Лекция 2. Мощность множества. Числовые множества. Точная верхняя (нижняя) грани числового множества (супремум и инфимум). Теорема о существовании верхней (нижней) грани ограниченного множества. Аксиоматическое определение множества действительных чисел

Мощность множества

Мощность множества — характеристика, показывающая количество элементов в данном множестве. Обозначается символом $|A|$.

- **Конечные множества**: множества с конечным числом элементов.
- **Бесконечные множества**: множества, содержащие бесконечно много элементов.

Бесконечные множества бывают:

- **Счётные**: их можно поставить в соответствие натуральным числам (например, множество $\mathbb{N}$).
- **Несчётные**: их невозможно поставить в соответствие с натуральными числами (например, множество действительных чисел $\mathbb{R}$).

Числовые множества

Основные числовые множества:

- $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, представимых в виде дроби $\frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathbb{Z}$ и $q \neq 0$.
- $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, которое включает рациональные и иррациональные числа.
- $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

Точные верхняя и нижняя грани числового множества (Супремум и Инфимум)

- **Верхняя грань** множества $A \subset \mathbb{R}$: число M, такое что $a \leq M$ для всех $a \in A$.
- **Нижняя грань** множества $A \subset \mathbb{R}$: число m, такое что $a \geq m$ для всех $a \in A$.

Супремум и Инфимум:

- **Супремум** (точная верхняя грань) множества A: наименьшая из всех верхних граней множества A. Обозначается $\sup A$.

- **Инфимум** (точная нижняя грань) множества A: наибольшая из всех нижних граней множества A. Обозначается $\inf A$.

Примеры:

- Пусть $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 1\}$.
- Тогда: $\sup A = 1$, $\inf A = 0$.

Теорема о существовании верхней и нижней грани ограниченного множества

Теорема: Если множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху, то оно имеет точную верхнюю грань (супремум) в $\mathbb{R}$.

Теорема: Если множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено снизу, то оно имеет точную нижнюю грань (инфимум) в $\mathbb{R}$.

Замечание: Аксиома полноты для действительных чисел гласит, что любое непустое множество, ограниченное сверху, имеет точную верхнюю грань.

Аксиомы вещественных чисел

В классическом математическом анализе изучаются вещественнозначные функции вещественного аргумента, поэтому нам понадобится знать свойства вещественных чисел. В абсолютно строгом курсе теория вещественного числа строится аксиоматически, но в учебном курсе такое изложение не предусмотрено. Мы будем считать, что читатель в основном знаком с понятием вещественного числа и дадим только обзорное изложение аксиоматики вещественных чисел, остановившись более подробно, на тех свойствах чисел, о которых не упоминалось в средней школе.

Аксиомы сложения

На множестве вещественных чисел определена бинарная операция (то есть каждой паре вешественных чисел единственным образом сопоставляется некоторое вещественное число), которая называется сложением и обладает следуюшими свойствами:

1. Для любых двух чисел а и b выполняется
$$a + b = b + a.$$
Это свойство называется коммутативным законом сложения.

2. Для любых чисел a, b и с выполняется
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
Это - ассоциативный закон сложения.

3. Существует число, которое называется нейтральным элементом сложения (или нулем) и которое обозначается 0 такое, что для всякого числа a выполняется
$$a + 0 = a.$$

4. Для любого числа a существует число, которое называется противоположным данному и обозначается - a такое, что
$$a + (-a) = 0.$$

Сформулируем и докажем несколько следствий из этих аксиом.

Следствие 1.

Нейтральный элемент сложения единственный.

□ Предположим, что существует два нейтральных элемента 0 и $0'$. Тогда $0' =$ (в силу аксиомы 3) $= 0' + 0 =$ (в силу аксиомы 1) $=$
$= 0 + 0' =$ (в силу аксиомы 3) $= 0$. ■

Следствие 2.

Число, противоположное данному, единственно.

□ Предположим, что число a имеет два противоположных элемента b и b'. Тогда, применяя последовательно аксиомы 3, 4, 2, 1, 4, 3, получим
$$b' = b' + 0 = b' + (a + b) = (b' + a) + b = 0 + b = b$$

■

Следствие 3.

