Казахский национальный университет имени аль-Фараби

УДК 517.977.5(043.3) на правах рукописи

**КӨРПЕБАЙ ГҮЛДАНА ТӨЛЕУБЕККЫЗЫ**

# Интегральные уравнения в теории управляемости и оптимального быстродействия обыкновенных и линейных интегро-дифференциальных уравнений

8D05401 – Математика

Диссертация на соискание ученой степени доктора философии (PhD)

Научные консультанты:

Доктор технических наук,
профессор Айсагалиев С.А.

Доктор физико-математических наук, профессор
Шенол ДОСТ (Senol DOST)

Республика Казахстан

Алматы, 2026

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

**НОРМАТИВНЫЕ ДОКУМЕНТЫ…… 4**
**ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ..... 5**
**ОБОЗНАЧЕНИЯ ..... 7**
**ВВЕДЕНИЕ ..... 8**
**1 УПРАВЛЯЕМОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ФАЗОВЫМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ..... 23**
**1.1 Постановка задачи ..... 23**
**1.2 Необходимые и достаточные условия существования решений краевой задачи при фиксированном $t1$. ..... 25**
**1.3 Построение допустимого управления ..... 33**
**1.4 Оптимальное быстродействие линейных систем ..... 45**
**1.5 Решение модельной задачи ..... 51**
**1.6 Численное решение задачи оптимального быстродействия ..... 64**
**2 УПРАВЛЯЕМОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИИ ..... 88**
**2.1 Методы исследования ..... 88**
**2.2 Первый метод. Линейная управляемая система ..... 89**
**2.3 Управляемость нелинейной системы ..... 96**
**2.4 Решение модельной задачи. Уравнение Дуффинга ..... 105**
**2.5 Программная реализация численного алгоритма ..... 118**
**3 УПРАВЛЯЕМОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ..... 124**
**3.1 Преобразование ..... 124**
**3.2 Необходимые и достаточные условия управляемости ..... 126**
**3.3 Построение решение задач управляемости ..... 130**
**3.4 Решение модельной задачи ..... 136**
**3.5 Быстродействие на языке Python. ..... 141**
**ЗАКЛЮЧЕНИЕ ..... 148**
**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ..... 150**

**ПРИЛОЖЕНИЕ..... 159**

## НОРМАТИВНЫЕ ДОКУМЕНТЫ

В данной диссертации были использованы следующие ссылки на стандарты:

ГСО РК 5.04.034-2011. Государственный общеобязательный стандарт образования. Послевузовское образование. Докторантура.

ГОСТ 7.32-2001 (с изменениями 2006 года). Отчет о научно-исследовательской работе. Структура и правила оформления.

ГОСТ 7.1-2003. Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила.

## ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

**Теория о глобальном минимуме** [1, стр. 58] Если $J(u)$ - выпуклый функционал, определенный на выпуклом множестве $U$ банахова пространства $B$, то любая точка локального минимума функционала $J(u)$ на $U$ одновременно является точкой его глобального максимума на $U$, причем множество $U_* = \left\{u_* \in U \middle| J(u_*) = \min\limits_{u\in U} J(u)\right\}$ выпукло. Если $J(u)$ строго выпуклый функционал на выпуклом множестве $U$, то множество $U_*$ содержит не более одной точки.

**Условия оптимальности** [1, стр. 60]. Пусть $U$ - выпуклое множество банахова пространства $B$, функционал $J(u) \in C^1(U)$, множество $U_* = \left\{u_* \in U \middle| J(u_*) = \min\limits_{u\in U} J(u)\right\}$. Тогда в любой точке $u_* \in U_*$ необходимо выполнение неравенства

$$< J'(u_*, u - u_*) >\geq 0, \forall u,\ u \in U \qquad (1)$$

Если $u \in int\ U$ то $J'(u_*) = 0$. Если, кроме того, $J(u) \in C^1(U)$ выпуклый функционал, то в любой точке $u_* \in U_*$ необходимо и достаточно выполнение неравенства (1).

**Проекция точки на множество** [1, стр. 63]. Пусть $U$ – выпуклое замкнутое выпуклое множество из гильбертова пространства $H$. Тогда:

1) любая точка $v \in H$ имеет единственную проекцию на множестве $U$,

2) для того, чтобы точка $w \in U$ была проекцией точки $v \in H$ на множестве $U$, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$< w - v, u - w >_H \geq 0 \text{ при всех } u \in U;$$

3) Справедливо неравенство

$$\|P_U[v] - P_U[z]\| \leq \|v - z\|, \qquad \forall\ v, z \in H.$$

**Слабая бикомпактность** [1, стр. 75]. Любое ограниченное замкнутое множество $U$ из рефлексивного банахова пространства $B$ слабо бикомпактно.

