Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

Механика-математика факультеті

Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешудің тура әдістері

Темирбеков Нурлан Муханович ф-м.ғ.д., профессор

Жоспар

1. САТЖ есебінің қойылымы.
2. Есеп қисындылығы.
3. Есепті шешудің тура әдістері.
4. Гаусстың біртіндеп жою әдіс алгоритмі.
5. Гаусс әдісінің бағдарламалық коды.

Мақсаты

Есептеу математикасының негізгі есептерінің бірі болып табылатын сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін сандық шешудің тура әдістері мен есептеу алгоритмдерін талдау.

САТЖ есебінің қойылымы

Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі келесі түрде болады

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n = b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \cdots + A_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

мұндағы A_{ij} коэффициенттері мен b_j тұрақтылары белгілі, ал x_i белгісіздерді көрсетеді.

Матрицалық түрде теңдеулер жүйесі былай жазылады:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

немесе

$$A \cdot x = b \quad (3)$$

A –коэффициент матрицасы,b –бос мүше вектор бағаны, x – белгісіз вектор бағаны.

Есептің қойылымы: (3)-ті тепе-теңдікке айналдыратын $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$-вектор бағанын табу керек.

Шешімнің жалғыздығы

n белгісізді n сызықтық теңдеулер жүйесінің жалғыз шешімі бар, егер коэффициент матрицасының анықтауышы айрықша емес болса; яғни $|\mathrm{A}| \neq 0.$

Нашар шарттылық

Шарттылықтың формальды өлшемі ретінде келесі түрде анықталған матрицаның шарттылық саны болып табылады $cond(A) = \|\mathrm{A}\| \cdot \|\mathrm{A}^{-1}\|.$

$cond(A) \approx 1$ (жақсы шартталған)

$cond(A) \to \infty$ (нашар шартталған)

Векторлар үшін

$$\|x\|_{\mathrm{E}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}$$

$$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \le j \le n} |x_j|$$

Матрицалар үшін

$$\|A\|_{\mathrm{E}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2}$$

Евклид нормасы

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$$

Шексіздік нормасы

Шешу әдістері

1-кесте. Тура әдістер

Әдіс	Бастапқы түрі	Қорытынды түрі
Гаусс	$Ax = b$	$Ux = c$
LU жіктеу	$Ax = b$	$LUx = b$
Гаусс-Жордан	$Ax = b$	$Ix = c$

U – жоғарғы үшбұрышты матрица

L – төменгі үшбұрышты матрица

I – бірлік матрица

Шешу әдістері

3×3 жоғарғы үшбұрышты матрица

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

3×3 төменгі үшбұрышты матрица

$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}$$

Гаусстың біртіндеп жою әдісі: $Ux = c$

LU жіктеуі: $LUx = b$

$Ly = b$ (тура жүріс)

$Ux = y$ (кері жүріс)

Гаусс-Жордан: $Ix = c$

$x = c$ (шешім)

Гаусстың біртіндеп жою әдісі

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1k} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} & b_1 \\
0 & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2k} & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2n} & b_2 \\
0 & 0 & A_{33} & \cdots & A_{3k} & \cdots & A_{3j} & \cdots & A_{3n} & b_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & A_{kk} & \cdots & A_{kj} & \cdots & A_{kn} & b_k \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & A_{ik} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{in} & b_i \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nk} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn} & b_n
\end{array}\right]
$$

Тірек жол

Түрленетін жол

$$A_{ij} \leftarrow A_{ij} - \lambda \cdot A_{kj}, \qquad j = k, k+1, \dots, n \qquad (6)$$

$$b_i \leftarrow b_i - \lambda \cdot b_k \qquad (7)$$

Гаусстың біртіндеп жою үрдісінің бағдарламалық коды

(6)-(7) формуларында k және i коэффициенттері келесі диапазонда жүріп өтуі керек: $k = 1, 2, \ldots, n-1$ (тірек жол); $i = k+1, k+2, \ldots, n$ (түрлендірілетін жол). Біртіндеп жою кезеңінің алгоритмінің коды:

```
for k in range(0,n-1):
    for i in range(k+1,n):
        if a[i,k] != 0.0:
            lam = a[i,k]/a[k,k]
            a[i,k+1:n] = a[i,k+1:n] - lam*a[k,k+1:n]
            b[i] = b[i] - lam*b[k]
```