Для любого числа a верно $-(-a) = a$.

□ Требуется доказать, что число a является противоположным числу $-a$. Действительно, $(-a) + a = a + (-a) = 0$, а это и означает, что $a = -(-a)$. ■

Теперь можно ввести действие, обратное сложению и для любых вещественных чисел a и b определить разность $c = a - b$.

Определение 2.1. Разностью чисел a и b называется такое вещественное число c для которого выполнено равенство $c + b = a$.

Теорема 2.1. *Для любых вещественных чисел a и b существует разность $c = a - b$, причем это число c единственно.*

□

- Возьмем число $c = a + (-b)$ и проверим по определению, что оно является разностью чисел a и b. Действительно, используя свойства сложения, получим $c + b = (a + (-b)) + b = a + ((-b) + b) = a + 0 = a$.

  Таким образом, число $a + (-b)$ является разностью, следовательно, разность всегда существует.

- Докажем ее единственность. Пусть c - разность чисел a и b. Тогда $c+b=a$. Прибавим к каждой части этого равенства по $(-b)$. Получим $c+b+(-b)=a+(-b) \Leftrightarrow c+(b+(-b))=a+(-b) \Leftrightarrow c+0=a+(-b) \Leftrightarrow c=a+(-b)$.

Таким образом, только число $a+(-b)$ будет требуемой разностью.■

Для разности выполняются свойства:

Свойство 1. Для любого числа а выполняется равенство $a-a=0$;

Свойство 2. Для любых чисел a u выполняется равенство $-a-b=-(a+b)$.

Эти свойства докажите самостоятельно.

Аксиомы умножения

На множестве вещественных чисел определена бинарная операция, которая называется умножением и обладает следующими **свойствами**:

1. Для любых двух чисел a и b выполняется
$$a \cdot b = b \cdot a$$
Это свойство называется коммутативным законом умножения.

2. Для любых чисел a, b и c выполняется
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$
Это - ассоциативный закон умножения.

3. Существует число, которое называется нейтральным элементом умножения (или единицей) и которое обозначается 1 такое, что для всякого числа a выполняется
$$a \cdot 1 = a.$$

4. Для любого числа $a \neq 0$ существует число, которое называется обратным данному и обозначается $\dfrac{1}{a}$ такое, что
$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

Из аксиом умножения следуют свойства:

Свойство 1. Нейтральный элемент умножения единственен.

Свойство 2. Для любого числа $\neq 0$ число $\dfrac{1}{a}$ единственно.

Свойство 3. Для любого числа $a \neq 0$ выполняется равенство $\dfrac{1}{1/a} = a$.

Эти свойства аналогичны свойствам 1-3 сложения и доказываются аналогично.

Свойство 4. Произведение обратных к числам, отличным от нуля, равно обратному числу к произведению этих чисел, то есть $\dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a \cdot b}$.

Докажем последнее свойство.

□ Пользуясь аксиомами умножения, получим
$\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\right)\cdot(a\cdot b)=\left(\frac{1}{a}\cdot a\right)\cdot\left(\frac{1}{b}\cdot b\right)=1.$
Отсюда следует, что число $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}$ - обратное к произведению ab, что и требовалось доказать.
■

Теперь определим действие деления двух вещественных чисел.
Определение 2.2. Частным двух вещественных чисел будем называть такое вещественное число $c=\frac{a}{b}$, для которого $c\cdot b=a$.
Теорема 2.2. *Для любых двух вещественных чисел* a , $b\neq 0$ *существует и единственно частное* $\frac{a}{b}$.