**Слабая полунепрерывность снизу функционала** [1. стр. 76]. Пусть $J(u)$ – выпуклый функционал, определенный на выпуклом множестве $U$ банахова пространства $B$. Тогда функционал $J(u)$ слабо полунепрерывен снизу на множестве $U$ тогда и только тогда, когда $J(u)$ полунепрерывен снизу на множестве $U$.

**Теорема Вейерштрасса в банаховом пространстве** [1, стр. 42]. Пусть $U$ – слабо бикомпактное множество банахова пространства $B$, функционал $J(u)$ определен, конечен и полунепрерывен снизу на $U$. Тогда:

1) $J_* = \inf\limits_{u\in U} J(u) > -\infty$ (ограничен снизу);

2) Множество $U_* = \left\{u_* \in U \middle| J(u_*) = \min\limits_{u\in U} J(u) = J_* = \inf\limits_{u\in U} J(u)\right\} = \emptyset$, слабо бикомпактно;

3) любая минимизирующая последовательность $\{u_k\} \subset U$ слабо сходится к $U_*$.

**Теорема Мазура** [1. стр. 73]. Пусть последовательность $\{u_k\} \subset B$ слабо сходится к точке $u_0 \in B$. Тогда существует последовательность $\{v_n\} \subset B$ где

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} u_k\,, \qquad \alpha_{nk} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} = 1, \quad k = 1,2,\dots,n$$

составленная выпуклых комбинацией точек $u_k$, такая, что $v_n \to u_0$ сильно при $n \to \infty$.

## ОБОЗНАЧЕНИЯ

$P_U[v]$ – проекция точки $v \in H$ на множестве $U$;

$W(t_1, t_0) > 0$ – положительно определенная симметричная матрица, где $y^* W(t_1, t_0) y > 0, \forall y, y \in R^n, y \neq 0$;

$J(u) \to inf, u \in U$ – краткая символическая запись, задачи минимизации функционала $J(u)$ на множестве $U$;

$C^1(U)$ – пространство непрерывно дифференцируемых функционалов на множестве $U$;

$C^{1,1}(U)$ – пространство непрерывно дифференцируемых функционалов на множестве $U$, градиент $J'(u), u \in U$ удовлетворяет условию Липшица на $U$;

$L_2(I, R^m)$ – пространство $m$ - мерных вектор-функций $u(t) = \big(u_1(t), \dots, u_m(t)\big), t \in I - [t_0, t_1]$, со скалярным произведением $< u, v >_{L_2} = \int_{t_0}^{t_1} < u(t), v(t) >_{R^m} dt$ и нормой $\|u\|_{L_2} = \sqrt{< u, u >_{L_2}}$ ;

$L_1(I, R^m)$ – пространство функций $u = u(t), t \in I = [t_1, t_0]$ интегрируемых по Лебегу с нормой $\|u\|_{L_1} = \int_{t_0}^{t_1} |u(t)| \, dt$.

$J_* = \inf\limits_{u \in U} J(u)$ – нижняя грань функционала $J(u)$ на множестве $U$.

$U_* = \{u_* \in U | J(u_*) = J_* > -\infty\}$ – множество точек минимума функционала $J(u)$ на множестве $U$.

# ВВЕДЕНИЕ

**Современное состояние проблемы и ее актуальность.**

Среди наиболее значимых результатов научно-технического прогресса XX столетия особое место занимают становление ядерной энергетики, покорение космоса и развитие вычислительной техники. Необходимость управления ядерными установками, авиационными и космическими аппаратами, сложными производственными процессами, а также решение прикладных задач в области экономики и экологии привели к возникновению нового направления в математике — теории оптимального управления. Ее основная цель заключается в создании строгих методов анализа и проектирования управляемых динамических систем.

Решение актуальных задач естественных наук, техники, экономики и экологии требует создания математических методов, обеспечивающих эффективное исследование сложных динамических процессов. Математическое описание процессов управления в энергетических, химических и робототехнических системах, а также при исследовании движения летательных аппаратов, искусственных спутников, экономических и экологических объектов, как правило, приводит к краевым задачам оптимального управления, которые характеризуются наличием различных ограничений и сложной динамической структурой.

Современные системы управления разрабатываются с учетом комплекса требований, предъявляемых к их динамическим характеристикам. Ключевые требования, обусловленные назначением системы, обычно выражаются через критерий качества. В математической постановке задача определения оптимальных параметров сводится к поиску таких управлений и параметров, при которых соответствующий функционал принимает экстремальное значение на множестве допустимых решений. Ограничения на параметры и режимы работы системы естественно формулируются в виде интегральных условий, отражающих ресурсные, энергетические и технологические ограничения.

