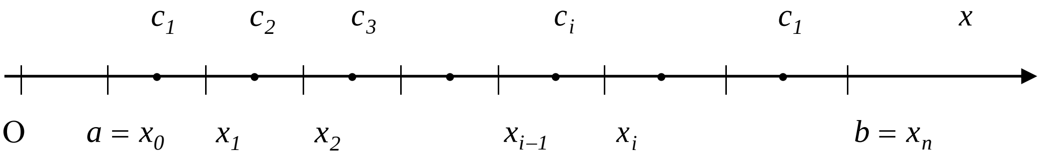
№10- дәріс. Анықталған интеграл

Анықталған интегралдың анықтамасы. $y = f(x)$ **функциясы** $[a,b]$ **кесіндісінде анықталсын, мұнда** $a < b$**. Төменгі амалдарды орындаймыз.**

1. $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ $(x_0 < x_1 < \dots < x_n)$ нүктелерімен $[a,b]$ кесіндісін n ***элементар кесінділерге*** (бөліктерге) бөлеміз: $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; x_n]$



2. Әрбір $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1,2,\dots,n$ элементар кесіндінің ішінде жатқан, кез келген бір $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ нүктесін аламыз және осы нүктедегі функцияның мәнін есептейміз, яғни $f(c_i)$ шамасын табамыз.

3. Функцияның табылған $f(c_i)$ мәндерін сәйкес элементар кесінділердің ұзындығына, яғни $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ көбейтеміз: $f(c_i) \cdot \Delta x_i$.

4. Барлық осындай көбейтінділердің S_n қосындысын құрамыз:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \qquad (14.1)$$

(14.1) қосындысы $y = f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісіндегі ***интегралдық қосындысы*** деп аталады. Элементар кесінділердің ең үлкен ұзындығын λ деп белгілейміз: $\lambda = max\, \Delta x_i$ $(i = 1,2,\dots,n)$.

5. $n \to \infty$ ұмтылғанда, яғни $\lambda \to 0$ ұмтылғанда (14.1) интегралдық қосындысының шегін табамыз. Егер (14.1)- интегралдық қосындысы үшін ақырлы шек бар болып, ол $[a,b]$ кесіндісін дербес бөліктерге бөлу жолына және c_i нүктелерін таңдап алу тәсіліне тәуелсіз болса, онда ол шекті $f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісіндегі ***анықталған интегралы*** деп атайды және оны $\int_a^b f(x)dx$ символымен белгілейді. Сонымен,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Мұндағы a санын интегралдың төменгі шегі, ал b санын — жоғары шегі дейді. $f(x)$— интеграл астындағы функция, $f(x)dx$ – интеграл астындағы өрнек деп аталады.

Егер $\int_a^b f(x)dx$ саны бар болса, онда $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде интегралданатын функция деп аталады. Енді анықталған интегралдың бар болуы туралы теореманы келтірейік.

Теорема (Коши). Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда оның осы аралықта анықталған интегралы $\int_a^b f(x)dx$ бар. Егер $y = f(x)$

функциясының $[a,b]$ аралығында санаулы бірінші текті үзіліс нүктелері болса, онда бұл функция $[a,b]$ аралығында интегралданады.

Анықталған интегралдың анықтамасынан шығатын оның кейбір қасиеттері:

1. Анықталған интеграл өзінің интегралдау айнымаласына тәуелді емес, ол тек интегралдың шектері мен $f(x)$ функциясынан тәуелді, яғни

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \ldots \int_a^b f(z)dz,$$

2. Егер $b = a$ болса, онда $\int_a^a f(x)dx = 0$

3. Кез келген нақты C саны үшін: $\int_a^b Cdx = C(b-a)$

Анықталған интегралдың қасиеттері. Бұл бөлімде интегралданатын функцияларды қарастырамыз.

1. $\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx$, мұнда C - нақты сан.

2. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(t)dt$

4. Егер $a < c < b$ теңсіздігі орындалса, онда $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

5. Егер $[a,b]$ кесіндісінде $f(x) \le g(x)$ болса, онда $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

6. ***Орта мән туралы теорема.*** Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$кесіндісінде үзіліссіз болса, онда $[a,b]$ кесіндісінен $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ теңдігі орындалатындай c саны табылады.

Ньютон – Лейбниц формуласы. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде интегралданатын болса, онда ол осы кесіндінің ішінде жатқан кез келген $[a,x]$ кесіндісінде де интегралданады. $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, мұнда $x \in [a,b]$ функциясын қарастыралық.