□

- Возьмем в качестве c число $a\cdot\frac{1}{b}$ и докажем, что оно будет частным чисел a и b. Имеем $c\cdot b=a\cdot\frac{1}{b}\cdot b=a\cdot\left(\frac{1}{b}\cdot b\right)=a\cdot 1=a.$
- Теперь докажем **единственность** этого частного. Допустим, что c - какоенибудь частное чисел a и b. Тогда $c\cdot b=a$. Умножим это равенство на число $\frac{1}{b}$. Тогда $c\cdot b\cdot\frac{1}{b}=a\cdot\frac{1}{b}\Leftrightarrow c\cdot\left(b\cdot\frac{1}{b}\right)=a\cdot\frac{1}{b}\Leftrightarrow c\cdot 1=a\cdot\frac{1}{b}\Leftrightarrow c=a\cdot\frac{1}{b}$. То есть другого частного быть не может.

Теперь можно доказать, что частное $\frac{a}{a}=1$. ■

Далее можно из множества вещественных чисел выделить натуральные числа, целые и рациональные дроби. Также можно ввести операции возведения в степень и извлечения корня. Мы не будем здесь заниматься подробным изучением различных классов чисел, напомним только, что числа, которые можно представить в виде частного $\frac{a}{b}$, где a - целое, а b - натуральное число, называют рациональными числами. Каждое рациональное число можно записать, как конечную или бесконечную периодическую десятичную дробь. Если вещественное число нельзя представить в виде такого частного, то это число будем называть иррациональным.

Напомним также, что каждое рациональное число вида $a_0,a_1a_2\dots a_n(9)$, т.е. число, в десятичной записи которого, начиная с некоторой позиции, находится 9 в периоде, можно записать в виде конечной десятичной дроби вида $a_0,a_1a_2\dots(a_n+1)$, т.е. такого, где цифра, стоящая в n - ой позиции увеличивается на 1 и становится последней. Например, $1,3999\dots=1,4$ или $12,999\dots=13$.

Сформулируем два наиболее интересных свойства дробных чисел:
Свойство 1. Равенство $\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\quad b\neq 0, d\neq 0$ равносильно равенству $ad=bc$;

Свойство 2. Для любых чисел $a,b\neq 0$ и $c\neq 0$ выполняется равенство $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}$.

Аксиома, связывающая сложение и умножение

Для любых чисел a, b и c выполняется

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$$

Это свойство называется дистрибутивным законом.
Аксиомы первых трех групп позволяют доказать еще некоторое количество свойств вещественных чисел, например,

$$a\cdot 0 = 0;$$
$$(-a)\cdot b = -(a\cdot b) \quad \textit{и} \quad a\cdot(-b) = -(a\cdot b).$$

Аксиома порядка

Множество вещественных чисел разделено на три непустых и непересекающихся класса так, что один класс состоит из одного нулевого элемента, числа, входящие в другой класс называются положительными, а числа входящие в третий класс - отрицательными. При этом

1. Если $a-$ положительно, то $(-a)-$ отрицательно и наоборот;
2. Если числа a и b - положительные, то их сумма $a+b$ - положительная;
3. Если числа a и b - положительные, то $a\cdot b$ - положительное.

Сформулируем следствия из этой аксиомы.
Следствие 1. Число 1 - положительное.

□ Докажем, что $1\neq 0$. Действительно, в силу аксиомы порядка, существует хотя бы одно положительное число a. Тогда, если допустить, что $1=0$, то получим $a=a\cdot 1 = a\cdot 0 = 0$, что противоречит выбору числа a.

Теперь допустим, что 1 – число отрицательное. Тогда, (-1) - положительно, и в силу пункта 3 аксиомы порядка, получим, что, если a - число положительное, то произведение $(-1)\cdot a$ - тоже положительно. Так как $(-1)\cdot a = -(1\cdot a) = -a$, то $-a$ - положительно, следовательно, a - отрицательно, что противоречит выбору a.

Таким образом, число 1 может быть отнесено только к классу положительных чисел.■
Следствие 2. Аксиома порядка позволяет ввести понятие сравнения вещественных чисел.
Определение 2.3. Будем говорить, что a больше b и писать: $a>b$, если разность $a-b$ - положительна. Если эта разность отрицательна, то будем говорить, что a меньше b и писать $a<b$.

