Лекция 6. Критерий Коши существования предела функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства. Символы Ландау. Сравнение функций. Монотонные функции. Понятие обратной функции. Понятие сложной функции. Первый и второй замечательные пределы.

Критерий Коши

В этом параграфе речь будет идти о существовании конечного предела.
Для последовательностей мы доказывали критерий Коши, который состоит в том, что сходимость последовательности равносильна ее фундаментальности. Аналогичное утверждение справедливо и для пределов функций.

Теорема *(критерий Коши). Пусть функция f определена в проколотой окрестности U точки a. Для того чтобы функкия f имела конечный предел при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что для любых $x', x'' \in U$, удовлетворяющих условию $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$, выполнялось неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

$\square$ Доказательство. *Необходимость.* Пусть существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь определением предела, найдем такое δ, что для всех $x \in U$, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Пусть $x', x'' \in U$ такие, что $0 < |x' - a| < \delta$ и $0 < |x'' - a| < \delta$. Тогда

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достаточность. Применим определение предела функции по Гейне и критерий Коши для последовательностей. Пусть выполнено условие теоремы. Покажем, что существует $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}\,(x_n \in U, x_n \to a(n \to \infty), x_n \neq a)$ и докажем, что соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится. Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь условием, найдем такое $\delta > 0$, что для всех $x', x'' \in U$, удовлетворяющих условию $0 < |x' - a| < \delta$ и $0 < |x'' - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Но поскольку $x_n \to a(n \to \infty)$, то найдется такое N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \delta$. Пусть $n, m \geq N$. Тогда $0 < |x_n - a| < \delta$ и $0 < |x_m - a| < \delta$, а значит, $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для любых $n, m \geq N$ справедливо неравенство $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Это означает, что последовательность $\{f(x_n)\}$ фундаментальна и, следовательно, сходится (в силу критерия Коши для последовательностей). Таким образом, для любой последовательности $\{x_n\}$ (с отмеченными выше свойствами) последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится. Нужно еще показать, что все последовательности $\{f(x_n)\}$ сходятся к одному и тому же пределу. Но это действительно так, ибо в противном случае, если $f(x_n') \to A$ и $f(x_n'') \to B$, где $B \neq A$, то последовательность $\{f(x_1'), f(x_1''), f(x_2'), f(x_2''), \ldots\}$ не имела бы предела, что противоречит уже доказанному. ■

Аналогично можно сформулировать и доказать критерий Коши для пределов при $x \to +\infty, x \to -\infty$ и $x \to \infty$, а также для односторонних пределов. Приведем, например, формулировку критерия Коши для предела при $x \to +\infty$.

Теорема *(критерий Коши для случая $x \to +\infty$). Пусть функция f определена на полупрямой $(a, +\infty)$. Для того чтобы функция f имела конечный предел при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтоби для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое $\Delta > 0$, что при любых $x', x'' > \Delta$ выполнялось неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

Пример. Доказать, что функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ не имеет конечного предела справа в точке $a = 0$. Для доказательства покажем, что найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся x', x'', удовлетворяющие условию $0 < x' < \delta, 0 < x'' < \delta$, такие, что $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$. Пусть $\varepsilon_0 = 1$. Зафиксируем произвольное $\delta > 0$ и выберем $x' = \dfrac{\delta}{2}, x'' = \dfrac{\delta}{2+\delta}$. Тогда $0 < x' < \delta, 0 < x'' < \delta$, но $|f(x') - f(x'')| = \left|\dfrac{2}{\delta} - \left(\dfrac{2}{\delta} + 1\right)\right| = 1 = \varepsilon_0$, и тем самым завершается рассмотрение примера.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой в точке a (при $x \to a$), если

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

Иначе говоря, функция $f(x)$-бесконечно малая в точке a, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\} : |f(x)| < \varepsilon$. Разумеется, неравенство $|f(x)| < \varepsilon$ должно выполняться для тех x из проколотой δ-окрестности точки a, которые входят в область определения X функции $f(x)$, но для краткости записи условие $x \in X$ будем часто опускать.

Примеры.

1. Функция $f(x) = \sin x$ является бесконечно малой в точке $x = 0$, так как (это было доказано)

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

2. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \neq 0 \\ 1, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

также является бесконечно малой в точке $x = 0$ (заметим, что при этом $f(0) = 1 \neq 0$).

3. Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ не является бесконечно малой в точке $x = 0$, хотя $f(0) = 0$.

Аналогично определяется бесконечно малая при $x \to +\infty$ (или $-\infty$) функция, в частности, бесконечно малая последовательность $\{x_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

Примеры.

1. Функция $f(x) = 1/x$ является бесконечно малой при $x \to \infty$. 2) Последовательность $\{1/n\}$ является бесконечно малой.

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой в точке a (при $x \to a$), если

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0, \forall x \in \{0 < |x-a| < \delta\} : |f(x)| > A$$

Обозначение:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

Если при этом выполнено неравенство $f(x) > A(f(x) < -A)$, то пишут

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty(-\infty)$$

Пример. Функция $f(x) = 1/x$ является бесконечно большой в точке $x = 0$ (для доказательства этого утверждения достаточно $\forall A > 0$ взять $\delta = 1/A$).

Аналогично определяется бесконечно большая функция при $x \to +\infty(-\infty)$, а также при $x \to a + 0(x \to a - 0)$.

Примеры:

$$\lim_{x\to+0} \frac{1}{x} = +\infty; \qquad \lim_{x\to-0} \frac{1}{x} = -\infty$$

Задание. Докажите следующие утверждения (считая, что $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a):

1. если $f(x)$ - бесконечно большая в точке функция, то в некоторой проколотой окрестности точки а определена функция $g(x) = 1/f(x)$ и она является бесконечно малой в точке a.

2. если $f(x)$ - бесконечно малая в точке функция и $f(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a, то $g(x) = 1/f(x)-$ бесконечно большая функция в точке a.

3. если $f(x) = c = \text{const}$ и
$$\lim_{x\to a} f(x) = 0$$
то $c = 0$.

Теорема 2. Сумма и разность двух бесконечно малых в точке a функций являются бесконечно малыми в точке a функциями.

□ Доказательство. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - бесконечно малые в точке а функции. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta_1 > 0, \quad \forall x \in \{0 < |x-a| < \delta_1\} : \quad |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и также

$$\exists\delta_2 > 0, \quad \forall x \in \{0 < |x-a| < \delta_2\} : \quad |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Возьмем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда $\forall x \in \{0 < |x-a| < \delta\}$ выполнены неравенства

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

следовательно,

$$\forall x \in \{0 < |x-a| < \delta\} : |f(x) \pm g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| < \varepsilon$$

а это и означает, что функции $f(x) + g(x)$ и $f(x) - g(x)$ являются бесконечно малыми в точке a. ■

Следствие. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых в точке a функций является бесконечно малой в точке a функцией.

□ Доказательство проведем по индукции. Для двух слагаемых утверждение верно в силу теоремы 2. Предположим, что утверждение верно для n слагаемых $(n \geqslant 2)$, и докажем, что тогда оно верно и для $n+1$ слагаемых.

Пусть $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), f_{n+1}(x)$ - бесконечно малые в точке а функции. Их сумму представим в виде

$$\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) + f_{n+1}(x) = g(x) + f_{n+1}(x)$$

Функция $g(x)$ является бесконечно малой в точке a в силу индуктивного предположения. Поэтому $\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x)$ представляет собой сумму двух бесконечно малых в точке а функций $g(x)$ и $f_{n+1}(x)$, а такая сумма является бесконечно малой в точке a функцией в силу теоремы 2. Следствие доказано. ■

Теорема 3. Произведение бесконечно малой в точке a функции на ограниченную в окрестности точки а функцию есть бесконечно малая функция в точке a.

□ Доказательство. Пусть $f(x)$ - бесконечно малая в точке a функция, а $g(x)$ - ограниченная функция в некоторой окрестности точки a (обозначим эту окрестность ω). Тогда существует такое число $M > 0$, что $\forall x \in \omega : |g(x)| \leqslant M$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f(x)$ - бесконечно малая в точке функция, то

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \{0 < |x-a| < \delta\} : |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Возьмем $\delta_1 \leqslant \delta$ столь малым, что δ_1-окрестность точки a принадлежит ω. Тогда

$$\forall x \in \{0 < |x-a| < \delta_1\} : |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

а это и означает, что $f(x) \cdot g(x)$ - бесконечно малая в точке a функция. ■

Следствие. Произведение конечного числа ограниченных функций, из которых хотя бы одна - бесконечно малая в точке a, есть бесконечно малая в точке a функция.

Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - бесконечно малые в точке a функции. Тогда

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

называется неопределенностью типа $\frac{0}{0}$.

Пример. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ является неопределенностью типа $\frac{0}{0}$.

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка (имеет более высокий порядок мало), чем $g(x)$ при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Обозначение: $f = \mathrm{o}(g)$ при $x \to a$ (символ o(g) читается так: о-малое от g).

Пример. $x^2 = \mathrm{o}(x)$ при $x \to 0$.

Определение. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка (имеют одинаковый порядок малости) при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \neq 0$$

Обозначение: $f = \mathrm{O}(\mathrm{g})$ при $x \to a$ (символ O(g) читается так: O-большое от g).

Пример. $2x^2 + x^3 = \mathrm{O}\left(x^2\right)$ при $x \to 0$.

Определение. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными бесконечно мальми при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Обозначение: $f \sim g$ при $x \to a$.

Примеры.

1. $x^2 + x^3 \sim x^2$ при $x \to 0$.

2. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$ (это будет доказано ниже).

Замечание. Для неопределенностей типа $\dfrac{0}{0}$ при $x \to a+0$, $x \to a-0$ и $x \to \infty$ можно дать аналогичные определения.

Свойства символа «o-малое»:

а) o(g) $\pm$ o(g) $=$ o(g).
б) Если $f = \mathrm{o}(g)$, то $\mathrm{o}(f) \pm \mathrm{o}(g) = \mathrm{o}(g)$.
Пример: $\mathrm{o}\left(x^2\right) \pm \mathrm{o}(x) = \mathrm{o}(x)$.
в) Если f и g - бесконечно малые, то $f \cdot g = \mathrm{o}(f), f \cdot g = \mathrm{o}(g)$.
г) Если $f \sim g$, то $f - g = \mathrm{o}(f)$ и $f - g = \mathrm{o}(g)$.
д) $(c \cdot g) = \mathrm{o}(g)$, если $\quad c = \mathrm{const} \neq 0$.
е) $\mathrm{o}(g + \mathrm{o}(g)) = \mathrm{o}(g)$. Пример: $(x + 2x^2) = \mathrm{o}(x)$.

Справедливость этих утверждений нетрудно доказать, используя определение символа «o-малое».

Замечание. 1) Равенства с символом «o-малое», как правило, верны только в одну сторону (слева направо). Например, $x^2 = \mathrm{o}(x)$ при $x \to 0$, но, вообще говоря, $\mathrm{o}(x) \neq x^2$.

Замечание. 2) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - бесконечно большие в точке a функции. Тогда

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

называется неопределенностью типа $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ имеет при $x \to a$ более высокий порядок роста, чем функция $g(x)$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

Пример. Функция $f(x) = 1/x^2$ имеет при $x \to 0$ более высокий порядок роста, чем функция $g(x) = 1/x$, так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Определение. Говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют при $x \to a$ одинаковый порядок роста, если

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = b \neq 0$$

Пример. Функции $f(x) = 1/x + 1$ и $g(x) = 1/x$ имеют при $x \to 0$ одинаковый порядок роста.

Замечание. 3) Существуют другие типы неопределенностей:

$$\infty - \infty, \quad 0\cdot\infty, \quad 1^{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0.$$

Приведем примеры.

а)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - x\right)$$

является неопределенностью типа $\infty - \infty$.

б)

$$\lim_{x\to 0} x\cdot \operatorname{ctg} x$$

является неопределенностью типа $0\cdot\infty$.

в)

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$$

является неопределенностью типа 1^{∞}.

г)

$$\lim_{x\to 0+0} x^x$$

является неопределенностью типа 0^0.

д)

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$$

является неопределенностью типа ∞^0.

Теорема о пределе монотонной функции

Определение. Функция $f(x)$ называется: а) возрастающей, б) убывающей, в) невозрастающей, г) неубывающей на множестве X, если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство: а) $f(x_1) < f(x_2)$, б) $f(x_1) > f(x_2)$, в) $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, г) $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Функции а)-г) называются монотонными, а функции а) и б) - строго монотонными на множестве X.