Теорема. Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда $\Phi(x)$ функциясы да $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болады.

Теорема. $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болсын. Онда

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$$

Салдар. $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болған кез келген $f(x)$ функциясының осы кесіндіде алғашқы функциясы бар, ол $\Phi(x)$ функциясына тең. Енді интегралды есептеудің негізгі формуласы Ньютон – Лейбниц формуласына көшелік.

Негізгі теорема. $y=f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және $y=F(x)$ оның осы кесіндідегі алғашқы функциясы болсын. Онда

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a) \qquad (14.2)$$

(14.2) формуласы ***Ньютон- Лейбниц формуласы*** деп аталады. Ньютон-Лейбниц формуласы анықталған интегралды есептеу үшін өте қолайлы құрал. Оны қолдану үшін интеграл астындағы жатқан функцияның бір алғашқы функциясын білу жеткілікті.

1-мысал. $\int_0^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3}-\frac{0}{3}=\frac{8}{3}.$

Анықталған интегралда айнымалыны алмастыру.

Теорема. $x=\varphi(t)$ функциясының $[\alpha,\beta]$ кесіндісінде үзіліссіз туындысы бар және $a=\varphi(\alpha),\ b=\varphi(\beta)$ болсын, ал $y=f(x)$ функциясы $x=\varphi(t),\ t\in[\alpha,\beta]$ түрінде берілген әрбір x нүктесінде үзіліссіз болсын. Сонда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (14.3)$$

теңдігі әрқашанда орындалады.

(14.3) формуласы анықталған интеграл үшін ***айнымалыны алмастыру формуласы*** деп аталады.

2- мысал. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ интегралын есептеу керек.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left|x=\sin t, dx=\cos t dt; x=0 \Rightarrow t=0; x=1 \Rightarrow \sin t=1 \Rightarrow \left(t=\frac{\pi}{2}\right)\right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt =$$

$$\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{\pi}{4}.$$

Анықталған интегралды бөліктеп интегралдау.

Теорема. $u=u(x)$ және $v=v(x)$ функцияларының $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз туындылары бар болсын. Онда $\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx$.

Бұл теңдікті қысқаша түрде былай да жазуға болады

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu \qquad (14.4)$$

(14.4) анықталған интегралды ***бөліктеп интегралдау формуласы*** деп аталады.

3−мысал. $\int\limits_1^e x\ln xdx = \int\limits_1^e \ln xd\frac{x^2}{2} = \left| u=\ln x, du=\frac{1}{x}dx, v=\frac{x^2}{2} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx =$

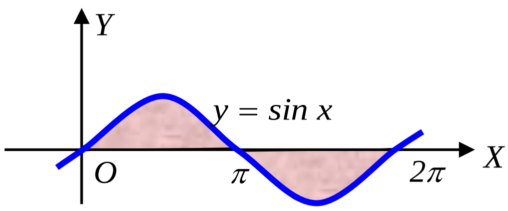
$= \frac{e^2}{2}\ln e - 0 - \int\limits_1^e \frac{x}{2}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$.

Анықталған интегралдың қолданылуы

Жазық фигураның ауданын табу.

а) $y=f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде теріс емес және үзіліссіз болсын. Онда жоғарыдан $y=f(x)$ функциясының графигімен, төменнен Ox өсімен, ал бүйір жақтарынан $x=a$, $x=b$ түзулерімен қоршалған қисық сызықты трапецияның ауданы $\int\limits_a^b f(x)dx$ интегралына тең болады, яғни $S=\int\limits_a^b f(x)dx$ Егер $[a,b]$ кесіндісінде $f(x)\le 0$ болса, онда қисық сызықты трапеция Ox өсінің төменгі жағына орналасқан және $S=-\int\limits_a^b f(x)dx$ болады.

1-мысал. $y=\sin x$ синусоидасымен және Ox осімен шектелген фигураның ауданын табу керек ($0\le x\le 2\pi$).



$[0,\pi]$ аралығында $\sin x\ge 0$, ал $[\pi,2\pi]$ аралығында $\sin x\le 0$ болғандықтан, берілген облыстың ауданын табайық

$S=\int\limits_0^{\pi}\sin xdx - \int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin xdx = -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi = 4$.