Таким образом, для любых двух вещественных чисел a и b выполняется одно из трех соотношений:

$$a=b, \quad a>b, \quad a<b.$$

Будем также писать $a\geq b (a\leq b)$, если выполнено одно из двух соотношений: $a>b (a<b)$ или $a=b$.

Наличие соотношений «больше» и «меньше» для любой пары неравных вещественных чисел называют свойством упорядоченности множества вещественных чисел.

Отсюда следуют **свойства неравенств**:

1. Если $a>b$, то $b<a$.

2. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$. Это свойство называется свойством **транзитивности** неравенств.
3. Если $a > b$ и – любое вещественное число, то $a + c > b + c$.
4. Если $a > b$ и c – положительно, то $a \cdot c > b \cdot c$ и если $a > b$ и c – отрицательно, то $a \cdot c < b \cdot c$.
5. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.
6. Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$.
7. Если числа a, b, c и d – положительныи и $a > b, c > d$, то $a \cdot c > b \cdot d$.
8. Если числа a и b – одного знака и $a > b$, то $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$.

Докажите их самостоятельно.
Введение понятия сравнения вещественных чисел позволяет доказать еще несколько интересных следствий.
Следствие 3. На множестве вещественных чисел нет наибольшего числа и наименьшего числа, то есть какое бы число a мы ни взяли, всегда найдется число b такое, что $b > a$ и число c такое, что $c < a$.

Для доказательства достаточно взять $b = a + 1$ и $c = a - 1$.
Следствие 4. Каковы бы ни были два различных вещественных числа, всегда найдется число, лежащее между ними.

Для доказательства предположим, что $a < b$. Возьмем $c = \dfrac{a+b}{2}$. Тогда из свойств неравенств следует: $a + a < a + b < b + b$, откуда получим $a < c < b$.
Упражнение. Докажите, что если $a > 0$, то a - положительно и наоборот.

Аксиомы порядка позволяют ввести такое важное понятие, как модуль числа.

Аксиома непрерывности

Каковы бы ни были два непустых множества вещественных чисел A и B, у которых для любых элементов $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \leq b$, существует такое число λ, что для всех $a \in A$, $b \in B$ имеет место неравенство $a \leq \lambda \leq b$.

Свойство непрерывности вещественных чисел означает, что на вещественной прямой нет «пустот», то есть точки, изображающие числа заполняют всю вещественную ось.

Дадим другую формулировку аксиоме непрерывности. Для этого введем
Определение 2.5. Два множества A и B будем называть сечением множества вещественных чисел, если

1. множества A и B не пусты;
2. объединение множеств A и B составляет множество всех вещественных чисел;
3. каждое число множества A меньше числа множества B.

То есть каждое множество, образующее сечение, содержит хотя бы один элемент, эти множества не содержат общих элементов и, если $a \in A$ и $b \in B$, то $a < b$.

Множество A будем называть **нижним классом**, а множество B – **верхиим классом** сечения. Обозначать сечение будем через $A \mid B$.

Самыми простыми примерами сечений являются сечения полученные следующим образом. Возьмем какое-либо число α и положим $A = \{x \mid x < \alpha\}$, $B = \{x \mid x \geq \alpha\}$. Легко видеть, что эти множества не пусты, не пересекаются и если $a \in A$ и $b \in B$, то $a < b$, поэтому множества A и B образуют сечение. Аналогично, можно образовать сечение, множествами $A = \{x \mid x \leq \alpha\}, B = \{x \mid x > \alpha\}$.

Такие сечения будем называть сечениями, порожденными числом α или будем говорить, что число α производит это сечение. Это можно записать как $\alpha = A \mid B$.

Сечения, порожденные каким-либо числом, обладают двумя интересными свойствами:

Свойство 1. Либо верхний класс содержит наименьше число, и в нижнем классе нет наибольшего числа, либо нижний класс содержит наибольшее число, и верхнем классе нет наименьшего.

Свойство 2. Число, производящее данное сечение, единственно.

Оказывается, что аксиома непрерывности, сформулированная выше, эквивалентна утверждению, которое называют принципом Дедекинда:

Принцип Дедекинда. Для каждого сечения существует число, порождающее это сечение.