В математических моделях динамических систем область их функционирования задаётся фазовыми ограничениями на переменные состояния. Ограниченность управляющих ресурсов при этом описывается условиями, накладываемыми на допустимые значения управляющих воздействий и их функциональные свойства. Начальное и конечное состояния системы формализуются с помощью граничных условий, задаваемых равенствами и неравенствами, что приводит к постановке краевых задач управляемости и задач оптимального быстродействия.

В рамках рассматриваемой проблематики наибольшую сложность представляют задачи, связанные с одновременным учетом фазовых,

интегральных и управляющих ограничений, а также с необходимостью разработки конструктивных методов их решения, пригодных для алгоритмической и программной реализации. Эти вопросы связаны с созданием методов решения задач управляемости и оптимального быстродействия для линейных, нелинейных и интегро-дифференциальных динамических систем.

Математическая постановка задачи оптимального управления в рассматриваемом классе систем сводится к задаче минимизации функционала качества на множестве допустимых управлений, удовлетворяющих дифференциальным или интегро-дифференциальным уравнениям динамики, фазовым и интегральным ограничениям, а также заданным граничным условиям. Исследование условий разрешимости подобных задач, разработка алгоритмов для определения допустимых и оптимальных управлений, а также их программная реализация.

Проверка эффективности разработанных алгоритмов осуществляется на конкретных примерах и модельных задачах управляемости и оптимального быстродействия. С этой целью выполнена программная реализация вычислительных процедур на языке Python, обеспечивающая проведение численных экспериментов и сопоставление полученных вычислительных результатов с теоретическими выводами. Это позволяет подтвердить работоспособность предложенных конструктивных методов и продемонстрировать возможность их практического применения при исследовании динамических систем с ограничениями.

Математическая постановка задачи оптимального управления заключается в следующем: необходимо найти управление, при котором функционал (критерий качества) принимает минимальное значение.

$$J(\ u(\cdot), x(\cdot), x_0, x_1, t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} F_0(x(t), u(t), x_0, x_1, t_0, t_1, t)dt \to inf \quad (1.1)$$

на множестве решений дифференциального уравнения

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)f(x, u, x_0, x_1, t)\, u(t),\ \ t \in I = [t_0,\ t_1], \quad (1.2)$$

$$t_0 \in \Delta_0 \subset R^1,\ \ t_1 \in \Delta_1 \subset R^1,\ \ \Delta_0 \cap \Delta_1 = \emptyset, \quad (1.3)$$

с краевыми условиями

$$(x(t_0) = x_0,\ \ x(t_1) = x_1) \in S_0 \times S_1 = S \subset R^{2n}, \quad (1.4)$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t) \in G(t) \subset R^n, \quad t \in I, \tag{1.5}$$

а также интегральных ограничений

$$g_j(u(\cdot),\ x(\cdot), x_0, x_1, t_0, t_1) \le c_j, \quad j = \overline{1, m_1}, \tag{1.6}$$

$$g_j(u(t),\ x(\cdot), x_0, x_1, t_0, t_1) = c_j, \quad j = \overline{m_1 + 1, m_2}, \tag{1.7}$$

$$g_j(u(\cdot), x(\cdot), x_0, x_1, t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t) x_0, x_1, t_0, t_1, t)dt, \quad j = \overline{1, m_2}, \tag{1.8}$$

ограничения на значения управления

$$u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m) | u(t) \in V(t) \subset R^m \ \text{п. в. } t \in I\}. \tag{1.9}$$

Можно привести множество примеров прикладных задач, которые сводятся к решению задач (1.1) - (1.9).

**Определение 1.1.** *Вектор управления* $(u(t), x_0, x_1, t_0, t_1) \in U \times S_0 \times S_1 \times \Delta_0 \times \Delta_1$ *– называется допустимым управлением для задачи (1.1) - (1.9 если соответствующая краевая задача (1.2)–(1.9) имеет решение.*

*Совокупность всех допустимых управлений обозначим через* $W$*, где* $W \subset U \times S_0 \times S_1 \times \Delta_0 \times \Delta_1$*. Элементы множества* $W$ *будем обозначать через* $w$ *где* $w = (u(t), x_0, x_1, t_0, t_1)$*. Из данного определения следует, что для каждого элемента множества* $W$ *выполняются следующие условия.: 1) решение* $x(t), t \in I$ *дифференциального уравнения (1.2), начинающееся из точки* $x_0 \in S_0$ *удовлетворяrm условию* $x(t_1) = x_1 \in S_1$ *причем* $(x_0, x_1) \in S_0 \times S_1 = S$ *выполнено включение* $x(t) \in G(t), t \in I,\ S_0 \subseteq G(t_0), S_1 \subseteq G(t_1)$*; для каждого элемента множества* $W$ *выполнены:* $g_j(u(\cdot),\ x(\cdot), x_0, x_1, t_0, t_1) \le c_j, \quad j = \overline{1, m_1}$, $g_j(u(\cdot),\ x(\cdot), x_0, x_1, t_0, t_1) = c_j, \quad j = \overline{m_1 + 1, m_2}$.

