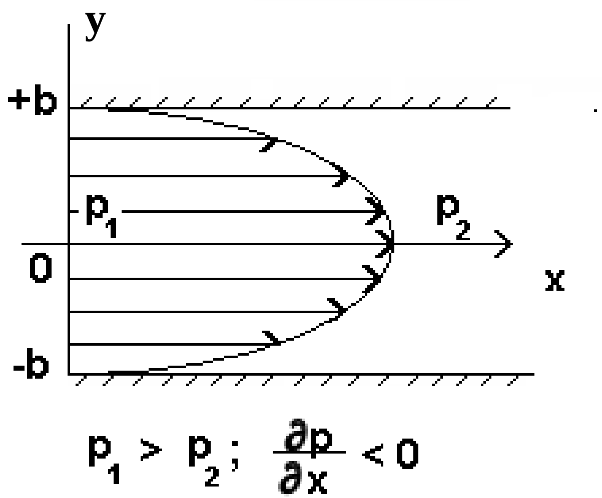
ПЛОСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ПУАЗЕЙЛЯ



Тепловая задача

Запишем уравнение энергии для слоистого течения:

$$\frac{1}{\Pr}\frac{d^2 i}{dy^2}+u\frac{d^2 u}{dy^2}+\left(\frac{du}{dy}\right)^2=0$$

Жидкость несжимаема $\longrightarrow$ **работа сил сжатия в сплошной среде** $u\dfrac{dp}{dx}$ **равна 0**

Из уравнения движения $\Rightarrow$ $\dfrac{dp}{dx}=\mu\dfrac{d^2u}{dy^2}=0$

Тогда уравнение энергии примет следующий вид:

$$\frac{1}{\Pr}\frac{d^2 i}{dy^2}+\left(\frac{du}{dy}\right)^2=0$$

Работа сил трения

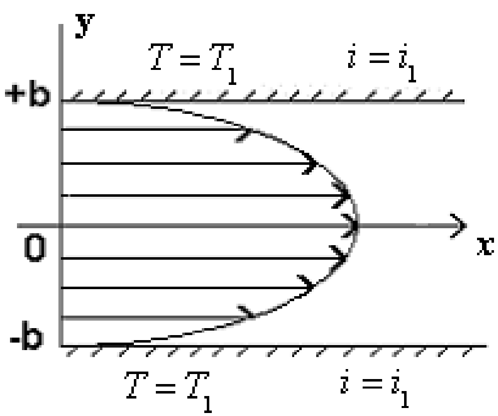
$$i=C_pT \longrightarrow T=\frac{i}{C_p}$$

Возникающее при течении Пуазейля поле температур обусловлено только

- теплопроводностью в поперечном направлении

и

- теплом, образующимся вследствие трения



Граничные условия для температуры стенок:

При $y=\pm b;\ T=T_1$ **или** $i=i_1$

Проинтегрируем уравнение энергии: $\frac{1}{\Pr}\frac{d^2 i}{dy^2} + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 = 0$

Используем решение динамической задачи: $u = u_{\max}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dy} = -u_{max}\frac{2y}{b^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{du}{dy}\right)^2 = 4u_{max}^2\frac{y^2}{b^4}$$

$$\frac{1}{\Pr}\frac{d^2 i}{dy^2} + 4u_{\max}^2\frac{y^2}{b^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 i}{dy^2} = -4\Pr u_{\max}^2\frac{y^2}{b^4}$$

$$\frac{di}{dy} = -4\Pr u_{max}^2\frac{y^3}{3b^4} + C_3$$

$$i = - \quad \Pr u_{max}^2\frac{y^4}{3\cdot\ b^4} + C_3 y + C_4$$

$$i = -\frac{1}{3}\Pr u_{max}^2\frac{y^4}{b^4} + C_3 y + C_4 \qquad \textbf{(1)}$$