Докажем эквивалентность этих утверждений.

$\square$

- Пусть справедлива аксиома непрерывности, и задано какое-нибудь сечение $A \mid B$. Тогда, так как классы A и B удовлетворяют условиям, сформулированным в аксиоме, существует число λ такое, что $a \leq \lambda \leq b$ для любых чисел $a \in A$ и $b \in B$. Но число λ должно принадлежать одному и только одному из классов A или B, поэтому будет выполнено одно из неравенств $a \leq \lambda < b$ или $a < \lambda \leq b$. Таким образом, число λ либо является наибольшим в нижнем классе, либо наименьшим в верхнем классе и порождает данное сечение.

- Обратно, пусть выполнен принцип Дедекинда и заданы два непустых множества A и B таких, что для всех $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \leq b$. Обозначим через $\tilde{B}$ множество чисел $\{\tilde{b}\}$ таких, что $a \leq \tilde{b}$ для любого $\tilde{b} \in \tilde{B}$ и всех $a \in A$. Тогда $B \subset \tilde{B}$. За множество $\tilde{A}$ примем множество всех чисел, не входящих в $\tilde{B}$.

- Докажем, что множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ образуют сечение.

  Действительно, очевидно, что множество $\tilde{B}$ не пусто, так как содержит непустое множество B. Множество $\tilde{A}$ тоже не пусто, так как если число $a \in A$, то число $a - 1 \notin \tilde{B}$, так как любое число, входящее в $\tilde{B}$ должно быть не меньше числа a, следовательно, $a - 1 \in \tilde{A}$.

  Далее, множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ не пересекаются, и их объединение составляет множество всех вещественных чисел, в силу выбора множеств.

  И, наконец, если $\tilde{a} \in \tilde{A}$ и $\tilde{b} \in \tilde{B}$, то $\tilde{a} \leq \tilde{b}$. Действительно, если какое- либо число будет удовлетворять неравенству $c > \tilde{b}$, где $\tilde{b} \in \tilde{B}$, то будет верным неравенство $c > a$ (a - произвольный элемент множества A) и $c \in \tilde{B}$.

Итак, $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ образуют сечение, и в силу принципа Дедекинда, существует число λ, порождающее это сечение, то есть являющееся либо наибольшим в классе $\tilde{A}$, либо наименьшим в классе $\tilde{B}$.

- Докажем, что это число не может принадлежать классу $\tilde{A}$. Действительно, если $\lambda \in \tilde{A}$, то существует число $a^* \in A$ такое, что $\lambda < a^*$. Тогда существует число a', лежащее между числами λ и a^*. Из неравенства $a' < a^*$ следует, что $a' \in \tilde{A}$, тогда из неравенства $\lambda < a'$ следует, что λ не является наибольшим в классе $\tilde{A}$, что противоречит принципу Дедекинда. Следовательно, число λ будет наименьшим в классе $\tilde{B}$ и для всех $a \in A$ и будет выполняться неравенство $a \le \lambda \le b$, что и требовалось доказать. ■

Таким образом, свойство, сформулированное в аксиоме и свойство, сформулированное в принципе Дедекинда эквивалентны. В дальнейшем эти свойства множества вещественных чисел мы будем называть непрерывностью по Дедекинду.

Из непрерывности множества вещественных чисел по Дедекинду следуют две важные теоремы.

Теорема 2.3. (Принцип Архимеда) Каково бы ни было вещественное число a, существует натуральное число n такое, что $a < n$.

□ Допустим, что утверждение теоремы неверно, то есть существует такое число b_0, что выполняется неравенство $n \le b_0$ для всех натуральных чисел n. Разобьем множество вещественных чисел на два класса: в класс B отнесем все числа b, удовлетворяющие неравенству $n \le b$ для любых натуральных n. Этот класс не пуст, так как ему принадлежит число b_0. В класс A отнесем все оставшиеся числа. Этот класс тоже не пуст, так как любое натуральное число входит в A. Классы A и B не пересекаются и их объединение составляет множество всех вещественных чисел.