**Задача 1.1.** Определить необходимые и достаточные условия, при которых задача оптимального управления (1.1)–(1.9) имеет решение.

**Задача 1.2**. Найти допустимое управление $\overline{w} = (\overline{u}, \overline{x_0}, \overline{x_1}, \overline{t_0}, \overline{t_0}) \in W$.

Если задача 1 имеет решение, то существует допустимое управление. Задачу 1 часто называют задачей управляемости, а задачу 2 – решением задачи управляемости.

Пусть множество $W \neq \emptyset$, где $\emptyset$ - пустое множество. В этом случае задача оптимального управление (1.1) - (1.9) может быть представлеена в виде

$$J\ (w) \to inf,\ w \in W. \tag{1.10}$$

**Определение 1.2.** *Элемент $w_* \in W$ называется оптимальным управление для задачи (1.1) - (1.9), если выполняется неравенство $J\ (w_*) \leq J\ (w)$, $\forall w, w \in W$.*

*Величина $J\ (w_*)$ называется наименьшим значением или минимальным значением функционала $J\ (w)$ на множестве $W$. Множество $W_*$=$\left\{w_* \in W | J(w_*) = \min\limits_{w \in W} J(w)\right\}$ содержит все оптимальные управление для задачи (1.1) - (1.9).*

**Задача 1.3.** Найти оптимальное управление $w_* = (u_*,\ x_{0*},\ x_{1*}, t_{0*}, t_{1*}) \in W$. Задача оптимального уравнения (1.1) - (1.9), когда функционал

$$J(w) = J\ (u(\cdot), x(\cdot), x_0, x_1, t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} 1 \cdot dt = t_1 - t_0, \to inf$$

при условия (1.2) - (1.9) называется задачей оптимального быстродействия.

Во втором главе рассмотрим управляемый процесс, описываемый обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)\ f(x, u, t),\ t \in I = [t_0, t_1], \tag{2.1}$$

с краевыми условиями

$$x(t_0) = x_0 \in R^n,\ \ x(t_1) = x_1 \in R^n, \tag{2.2}$$

при наличии ограничений на значения управления

$$u(t) \in U(t) = \{u(t) \in L_2(I, R^{m_1}) | u(t) \in V(t) \subset R^{m_1} \text{ почти всюду } t \in I\} \tag{2.3}$$

Здесь $A(t),\ B(t)$ – матрицы размеров $n \times n$ и $n \times m$ соответственно, элементы которых являются кусочно-непрерывными функциями; вектор-функция $f(x, u, t)$ – непрерывна по совокупности переменных при всех $(x, u, t) \in R^n \times R^{m_1} \times I$, и удовлетворяет следующим условиям

$$|f(x, u, t) - f(y, u, t)| \leq l(t)|x - y|,\ \ \forall (x, u, t),\ (y, u, t) \in R^n \times R^{m_1} \times I, \tag{2.4}$$

$$|f(x, u, t)| \leq c_0(|x| + |u|^2) + c_1(t),\ \ t \in I, \tag{2.5}$$

$$l(t) > 0,\ \ l(t) \in L_1(I,\ R^1),\ \ c_0 = const > 0,\ \ c_1(t) \geq 0,\ \ c_1(t) \in L_2\,(I,\ R^1). \tag{2.6}$$

Из (2.4) – (2.6) следует, что дифференциальное уравнение (2.1) при заданном начальном условии $x(t_0) = x_0$, для любого фиксированного управления $u(t) \in L_2(I, R^{m_1})$, имеет единственное решение. Будем считать, что $U(t),\ t \in I$ – является заданным ограниченным, выпуклым и замкнутым подмножеством пространства $L_2(I,\ R^{m_1})$. В частности, в случае, когда $A(t) \equiv 0$ и $B(t) = I_n$, где $I_n$ – единичная матрица порядка $n \times n$, уравнение (2.1) принимает вид $\dot{x} = f(x,\ u,\ t)$.

**Определение.** *Система (2.1) – (2.3) называется управляемой, если существует управление $u(t) \in U(t)$, которое переводит решение дифференциального уравнения (2.1) из начального состояния $x_0 = x(t_0)$ в момент времени $t_0$ в состояние $x_1 = x(t_1)$ в момент времени $t_1$.*

Наряду с системой (2.1) – (2.3) рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)\ w(t), \quad t \in I = [t_0, t_1], \tag{2.7}$$

$$y(t_0) = x_0 \in R^n,\ y(t_1) = x_1 \in R^n, \tag{2.8}$$

$$w(t) \in L_2(I,\ R^m). \tag{2.9}$$

Решаются следующие задачи:

**Задача 2.1**. *Найти все множества управлений $\Lambda(t) \subset L_2(I,\ R^m)$, каждый элемент множества $\Lambda(t)$ функция $w(t) \in \Lambda(t)$ переводит решение дифференциального уравнения (2.7) при условиях (2.8), (2.9) из начальной точки $x_0 = y(t_0)$ в точку $x_1 = y(t_1)$.*

**Задача 2.2**. *Найти управление $u(t) \in \Lambda(t)$, обеспечивающее перевод траектории системы (2.1)–(2.3) из начального состояния $x_0 = x(t_0)$ в момент времени $t_0$, в состояние $x_1 = x(t_1)$ к моменту времени $t_1$.*

**Задача 2.3.** *(Оптимальное быстродействие). Требуется определить управление $u(t) \in U(t) \subset L_2(I,\ R^m)$, которое переводит траектоорию системы (2.1)–(2.3) из состояния $x_0 = x(t_0)$ в точку $x_1 = x(t_1)$ за минимально возможное время, где момент $t_0$ – фиксирован, а момент $t_1$ – подлежит определению.*

Задача оптимального быстродействия может быть записана в следующеем виде

$$J(x,\ u,\ t_1) = \int_{t_0}^{t_1} 1 \cdot dt = t_1 - t_0 \ \to inf$$

при условиях (2.1) – (2.3).

В третий главе рассмотрим управляемый процесс, описываемый линейным обыкновенным дифференциальным уравнением с подынтегральным управлением следующего вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + C(t)\int_a^b K(t,\tau)\,v(\tau)d\tau + \mu(t), t \in I = [t_0, t_1], \quad (3.1.1)$$

$$\tau \in I_2 = [a, b]$$

с кривыми условиями

$$(x(t_0) = x_0) \in S_0, \qquad (x(t_1) = x_1) \in S_1, \qquad S_0 \subset R^n, \quad S_1 \subset R^n, \quad (3.2)$$

с ограничениями на значения управления

$$u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I_1, R^m) | u(t) \in U_1(t) \subset L_2(I_1, R^m), \text{п.в. } t \in I_1\}, \quad (3.3)$$

$$v(\tau) \in V(\tau) = \{v(\cdot) \in L_2(I_2, R^{n_1}) | v(\tau) \in V_1(\tau) \subset L_2(I_2, R^{n_1}) \text{п.в. } \tau \in I_2\}, \quad (3.4)$$

Исходные данные: $A(t),\ B(t),\ C(t),\ t \in I_1$ – заданные матрицы порядков $n \times n,\ n \times m,\ n \times m_1$ соответственно, с кусочно-непрерывными элементами; $K(t,\tau)$ – известная матрица порядка $m_1 \times n_1$ с элементами из $L_2$, $\mu(t) \in L_2(I_2, R^n)$ – заданная функция, $S_0 \subset R^n$, $S_1 \subset R^n$ – заданные выпуклые и замкнутые множества, характеризующие ограничения, накладываемые на начальные и конечные значения фазовых переменных, $U_1(t) \subset L_2(I_1, R^m)$, $V_1(\tau) \subset L_2(I_2, R^{n_1})$ – заданные выпуклые замкнутые множество. В частности, множества

$$S_0 = \{x_0 \in R^n | |x_0 - x_1| \le r\}, S_0 = \{x_0 \in R^n | c_i \le x_{0i} \le d_i, i = \overline{1,n}\},$$

$$S_1 = \{x_1 \in R^n | |x_1 - x_1| \le R\}, S_1 = \{x_1 \in R^n | \overline{c_i} \le x_{1i} \le d_i, i = \overline{1,n}\},$$

где $\overline{x_0} \in R^n$, $\overline{x_1} \in R^n$ – фиксированные векторы, $r, R$ – заданные числа, $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n}) \in R^n$, $x_1 = (x_{11}, \dots, x_{1n}) \in R^n$, $c_i, d_i, i = \overline{1,n}$ – фиксированные числа.

Множество

$$U_1 = \{u(\cdot) \in L_2(I_1, R^m) | \|u - \bar{u}\| \le r, \text{ п.в. } t \in I_1\},$$

$$U_1 = \{u(\cdot) \in L_2(I_1, R^m) | \alpha_i(t) \le u_i(t) \le \beta_i(t),\ i = \overline{1,n} \text{ п.в. } t \in I_1\},$$

$$V_1(\tau) = \{v(\cdot) \in L_2(I_1, R^{n_1}) | \|v - \bar{v}\| \le R, \text{ п.в. } \tau \in I_1\},$$

$$V_1(\tau) = \{v(\cdot) \in L_2(I_1, R^{n_1}) | \overline{\alpha}_i(\tau) \le v_i(\tau) \le \overline{\beta}_i(\tau), i = \overline{1,n} \text{ п.в. } \tau \in I_2\},$$

где $r > 0,\ R > 0$ – заданные числа, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)),\ v(\tau) = (v_1(\tau), \dots, v_{n_1}(\tau)),$ $\alpha_i(t),\ \beta_i(t),\ t \in I_1,\ \alpha_i(\tau),\ \beta_i(\tau),\ \tau \in I_2$ – заданные непрерывные функции, п.в. почти всюду.