Кері жүріс кезеңі

$$\left[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}\right] = \left[\begin{array}{cccccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} & & b_1 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} & & b_2 \\ 0 & 0 & A_{33} & \cdots & A_{3n} & & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nn} & & b_n \end{array}\right]$$

$$A_{nn} \cdot x_n = b_n$$

$$x_n = \frac{b_n}{A_{nn}} \quad (8)$$

$$A_{kk}x_k + A_{k,k+1}x_{k+1} + \cdots + A_{kn}x_n = b_k$$

$$x_k = \left(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} A_{kj}x_j\right)\frac{1}{A_{kk}} \quad k = n-1, n-2, \dots, 1 \quad (9)$$

Кері жүрістің сәйкес алгоритмі

```
for k in range(n-1,-1,-1):
    x[k]=(b[k] - dot(a[k,k+1:n],x[k+1:n]))/a[k,k]
```

Операциялар саны.

тура жүріс $n^3/3$ амалдар

кері жүріс $n^2/2$ амалдар

(n-теңдеулер саны)

Гаусстың біртіндеп жою әдісімен есепті шешу коды

```
import numpy as np
def gaussElimin(a,b):
    n = len(b)
    # Tura juris
    for k in range(0,n-1):
        for i in range(k+1,n):
            if a[i,k] != 0.0:
                lam = a [i,k]/a[k,k]
                a[i,k+1:n] = a[i,k+1:n] - lam*a[k,k+1:n]
                b[i] = b[i] - lam*b[k]
    # keri juris
    for k in range(n-1,-1,-1):
        b[k] = (b[k] - np.dot(a[k,k+1:n],b[k+1:n]))/a[k,k]
    return b
```

Алгоритм бойынша мысал

```
import numpy as np
def gaussElimin(a,b):
    n = len(b)
    # Tura juris
    for k in range(0,n-1):
        for i in range(k+1,n):
            if a[i,k] != 0.0:
                lam = a [i,k]/a[k,k]
                a[i,k+1:n] = a[i,k+1:n] - lam*a[k,k+1:n]
                b[i] = b[i] - lam*b[k]
    # keri juris
    for k in range(n-1,-1,-1):
        b[k] = (b[k] -np.dot(a[k,k+1:n],b[k+1:n]))/a[k,k]
    return b
```

```
a = np.array([[ 5.0, 0.0, 1.0], \
              [2.0, 6.0, -2.0], \
              [-3.0, 2.0, 10.0]])
b = np.array([11.0, 8.0, 6.0])
det = np.prod(np.diagonal(a))
print("\n Anyqtauyshy =",det)
x = gaussElimin(a,b)
print("x=",x)
```

```
Anyqtauyshy = 300.0
x=[2.  1.  1. ]
```

Қорытынды

1. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйе есебінің қойылымы.

2. Есептің қисындылығын сипаттайтын шешім жалғыздығы мен нашар шарттылық ұғымдары.

3. Есепті шешудің тура әдістері, соның ішінде Гаусстың біртіндеп жою әдісі.

4. Гаусс әдісі бойынша есепті шешу сұлбасы мен Python тілінде коды.

5. Python тілінде коды бойынша мысал.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Jaan Kiusalaas. Numericalmethods in engineering with Python. Cambridge University Press. ISBN 978-1-107-03385
2. Вабищевич П.Н. Численные методы: Вычислительный практикум. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 320 с.
3. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие. —СПб.: Издательство «Лань», 2015. — 448 с.