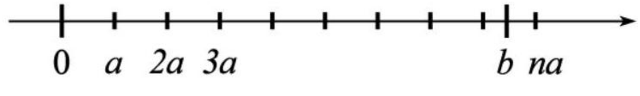
Если взять произвольные числа $a \in A$ и $b \in B$, то найдется натуральное число n_0 такое, что $a < n_0 \le b$, откуда следует, что $a < b$. Следовательно, классы A и B удовлетворяют принципу Дедекинда и существует число α, которое порождает сечение $A \mid B$, то есть α является либо наибольшим в классе A, либо наименьшим в классе B. Если предположить, что α входит в класс A, то можно найти натуральное n_1, для которого выполняется неравенство $\alpha < n_1$. Так как n_1 тоже входит в A, то число α не будет наибольшим в этом классе, следовательно, наше предположение неверно и α является наименьшим в классе B.

С другой стороны, возьмем число $\alpha - 1$, которое входит в класс A. Следовательно, найдется натуральное число n_2 такое, что $\alpha - 1 < n_2$, откуда получим $\alpha < n_2 + 1$. Так как $n_2 + 1$ - натуральное число, то из последнего неравенства следует, что $\alpha \in A$. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Следствие. Каковы бы ни были числа a и b такие, что $0 < a < b$, существует натуральное число n, для которого выполняется неравенство na $> b$.

□ Для доказательства достаточно применить принцип Архимеда к числу $\dfrac{b}{a}$ и воспользоваться свойством неравенств. ■

Следствие имеет простой геометрический смысл: Каковы бы ни были два отрезка, если на большем из них, от одного из его концов последовательно откладывать меньший, то за конечное число шагов можно выйти за пределы большего отрезка.



Пример 1. Доказать, что для всякого неотрицательного числа существует единственное неотрицательное вещественное число t такое, что $t^n = a, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Эта теорема о существовании арифметического корня п-ой степени из неотрицательного числа в школьном курсе алгебры принимается без доказательства.

Если $a = 0$, то $x = 0$, поэтому доказательство существования арифметического корня из числа a требуется только для $a > 0$.

Предположим, что $a > 0$ и разобьем множество всех вещественных чисел на два класса. В класс B отнесем все положительные числа x, которые удовлетворяют неравенству $x^n > a$, в класс A, все остальные.

По аксиоме Архимеда существуют натуральные числа k и m такие, что $\dfrac{1}{m} < a < k$. Тогда $k^2 \geq k > a$ и $\dfrac{1}{m^2} \leq \dfrac{1}{m} < a$, т.е. оба класса непусты, причем класс A содержит положительные числа.

Очевидно, что $A \cup B = \mathbb{R}$ и если $x_1 \in A$ и $x_2 \in B$, то $x_1 < x_2$.
Таким образом, классы A и B образуют сечение. Число, образующее это сечение, обозначим через t. Тогда t либо является наибольшим числом в классе A, либо наименьшим в классе B.

Допустим, что $t \in A$ и $t^n < a$. Возьмем число h, удовлетворяющее неравенству $0 < h < 1$. Тогда

$$(t+h)^n =$$
$$= t^n + C_n^1 t^{n-1}h + C_n^2 t^{n-2}h^2 + \ldots + C_n^n h^n < t^n + C_n^1 t^{n-1}h + C_n^2 t^{n-2}h + \ldots + C_n^n h =$$
$$= t^n + h\left(C_n^1 t^{n-1} + C_n^2 t^{n-2} + \ldots + C_n^n + C_n^0 t^n\right) - hC_n^0 t^n = t^n + h(t+1)^n - ht^n =$$
$$= t^n + h\left((t+1)^n - t^n\right).$$

Отсюда, если взять $h < \dfrac{a - t^n}{(t+1)^n - t^n}$, то получим $(t+h)^n < a$. Это означает, что $t + h \in A$, что противоречит тому, что t наибольший элемент в классе A.