Рассматривается два случая: 1) Когда моменты времени $t_0, t_1, t_1 > t_0$ – фиксированы; 2) $t_0$ – фиксирован, найти наименьшее значение $t_1, t_1 > 0$ когда краевая задача (3.1) – (3.4) имеет решение. Во втором случае краевая задача (3.1) – (3.4) называется задачей оптимального быстродействия.

**Определение 3.1.** *Пусть моменты времени $t_0, t_1 > t_0$ – заданы. Решение дифференциального уравнения с подынтегральным управлением (3.1) называется управляемым в момент времени $t_0$, если существуют управления $u_*(t) \in U(t)$ и $v_*(\tau) = V(\tau)$, переводящие траекторию уравнения (3.1) из состояния $x_{0_*}(t) = x_*(t_0) \in S_0$ в момент $t_0$ в точку $x_{1_*}(t) = x_*(t_1) \in S_1$ в момент времени $t_1$.*

**Определение 3.2.** *Четверка $(u_*(t),\ v_*(\tau),\ x_{0_*},\ x_{1_*}) \in U(t) \times V(\tau) \times S_0 \times S_1$ называется допустимой, если функция $x_*(t) = x_*(t;\ t_0, x_{0_*}, u_*, v_*),\ t \in I_1$ – являющаяся решением дифференциального уравнения (3.1), удовлетворяет условию (3.2). Множество всех таких допустимых четвёрок обозначим через $\Sigma$.*

**Задача 3.1.** *Найти условия, являющиеся необходимыми и достаточными для управляемости процесса, описываемого уравнением (3.1) с подынтегральным управлением при ограничениях (3.2)–(3.4). Иными словами, требуется установить условия непустоты множества $\Sigma$.*

**Задача 3.2.** *Пусть множество $\Sigma \neq \emptyset$, $\emptyset$ – пустое множество, $\Sigma = \{(u_*(t) \in U,\ v_*(\tau) \in V(\tau),\ x_{0_*} \in S_0,\ x_{1_*} \in S_1)\}$. Найти все множества допустимой четверки, где управления $(u_*(t) \in U,\ v_*(\tau) \in V(\tau)$ переводят траекторию уравнения (3.2), исходящую из точки $x_{0_*} = x_*(t_0) \in S_0$ в момент времени $t_0$, в точку $x_{1_*} = x_*(t_1) \in S_1,\ t_1 > t_0,\ t_0,\ t_1$ – фиксированы.*

Иными словами, найти множество$\Sigma$.

**Задач 3.3.** *Пусть $x_*(t) = x_*(t;\ t_0, x_{0_*}, u_*, v_*) \in AC(I_1, R^n)$ – решение дифференциального уравнения (3.1) соответствующее допустимой четверке $(u_*,\ v_*(\tau), x_{0_*},\ x_{1_*} \in \Sigma$. Найти множество всех решений*

$$\Gamma = \{x_*(t) = x_*(t;\ t_0, x_{0_*}, u_*, v_*) | (u_*, v_*,\ x_{0_*},\ x_{1_*}) \in \Sigma \subset AC(I_1, R^n).$$

**Задач 3.4.** *Пусть* $t_0$ *– фиксировано,* $t_1$ *– не фиксировано,* $t_1 > t_0$. *Найти четверку* $(u_*(t), v_*(\tau),\ x_{0_*},\ x_{1_*}) \in \Sigma$ *и наименьшее значение* $t_{1_*}, t_{1_*} > t_0$.

Теория оптимального управления, сформировавшаяся во второй половине XX века, в настоящее время продолжает интенсивно развиваться и занимает одно из центральных мест в современной математике, механике, теории динамических систем и прикладных задачах управления сложными процессами. Фундаментальные основы данной теории были заложены в классических работах по вариационному исчислению, дифференциальным уравнениям, функциональному анализу и математической теории управления [1–15].

В классической постановке можно выделить три основных подхода к исследованию задач оптимального управления.

Первый подход основан на принципе максимума Л. С. Понтрягина [2], представляющем собой одно из наиболее значительных достижений математики XX века и обобщающем результаты классического вариационного исчисления. В рамках принципа максимума задача оптимального управления сводится к анализу специальной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений порядка *2n*, в которой учитываются условия трансверсальности на концах траектории и вводятся сопряжённые переменные (множители Лагранжа), связанные с фазовыми координатами. Дальнейшие исследования в этом направлении охватывают нелинейные системы, а также вопросы устойчивости, управляемости и оптимальности, что нашло отражение в работах [16–40].