Определим постоянные C_3 и C_4

$$y=-b;\ i=i_1 \quad \Rightarrow \quad i_1=-\frac{1}{3}\Pr u_{\max}^2\frac{b^4}{b^4}-C_3b+C_4 \qquad (2)$$

$$y=+b;\ i=i_1 \quad \Rightarrow \quad i_1=-\frac{1}{3}\Pr u_{\max}^2\frac{b^4}{b^4}+C_3b+C_4 \qquad (3)$$

$$2C_3b=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_3=0}$$

$$i_1=-\frac{1}{3}\Pr u_{max}^2+C_4 \Rightarrow \boxed{C_4=i_1+\frac{\Pr}{3}u_{\max}^2}$$

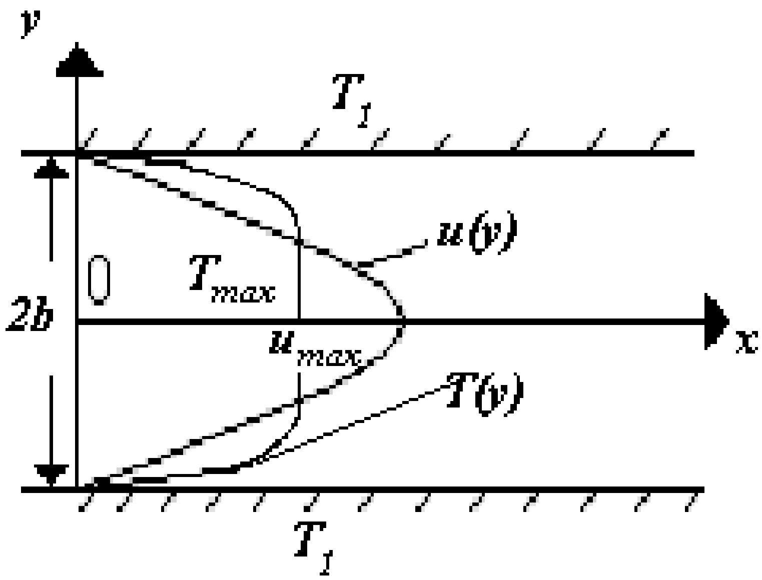
$$i=-\frac{1}{3}\Pr u_{max}^2\frac{y^4}{b^4}+C_3y+C_4 \qquad (1)$$

Тогда решение имеет вид:

$$i=-\frac{1}{3}\Pr u_{max}^2\frac{y^4}{b^4}+i_1+\frac{1}{3}\Pr u_{max}^2= i_1+\frac{1}{3}\Pr u_{max}^2\left(1-\frac{y^4}{b^4}\right)$$

Распределение температуры: $$i = i_1 + \frac{Pr}{3} u_{max}^2 \left(1 - \frac{y^4}{b^4} \right)$$

Распределение скорости: $$u = u_{\max} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right)$$



Найдем поток тепла от верхней стенки к жидкости:

$$q=-\lambda\frac{dT}{dy}\bigg|_{y=b}=\left|\begin{array}{l} i=C_pT \\ \dfrac{dT}{dy}=\dfrac{1}{C_p}\dfrac{di}{dy} \\ i=i_1+\dfrac{Pr}{3}u_{max}^2\left(1-\dfrac{y^4}{b^4}\right)\end{array}\right|=-\frac{\lambda}{C_p}\frac{di}{dy}\bigg|_{y=b}=$$

$$=-\frac{\lambda}{C_p}\frac{d}{dy}\left(\cancel{i_1}+\cancel{\frac{Pr}{3}u_{max}^2}-\frac{Pr}{3}u_{max}^2\frac{y^4}{b^4}\right)\bigg|_{y=b}=\frac{\lambda}{C_p}\frac{Pr}{3}u_{max}^2\frac{d}{dy}\left(\frac{y^4}{b^4}\right)\bigg|_{y=b}=$$

$$=\frac{\lambda}{C_p}\frac{Pr}{3}u_{max}^2 4\frac{y^3}{b^4}\bigg|_{y=b}=\frac{\lambda}{C_p}\frac{Pr}{3}u_{max}^2 4\frac{}{b}=\frac{4}{3}\frac{\lambda}{C_p}\frac{Pr}{b}u_{max}^2=$$

$$=\left|Pr=\frac{\nu}{a};\ a=\frac{\lambda}{\rho C_p};\ \nu\cdot\rho=\mu;\ Pr=\frac{\mu\ C_p}{\lambda}=\frac{\mu C_p}{\lambda}\right|=\frac{4}{3}\mu\frac{u_{max}^2}{b}$$

$$\boxed{q=\frac{4}{3}\mu\frac{u_{max}^2}{b}}$$

Возьмем другой тип граничных условий:

При $y = -b;\ \ i = i_1$ **При** $y = +b;\ \ i = i_2$ $i_2 \succ i_1$

$$i = -\frac{1}{3}\Pr u_{\max}^2 \frac{y^4}{b^4} + C_3 y + C_4$$

$$y = -b \Rightarrow i_1 = -\frac{\Pr}{3} u_{\max}^2 - C_3 b + C_4$$

$$y = +b \Rightarrow i_2 = -\frac{\Pr}{3} u_{\max}^2 + C_3 b + C_4$$

$$i_1 - i_2 = -2C_3 b \qquad C_3 = -\frac{i_1 - i_2}{2b}$$

$$i_1 + i_2 = -\frac{2}{3}\Pr u_{\max}^2 + 2C_4 \qquad C_4 = \frac{i_1 + i_2}{2} + \frac{1}{3}\Pr u_{\max}^2$$

$$i = -\frac{\Pr}{3} u_{\max}^2 \frac{y^4}{b^4} - \frac{i_1 - i_2}{2b} y + \frac{i_1 + i_2}{2} + \frac{1}{3}\Pr u_{\max}^2$$

$$\boxed{i = -\frac{\Pr}{3} u_m^2 \left(1 - \frac{y^4}{b^4}\right) - \frac{i_1 - i_2}{2b} y + \frac{i_1 + i_2}{2}}$$

Пусть нижняя стенка нетеплопроводная:

$$y=b; \qquad i=i_1 \qquad\qquad y=-b; \quad q=-\lambda\frac{dT}{dy}=0 \Rightarrow \frac{dT}{dy}=\frac{di}{dy}=0$$

$$i=-\frac{1}{3}\Pr u_{\max}^2\frac{y^4}{b^4}+C_3y+C_4$$

$$y=b \Rightarrow \quad i_1=-\frac{Pr}{3}u_{max}^2\frac{b^4}{b^4}+C_3b+C_4$$

$$y=-b \Rightarrow \left.\frac{di}{dy}\right|_{y=-b}=0=\frac{4}{3}\Pr u_{\max}^2\frac{b^3}{b^4}-C_3 \Rightarrow C_3=-\frac{4}{3}\Pr\frac{u_{\max}^2}{b}$$

$\boldsymbol{C_4=?}$ $$C_4=i_1+\frac{5}{3}\Pr u_{\max}^2$$

$$i=-\frac{\Pr}{3}u_{\max}^2\frac{y^4}{b^4}-\frac{4}{3}\Pr u_{\max}^2\frac{y}{b}+i_1+\frac{5}{3}\Pr u_{\max}^2$$

$$i-i_1=\frac{\Pr}{3}u_{\max}^2\left(5-\frac{y^4}{b^4}\right)-\frac{4}{3}\Pr u_{\max}^2\frac{y}{b} \qquad \boxed{i=i_1-\frac{\Pr}{3}u_{\max}^2\left(\frac{y^4}{b^4}+4\frac{y}{b}-5\right)}$$

$$\boxed{i = i_1 - \frac{\Pr}{3} u_{\max}^2 \left(\frac{y^4}{b^4} + 4\frac{y}{b} - 5 \right)}$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad i = i_0 = i_1 + \frac{5 \Pr u_{\max}^2}{3}$$

$$y = -b \quad \Rightarrow \quad i = i_w = i_1 - \frac{\Pr}{3} u_{max}^2 \left(1 - 4 - 5 \right) = i_1 + \frac{8}{3} Pr\, u_{max}^2$$