Аналогично, если предположить, что t - наименьший элемент класса B, то, взяв число h, удовлетворяющее неравенствам $0 < h < 1$ и $h < \dfrac{t^n - a}{(t+1)^n - t^n}$,
получим

$$(t-h)^n = t^n - C_n^1 t^{n-1}h + C_n^2 t^{n-2}h^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n h^n >$$
$$> t^n - \left(C_n^1 t^{n-1}h + C_n^2 t^{n-2}h + \ldots + C_n^n h\right) = t^n - h\left((t+1)^n - t^n\right) > a.$$

Это означает, что $t - h \in B$ и t не может быть наименьшим элементом класса B. Следовательно, $t^n = a$.

Единственность следует из того что, если $t_1 < t_2$, то $t_1^n < t_2^n$.

Пример 2. Доказать, что, если $a < b$, то всегда найдется рациональное число r такое, что $a < r < b$.

Если числа a и b - рациональные, то число $\dfrac{a+b}{2}$ рационально и удовлетворяет требуемым условиям. Допустим, что хотя бы одно из чисел a или b иррационально, например, допустим, что иррационально число b. Предположим также, что $a \geq 0$, тогда $b > 0$. Запишем представления чисел a и b в виде десятичных дробей: $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots.$ и $b = \beta_0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots$, где вторая дробь бесконечная и непериодическая. Что касается представления числа a, то будем считать, что, если число a - рационально, то его запись либо конечна, либо это периодическая дробь, период которой не равен 9.

Так как $b > a$, то $\beta_0 \geq \alpha_0$; если $\beta_0 = \alpha_0$, то $\beta_1 \geq \alpha_1$; если $\beta_1 = \alpha_1$, то $\beta_2 \geq \alpha_2$ и т. д., причем найдется такое значение i, при котором в первый раз будет выполняться строгое неравенство $\beta_i > \alpha_i$. Тогда число $\beta_0, \beta_1\beta_2 \dots \beta_i$ будет рациональным и будет лежать между числами a и b.

Если $a < 0$, то приведенное рассуждение надо применить к числам $a + n$ и $b + n$, где n - натуральное число, такое что $n \geq |a|$. Существование такого числа следует из аксиомы Архимеда.

Определение 2.6. Пусть дана последовательность отрезков числовой оси $\{[a_n; b_n]\}, a_n < b_n$. Эту последовательность будем называть системой вложенных отрезков, если для любого n выполняются неравенства $a_n \leq a_{n+1} u\ b_{n+1} \leq b_n$

Для такой системы выполняются включения

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$$

то есть каждый следующий отрезок содержится в предыдущем.

Теорема 2.4. *Для всякой системы вложенных отрезков существует по крайней мере одна точка, которая входит в каждый из этих отрезков.*

□ Возьмем два множества $A = \{a_n\}$ и $B = \{b_n\}$. Они не пусты и при любых n и m выполняется неравенство $a_n < b_m$. Докажем это.

Если $n \geq m$, то $a_n < b_n \leq b_m$. Если $n < m$, то $a_n \leq a_m < b_m$.

Таким образом, классы A и B удовлетворяют аксиоме непрерывности и, следовательно, существует число λ такое, что $a_n \leq \lambda \leq b_n$ для любого n, т.е. это число принадлежит любому отрезку $[a_n; b_n]$. ■

В дальнейшем (теорема 2.1.8) мы уточним эту теорему.

Утверждение, сформулированное в теореме 2.4, называется **принципом Кантора**, а множество, удовлетворяющее этому условию, будем называть **непрерывным по Кантору**.

Мы доказали, что, если упорядоченное множество непрерывно по Дедекинду, то в нем выполнен принцип Архимеда и оно непрерывно по Кантору. Можно доказать, что упорядоченное множество, в котором выполнены принципы Архимеда и Кантора, будет непрерывным по Дедекинду. Доказательство этого факта содержится, например, в [4, том 1].

Принцип Архимеда позволяет каждому отрезку прямой сопоставить некоторое единственное положительное число, удовлетворяющее условиям:

1. Равным отрезкам соответствуют равные числа;

2. Если B точка отрезка AC и отрезкам AB и BC соответствуют числа a и b, то отрезку AC соответствует число $a + b$;

3. Некоторому отрезку соответствует число 1 .