Второй подход связан с методом динамического программирования Р. Беллмана [3], основанным на принципе оптимальности и приводящим к необходимости исследования функции Беллмана, удовлетворяющей нелинейному уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана в частных производных. Аналитические и численные методы решения таких уравнений, а также их приложения к стохастическим, распределенным и нелинейным системам управления подробно исследованы в работах [41–70].

Третий подход связан с методом, предложенным С.А. Айсагалиевым [4], который основан на исследовании условий разрешимости и получении общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Исследование разрешимости подобных уравнений представляет собой одну из трудных проблем функционального анализа и теории интегральных уравнений. Результаты, посвящённые их решению и применению в качественной теории дифференциальных уравнений, а также в задачах управляемости и оптимального управления динамическими системами, представлены в работах [5–15, 71–95].

Современные исследования в области оптимального управления характеризуются интенсивным развитием теории дробных, стохастических, интегро-дифференциальных и распределённых систем. Наряду с этим активно применяются численные методы оптимизации, методы машинного обучения и подходы теории многоагентных систем. Указанные направления отражены в работах [96–129] и свидетельствуют об актуальности дальнейших исследований в области управляемости и оптимизации быстродействия динамических систем. Настоящая работа развивает научные исследования в рамках нового направления теории оптимального управления, предложенного С.А. Айсагалиевым, и ориентирована на изучение условий разрешимости и построение решений задач управляемости и оптимального быстродействия. Рассматриваемые задачи относятся к современным направлениям теории оптимального управления и вариационного исчисления и опираются на методы качественной теории дифференциальных уравнений, функционального анализа и теории интегральных уравнений [1–129].

**Актуальность темы исследования**

Современная теория управления динамическими системами развивается в направлении формирования конструктивных подходов к решению задач управляемости и оптимального быстродействия, предназначенных для алгоритмической реализации, численного анализа и программного применения. Особую сложность представляют системы с фазовыми и интегральными ограничениями, включая нелинейные и интегро-дифференциальные модели.

Классические методы оптимального управления не всегда приводят к вычислительно реализуемым алгоритмам, что обусловливает необходимость разработки подходов, допускающих численную реализацию, программное моделирование и проверку на модельных примерах. В связи с этим актуальной является задача получения строгих условий управляемости, построения алгоритмов нахождения допустимых и оптимальных управлений и их программной реализации для широкого класса динамических систем.

**Цель и задачи исследования**

Цель работы — разработка конструктивных методов решения задач управляемости и оптимального быстродействия линейных, нелинейных и интегро-дифференциальных систем с ограничениями, ориентированных на вычислительную реализацию и программное моделирование на Python, с подтверждением результатов на модельных примерах.

Основные задачи:

- получение условий управляемости и построение алгоритмов вычисления управлений для линейных систем;
- разработка градиентных вычислительных методов для нелинейных моделей и их проверка на примерах (Дуффинг, маятник);

- построение численных алгоритмов управления для интегро-дифференциальных систем;
- создание программной реализации на Python и проведение вычислительных экспериментов, подтверждающих теорию.

**Личный вклад автора**

Все основные результаты диссертационной работы получены лично автором.

Результаты на модельных примерах

Впервые для рассматриваемого класса задач:

- выполнено полное вычислительное решение задач управляемости для уравнения Дуффинга, математического маятника и линейных систем с интегральными ограничениями;
- показано согласование теоретических оценок, численных результатов и найденного оптимального времени управления.

Программная реализация (ключевой личный вклад)

Автором разработан программный комплекс на языке Python, включающий:

- алгоритмы численного поиска допустимого управления;
- реализацию градиентных методов минимизации функционалов;
- вычисление оптимального быстродействия;
- визуализацию траекторий, управлений и функционалов качества.

Программная реализация позволила подтвердить корректность теоретических результатов, провести серию вычислительных экспериментов и показать применимость методов к прикладным динамическим моделям. Тем самым обеспечен переход от абстрактной теории к вычислительной практике, что является одним из ключевых научных результатов диссертации.

**Научная новизна**

1. Разработаны конструктивные алгоритмы нахождения допустимого управления для задач управляемости линейных, нелинейных и линейных интегро-дифференциальных динамических систем с фазовыми и интегральными ограничениями на состояние и управление.
2. Предложены алгоритмические процедуры решения задачи оптимального быстродействия для указанных классов систем, обеспечивающие конструктивное вычисление оптимального управления и допускающие непосредственную численную реализацию.
3. Построена программная реализация разработанных алгоритмов на языке Python и проведены вычислительные эксперименты на модельных задачах управляемости и оптимального быстродействия, подтверждающие работоспособность и эффективность предложенных конструктивных методов.