б) $x=a$, $x=b$ түзулерімен және $[a,b]$ аралығында үзіліссіз $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ (мұндағы $f_1(x)\ge f_2(x)$) функциялардың графиктерімен шектелген фигураның ауданы мына формуламен табылады. $S=\int\limits_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$

в) Егер $[a,b]$ кесіндісінде $y = f(x)$ функциясының графигі параметрлік функция түрінде берілсін $\{x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \le t \le \beta$ мұндағы $y(t) \ge 0$ үзіліссіз, ал $x(t)$ функциясы $[\alpha,\beta]$ кесіндісінде бір сарынды, үзіліссіз дифференциалданатын функция, ал $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ болса, онда қисық сызықты трапецияның ауданы мына формуламен табылады $S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt$.

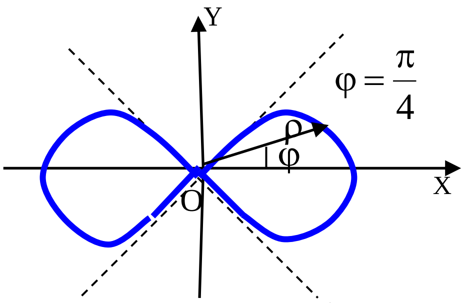
2−мысал. Жарты өстері a және b болатын эллипстің жоғарғы жағындағы жарты бөлігінің параметрлік теңдеуі былай беріледі: $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \le t \le \pi$. Егер $t = 0$ десек, онда $x = a$, ал $t = \pi$ десек $x = -a$ тең болады. Сонда эллипстің ауданы былай табылады

$$S = 2\int\limits_{\pi}^{0} b\sin t(a\cos t)'dt = 2ab\int\limits_{0}^{\pi}\sin^2 tdt = 2ab\int\limits_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = ab\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi} =$$

$$= ab\left(\pi - \frac{\sin 2\pi}{2}\right) - ab\cdot 0 = \pi ab.$$

Поляр координаттарындағы аудан. Координат төбесінен шығатын сәулелермен $\varphi = \varphi_1$ және $\varphi = \varphi_2$ (мұндағы $\varphi_1 < \varphi_2$) және теріс емес $\rho = f(\varphi)$ функциясының $[\varphi_1, \varphi_2]$ кесіндідегі үзіліссіз графигімен шектелген қисықсызықты үшбұрыштың ауданы мына формуламен есептелінеді: $S = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi)d\varphi$

3-мысал. $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ қисығымен шенелген облыстың ауданын табамыз. Бұл қисық Бернулли лемнискатасы деп аталады.



$\cos 2\varphi \ge 0$ шартынан интегралдау облысы табылады. Осыдан $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ үшін бүкіл облыстың $\frac{1}{4}$ -ін құрайды.

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{0}^{\pi/4}\left(a\sqrt{\cos 2\varphi}\right)^2 d\varphi = 2a^2\int\limits_{0}^{\pi/4}\cos 2\varphi d\varphi = a^2\sin 2\varphi\Big|_{0}^{\pi/4} = a^2\sin\frac{\pi}{2} - a^2\sin 0 = a^2.$$

3. Қисық доғасының ұзындығы

а) Егер қисық декарт координаттар жүйесінде $y = f(x),\ x \in [a,b]$ теңдеуімен берілсе, онда қисықтың доғасының ұзындығы мына формуламен есептелінеді:

$$l = \int\limits_{a}^{b}\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

б) Егер қисық параметрлік түрде $x = x(t),\ \ y = y(t),\ t \in [\alpha, \beta]$ берілсе, онда қисықтың доғасының ұзындығы мына формуламен есептелінеді: $l = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$.

в) Егер қисық сызық полярлық координаталар арқылы берілсе, яғни $\rho = f(\varphi)$ ($\varphi \in [\alpha, \beta]$), онда $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2}\, d\varphi$.

Айналу денесінің көлемі. Үзіліссіз $y = f(x) \geq 0, a \leq x \leq b$ сызығымен және $x = a,\ x = b$ түзулерімен шектелген қисық сызықты трапеция Ox өсінен айналуынан пайда болған айналу денесінің көлемі мына формуламен есептелінеді: $V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

4-мысал. $y = x^2$, $x \in [0,1]$ функциясының графигімен берілген қисық сызықты трапецияның Ox өсінен айналуынан пайда болған дененің көлемін табу керек. Жоғарыдағы формуланы қолданамыз $V = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^1 = \frac{\pi}{5}$.

Айналу бетінің ауданын табу. Айталық, үзіліссіз дифференциалданатын $y = f(x)$, ($x \in [a,b]$ және $f(x) \geq 0$) функциясының графигі Ox өсінен айналсын. Пайда болған айналу бетінің ауданы:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Меншіксіз интегралдар. Анықталған интегралды қарастырғанда интегралдың төменгі және жоғары шектері – ақырлы сандар және интеграл астындағы функция –интегралдау аралығында ақырлы функция болуын талап еттік. Егер осы қойылған шарттардың біреуі орындалмаса, интеграл ***меншіксіз интеграл*** деп аталады.