Число, соответствующее каждому отрезку и удовлетворяющее условиям 1-3 называется **длиной** этого отрезка.

Принцип Кантора позволяет доказать, что для каждого положительного числа можно найти отрезок, длина которого равна этому числу. Таким образом, между множеством положительных вещественных чисел и множеством отрезков, которые откладываются от некоторой точки прямой по заданную сторону от этой точки, можно установить взаимно однозначное соответствие.

Это позволяет дать определение числовой оси и ввести соответствие между вещественными числами и точками на прямой. Для этого возьмем некоторую прямую и выберем на ней точку O, которая разделит эту прямую на два луча. Один из этих лучей назовем положстельным, а второй отрицательным. Тогда будем говорить, что мы выбрали направление на этой прямой.

Определение 2.7. Числовой осью будем называть прямую, на которой заданы
а) точка O, называемая началом отсчета или началом координат;
б) направление;
в) отрезок единичной длины.

Теперь каждому вещественному числу a сопоставим точку M на числовой прямой таким образом, чтобы
а) числу 0 соответствовало начало координат;
б) $|OM| = |a|$ – длина отрезка от начала координат до точки M равнялась модулю числа;
в) если a – положительно, то точка берется на положительном луче и, если оно отрицательно, то на отрицательном.

Это правило устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством вещественных чисел и множеством точек на прямой.

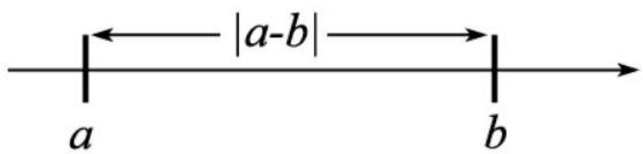
Числовую прямую (ось) будем также называть **вещественной прямой (осью)**.

Отсюда также следует **геометрический смысл модуля** вещественного числа: модуль числа равен расстоянию от начала координат до точки, изображаюшей это число на числовой оси.

Теперь мы можем дать геометрическую интерпретацию свойствам 6 и 7 модуля вещественного числа. При положительном C числа x, удовлетворяющие свойству 6, заполняют промежуток $(-C, C)$, а числа x, удовлетворяющие свойству 7, лежат на лучах $(-\infty, C)$ или $(C, +\infty)$.

Отметим еще одно замечательное геометрическое свойство модуля вещественного числа.

Модуль разности двух чисел равен расстоянию между точками, соответствуюшими этим числам на вешественной оси.



Далее приведем обозначения, которые применяются для записи некоторых стандартных числовых множеств.
$\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел;
$\mathbb{Z}$ - множество целых чисел;
$\mathbb{Q}$ - множество рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ - множество вещественных чисел;
$\mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_+$- множества, соответственно, целых, рациональных и вещественных неотрицательных чисел;
$\mathbb{C}$ - множество комплексных чисел.

Кроме того, множество вещественных чисел обозначается как $(-\infty, +\infty)$. Подмножества этого множества:

$(a, b) = \{x \mid x \in R, a < x < b\}$ - интервал;
$[a, b] = \{x \mid x \in R, a \leq x \leq b\}$ –отрезок;
$(a, b] = \{x \mid x \in R, a < x \leq b\}$ или
$[a, b) = \{x \mid x \in R, a \leq x < b\}$ – полуинтервалы или полуотрезки;

$(a, +\infty) = \{x \mid x \in R, a < x\}$ или $(-\infty, b) = \{x \mid x \in R, x < b\}$ - открытые лучи;
$[a, +\infty) = \{x \mid x \in R, a \leq x\}$ или $(-\infty, b] = \{x \mid x \in R, x \leq b\}$ - замкнутые лучи.

Наконец, иногда нам будут нужны промежутки, у которых нам не будет важно, принадлежат его концы этому промежутку или нет. Такой промежуток будем обозначать $\langle a, b\rangle$.