Примеры. 1) Функция $f(x) = x^2$ является возрастающей на полупрямой $(0; +\infty)$. 2) Функция $f(x) = [x]$ (целая часть x) не убывает на числовой прямой $(-\infty; +\infty)$.

Теорема 7. Если функция $f(x)$ монотонна и ограничена на полупрямой $x \geqslant a$, то существует

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

$\square$ Доказательство. Рассмотрим случай, когда функция $f(x)$ не убывает на полупрямой $x \geqslant a$ и ограничена сверху на этом множестве (случай невозрастающей функции рассматривается аналогично). Тогда существует точная верхняя грань функции (обозначим ее буквой b):

$$\sup_{x \in [a; +\infty)} f(x) = b.$$

Докажем, что

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим число $b - \varepsilon$. По определению точной верхней грани функции $\exists A \in [a; +\infty) : f(A) > b - \varepsilon$. Поскольку $f(x)$ не убывает, то $f(x) \geqslant f(A)$ при $x > A$, и, следовательно, $f(x) > b - \varepsilon$ при $x > A$. Отсюда получаем неравенство $b - f(x) < \varepsilon$ при $x > A$, или $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $x > A$, а это означает, что $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$. Теорема 7 доказана. $\blacksquare$

Замечание. Аналогичная теорема имеет место для правого и левого пределов функции в точке a : если функция $f(x)$ монотон на и ограничена в правой (левой) полуокрестности точки a, то сущес твует

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \quad \left(\lim_{x \to a-0} f(x) \right).$$

Обратная функция

Определение 6.1. Пусть дано отображение $f : X \to Y$. Отображение $f^{-1} : Y \to X$ назовём обратным отображению f, если оно каждому элементу y множества Y ставит в соответствие тот элемент x множества X, который отображением f переводится в y.

Непосредственно из определения обратного отображения следует выполнение двух тождеств:

$$f^{-1}(f(x)) \equiv x, \quad x \in X, \tag{6.1}$$

$$f\left(f^{-1}(y)\right) \equiv y, \quad y \in Y \tag{6.2}$$

Требование выполнения этих двух тождеств можно принять за определение обратного отображения.

Очевидно также, что если отображение f^{-1} является обратным к отображению f, то отображение f является обратным к отображению f^{-1}.

Лемма Обратное к $f : X \to Y$ отображение определено в том и только том случае, если отображение f – биекция.

□ Доказательство. Если f - биекция, то уравнение

$$f(x) = y \tag{6.3}$$

имеет и притом единственное решение для любой правой части y из множества Y. Поставив каждому $y \in Y$ в соответствие решение уравнения (6.3), получим отображение $g : Y \to X$, удовлетворяющее определению 6.1. Следовательно, $g = f^{-1}$.

Наоборот, если отображение f^{-1}, обратное к f, определено, то справедливы тождества (6.1) и (6.2). По второму из них $x = f^{-1}(y)$ удовлетворяет уравнению (6.3), следовательно, уравнение (6.3) имеет решение при любой правой части $y \in Y$. Если x – какое-либо решение уравнения (6.3), то по первому из тождеств $x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y)$, то есть решение единственно. Так как уравнение (6.3) имеет единственное решение при любой правой части y из множества Y, то отображение f – биекция. ■

Сложная функция

Определение. Пусть даны два отображения: $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$. Рассмотрим отображение $F : X \to Z$, определяемое следуюшим образом: $F(x) = g(f(x)), x \in X$. Отображение F называют композиииeй или суперпозицией отображений f и g или сложной функииeй и пишут $F = g \circ f$.

1. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2; g : \mathbb{R} \to [-1; 1], g(y) = \sin y$. Тогда суперпозиция этих отображений $F = g \circ f : \mathbb{R} \to [-1; 1]$ действует по правилу $F(x) = \sin x^2$.
2. Пусть $f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^+, f(x) = \operatorname{tg} x; g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, g(y) = \sqrt{y}$. Тогда суперпозиция $F = g \circ f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^+, F(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

Первый замечательный предел

Так называется следующее равенство:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

где величина x выражена в радианах.