1. Ақырсыз шектері бар меншіксіз интегралдар. Айталық, $y = f(x)$ функциясы $[a, +\infty)$ аралығында үзіліссіз болсын. Осы функциядан a-дан $+\infty$дейін алынған меншіксіз интеграл деп мына шекті айтамыз: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$. Егер осы шек бар (санға тең) болса, онда меншіксіз интегралы жинақты, ал шегі жоқ немесе шексіздікке тең болса, онда интеграл жинақсыз деп аталады. Егер $[a, +\infty)$ аралығында $f(x) \geq 0$ болса, онда мұндай интеграл шекаралары: $y = 0$, $x = a$ $(x \geq a)$ түзулерімен және $y = f(x)$ функциясының графигімен шектелген фигураның ауданын береді. Жинақты интеграл үшін бұл аудан шектеулі, ал жинақсыз интеграл үшін шектеусіз болады.

5-мысал. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \to \infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \to \infty} (\ln b - \ln 1) = \infty$. Демек, интеграл жинақсыз.

Айталық, $y = f(x)$ функциясы $(-\infty, b]$ аралығында үзіліссіз болсын. Сонда $-\infty$-тен b-ға дейінгі меншіксіз интеграл деп мына шекті айтамыз $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$.

Мұндай интеграл ($f(x) \geq 0$ болғанда) шекаралары $y = 0$, $x = b$ $(x \leq b)$ және $y = f(x)$ болған фигураның ауданын өрнектейді.

Егер $y = f(x)$ функциясы бүкіл сандар осінде үзіліссіз болса, онда $-\infty$-тен $+\infty$-ке дейінгі меншіксіз интеграл деп мына екі интегралдың қосындысын айтамыз

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

(мұнда c-кез келген сан). Бұл анықтама c-ны таңдап алуға байланыссыз. Мұндағы екі интеграл да жинақты болса, онда ол интеграл жинақты деп аталады. $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ және $\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$. Егер осы интегралдың біреуі жинақсыз болса, онда $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ интегралы жинақсыз деп аталады.

2. Ақырсыз функцияның меншіксіз интегралы

Айталық, $y = f(x)$ функциясы $[a,b)$ аралығында үзіліссіз, ал $x = b$ нүктесінде ақырсыз болсын. a-дан b - ның сол жағына дейін осы функциядан алынған меншіксіз интеграл деп сол жақ шекті айтады.

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx .$$

Егер $y = f(x)$ функциясы $(a,b]$ аралығында үзіліссіз, ал a нүктесінде үзілісті болса, онда a -ның оң жағынан b-ға дейінгі осы функцияның меншікті интегралы деп мына оң жақ шекті айтады

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx .$$

6- мысал. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^{1} x^{-2}dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_{0+\varepsilon}^{1} = -\lim_{\varepsilon \to 0}\left(1 - \frac{1}{0+\varepsilon}\right) = \infty$**,** яғни, интеграл жинақсыз.

Мына меншіксіз интегралдардың жазылуы жақсылық емес (зұлымдық), себебі үзіліссіз функциялардың анықталған интегралдарынан айырмашылығы жоқ.

Айталық, $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ аралығындағы (a,b) интервалының үзіліске ұшырайтын c нүктесінен басқа жерлерінде үзіліссіз болсын. Сонда осы кесіндіден алынған меншіксіз интегралы деп келесі екі меншіксіз интегралдардың қосындысын айтамыз.

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx .$$

Оң жағындағы екі интеграл жинақты болса, онда мұндай интегралды жинақты деп атайды.

Әдебиеттер: 1 нег.[384-406], 11 қос. [483-500].
Бақылау сұрақтар:
1. Анықталған интегралдың анықтамасын беріңіз.
2. Ньютон−Лейбниц формуласын жазыңыз.
3. Анықталған интегралда айнымалыны алмастыру формуласын көрсетіңіз.
4. Анықталған интегралда бөліктеп интегралдау формуласы қалай жазылады?
Әдебиеттер: 1 нег.[407-436], 11 қос. [506-510], [515-526].
Бақылау сұрақтар:
1. Анықталған интегралды қолданып, жазық фигураның аудандарын есептеу.
2. Қисық доғаның ұзындығын табу.

3. Айналу денесінің көлемін есептеу.
4. Меншіксіз интегралдың түрлерін атаңыз.