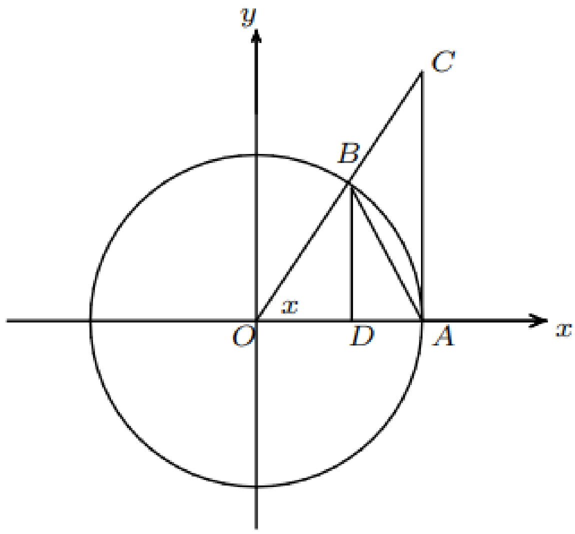
Для доказательства этого равенства докажем сначала два важных неравенства -

$$\sin x < x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right), \tag{6.4}$$

$$x < \operatorname{tg} x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right), \tag{6.5}$$

которые имеют многочисленные приложения в различных вопросах. Приведем геометрическое доказательство этих неравенств.

Рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат:



Пусть точка B находится в первой четверти на окружности. Получим угол AOB, радианная мера которого равна x. Проведем в точке A перпендикуляр к оси абсцисс и продолжим OB до пересечения с этим перпендикуляром в точке C. Из точки B опустим перпендикуляр на ось абсцисс в точку D. Тогда из чертежа ясно, что сектор AOB содержится в треугольнике AOC и этот сектор содержит треугольник AOB. Поэтому для площадей $S_{\triangle AOB}$ треугольника $AOB, \widehat{S}$ сектора AOB и $S_{\triangle AOC}$ треугольника AOC справедливо следующее неравенство:

$$S_{\triangle AOB} < \widehat{S} < S_{\triangle AOC} \tag{6.6}$$

Имеем $S_{\triangle AOB} = \dfrac{1}{2}|OA| \cdot |BD|, S_{\triangle AOC} = \dfrac{1}{2}|OA| \cdot |AC|$ и $\widehat{S} = \dfrac{1}{2}|AO| \cdot \ell(AB) = \dfrac{1}{2}x$ (т. к. $|AO| = 1$, а длина $\ell(\widehat{AB})$ дуги окружности равна произведению радиуса на величину угла, выраженную в радианах, на который опирается эта дуга). Далее, $|BD| = \sin x$, поэтому левое неравенство в (6.6) принимает вид $\dfrac{1}{2}\sin x < \dfrac{1}{2}x$, или $\sin x < x$. Правое неравенство в (6.6) имеет такой вид: $\dfrac{1}{2}x < \dfrac{1}{2}|AC| = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x$, т.е. $x < \operatorname{tg} x$. Тем самым доказаны неравенства (6.4) и (6.5).

Из (6.4) получаем, что $\dfrac{\sin x}{x} < 1 \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$, а из (6.5) следует, что $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$. Итак,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда, так как $\sin \dfrac{x}{2} < \dfrac{x}{2}$, следует:

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}$$

Окончательно,

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Учитывая еще, что функция $\frac{\sin x}{x}$ четная, для $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ получим

$$1 - \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{\sin(-x)}{(-x)} < \frac{(-x)^2}{2} = \frac{x^2}{2}$$

и

$$1 - \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{\sin(-x)}{(-x)} > 0$$

Таким образом, неравенство

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}$$

справедливо для всех x, таких, что $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Применяя к этому неравенству теорему о трех пределах, получаем

$$\lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 0$$

а это равносильно тому, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

■

Следствия первого замечательного предела

1. Так как $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, то $\sin x - x = o(x)$, откуда получаем простейшую асимптотическую формулу для функции $\sin x$ при $x \to 0$:

   $$\sin x = x + o(x)$$

   Позднее мы покажем, что здесь $o(x) = -x^3/6 + o\left(x^3\right)$.

2.
   $$\cos x = 1 - x^2/2 + o\left(x^2\right) \quad \text{при } x \to 0.$$

   Действительно,

   $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 1$$

   откуда получаем $1 - \cos x \sim x^2/2 \Rightarrow 1 - \cos x - x^2/2 = o\left(x^2\right) \Rightarrow \Rightarrow \cos x = 1 - x^2/2 + o\left(x^2\right)$ при $x \to 0$.

3.
$$\operatorname{tg} x = x + o(x) \quad \text{при } x \to 0.$$

(эту формулу выведите самостоятельно). Позднее мы узнаем, что здесь $o(x) = x^3/3 + o\left(x^3\right)$.

Примеры

1.
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x + 2\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{9x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) + 2(x+o(x))^2}{x^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{9x^2}{2} + o\left(x^2\right) + 2x^2 + o\left(x^2\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{13}{2} + \frac{o\left(x^2\right)}{x^2}\right) = \frac{13}{2}.$$

2.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$$

Первая попытка (использование простейших асимптотических формул):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x + o(x) - (x + o(x))}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^3} = ?$$

Вторая попытка (с помощью первого замечательного предела):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(\cos x - 1)}{\cos x \cdot x^3} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} = 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Второй замечательный предел

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$$

(Этот предел является неопределенностью типа 1^∞)

□ По определению
$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Положим $1/n = x$, тогда $n = 1/x, x \to 0$ при $n \to +\infty$ и мы получаем:

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$$

Однако, это еще не доказывает, что второй замечательный предел имеет место, т.к. при таком подходе $x \to 0$, принимая лишь значения $1/n$, где $n \in \mathbb{N}$, а нужно доказать справедливость предельного равенства при любом способе стремления x к нулю, в том числе и когда x принимает отрицательные значения.

Введем функцию

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]}, \quad x \geqslant 1$$

Так как $f(x) = (1 + 1/n)^n$ при $n \leqslant x < n + 1$, то

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Докажем, что

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Воспользуемся неравенствами (при $x \geqslant 1$):

$$\begin{aligned}
&[x] \leqslant x \leqslant [x] + 1 = [x+1] \Rightarrow \frac{1}{[x+1]} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{[x]} \Rightarrow \\
&\Rightarrow 1 + \frac{1}{[x+1]} \leqslant 1 + \frac{1}{x} \leqslant 1 + \frac{1}{[x]} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{[x+1]}\right)^{[x]} \leqslant \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{[x+1]}\right)^{[x+1]} \cdot \left(1 + \frac{1}{[x+1]}\right)^{-1} \leqslant \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leqslant \\
&\leqslant \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \cdot \left(1 + \frac{1}{[x]}\right).
\end{aligned}$$

Перейдем к пределу при $x \to +\infty$. Левая и правая части последнего двойного неравенства, очевидно, стремятся к e. Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Положим $y = 1/x$. Тогда $y \to +0$ при $x \to +\infty$ и мы получаем:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$$

Ради удобства перепишем последнее равенство в виде

$$\lim_{x\to+0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{6.6}$$

Докажем теперь, что

$$\lim_{x\to -0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{6.7}$$

Положим $y=-x$. Тогда $y\to +0$ при $x\to -0$ и

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1-y)^{-\frac{1}{y}} = \left(\frac{1}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}} = \left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}}.$$

Пусть $z=y/(1-y)$. Тогда если $y\to +0$, то $z\to +0$. Кроме того, $y=z/(1+z)$ и $1/y=1/z+1$. Поэтому

$$\lim_{x\to -0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{z\to +0}(1+z)^{\frac{1}{z}}\cdot(1+z) = e\cdot 1 = e$$

то есть выполнено равенство (6.7).
Из (6.6) и (6.7) следует:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

что и требовалось доказать.

Примеры.

1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

Отсюда вытекает, что $\log_a(1+x)\sim x/\ln a$ при $x\to 0$, поэтому имеет место асимптотическая формула

$$\log_a(1+x) = \frac{x}{\ln a} + o(x) \quad \text{при } x\to 0 \tag{6.8}$$

В частности, для $a=e$ получаем формулу

$$\ln(1+x) = x + o(x) \quad \text{при } x\to 0$$

2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)} = \ln a.$$

Здесь была сделана замена $a^x-1=y$, при этом $y\to 0$, если $x\to 0$. Следовательно, $a^x-1\sim x\ln a$ при $x\to 0$, поэтому имеет место асимптотическая формула

$$a^x = 1 + x\ln a + o(x) \quad \text{при } x\to 0. \tag{6.9}$$

В частности, для $a=e$ получаем формулу

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad \text{при} \quad x\to 0.$$