**Практическая значимость**

Следует отметить, что основной целью настоящей диссертационной работы является разработка конструктивных алгоритмических методов решения задач управляемости и оптимального быстродействия для рассматриваемых классов динамических систем с фазовыми и интегральными ограничениями.

Вместе с тем корректное применение указанных конструктивных методов требует предварительного установления принципиальной разрешимости соответствующих задач управления. В частности, необходимо наличие допустимых управлений, обеспечивающих достижение заданных краевых состояний, а также существование оптимального управления в рассматриваемой постановке. В противном случае применение любых алгоритмических процедур теряет содержательный смысл, поскольку вычислительные методы не могут быть использованы при пустоте множества допустимых управлений или отсутствии оптимального решения.

Поэтому в диссертационной работе предварительно проводится качественный анализ рассматриваемых задач, включающий исследование управляемости динамических систем, существования допустимых и оптимальных управлений и разрешимости соответствующих краевых задач. Полученные при этом результаты не рассматриваются как самостоятельная цель исследования, а служат необходимым теоретическим обоснованием применимости разрабатываемых конструктивных алгоритмов.

Таким образом, качественный анализ и построение конструктивных методов решения образуют взаимосвязанные этапы исследования: первый обеспечивает корректность постановки и применимость методов, второй — их практическую вычислительную реализацию и использование при решении конкретных задач управляемости и оптимального быстродействия.

**Методы исследования**

В работе используется подход С.А. Айсагалиева, связанный с исследованием разрешимости и построением решений интегрального уравнения Фредгольма первого рода, с последующим применением минимизации в банаховых пространствах, численных алгоритмов оптимизации и вычислительного моделирования**.**

**Теоретическая и прикладная ценность**

На основе подхода С.А. Айсагалиева сформирована теоретическая основа исследования разрешимости и построения решений задач управляемости и оптимального быстродействия для систем, описываемых обыкновенными и интегро-дифференциальными уравнениями. Практическая значимость полученных результатов подтверждается решением модельных задач, в том числе для уравнения Дуффинга, математического маятника и ряда других динамических систем.

**Достоверность результатов**

Полученные в диссертационной работе результаты сформулированы в виде теорем и лемм со строгими доказательствами. В каждом разделе приведены решения модельных задач, а также кратко изложены научная новизна и практическая значимость проведенных исследований, что подтверждает обоснованность и достоверность полученных результатов.

**Связь диссертационной работы с другими научно-исследовательскими работами**.

Диссертационная работа является продолжением научных исследовании восполненных в 2020-2022 г.г. по проекту AP0885624 «Решение актуальных нерешенных проблем качественной теории интегро-дифференциальных уравнений» по направлению «Фундаментальные и прикладные исследования в области математики и механики» под руководством профессора С.А. Айсагалиева.

**Основные результаты диссертации.**

1. Линейные системы.

Разработаны алгоритмически реализуемые методы решения задач управляемости и оптимального быстродействия линейных систем с фазовыми и интегральными ограничениями. Построены вычислительные процедуры определения допустимых управлений и оптимального времени управления, подтвержденные численными экспериментами, что обеспечивает конструктивное решение задачи в программной форме.

2. Нелинейные системы.

Задача управляемости сведена к минимизации функционала, построены градиентные численные алгоритмы и исследована их сходимость. Выполнено моделирование на примерах уравнения Дуффинга и математического маятника, показавшее согласование теоретических условий, численных результатов и найденного оптимального быстродействия. Получено сквозное решение:

Теория → алгоритм → программа → вычислительный эксперимент.

3. Интегро-дифференциальные системы.

Построены численно реализуемые методы вычисления допустимых управлений и граничных состояний для линейных интегро-дифференциальных уравнений. Проведенные вычислительные эксперименты подтвердили применимость предложенного программно-ориентированного подхода.

4. Программная реализация.

Создан программный комплекс на языке Python, обеспечивающий численное построение управлений, моделирование динамики систем и визуализацию результатов. Вычислительные эксперименты подтвердили корректность теории и практическую применимость методов, обеспечив переход

От аналитических условий к алгоритмам, программной реализации и вычислительному подтверждению.

**Апробация результаты диссертации.**

Основные результаты диссертационной работы были представлены и обсуждены на следующих конференциях и семинарах.

1) Көрпебай Г.Т. Оптимальное быстродействие линейных систем с фазовыми и интегральными ограничениями. Материалы Уфимской осенней математической школы. Уфа, 1 октября 2022 г., с. 125–127.

2) Г. Т. Көрпебай. Управляемость и оптимальное быстродействия линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с фазовыми и интегральными ограничениями. Международной научно-практической конференции «Цифровые технологии и междисциплинарные подходы к решению прикладных задач науки», Атрауский университет имени Х. Досмұхамедов. г. Атырау, 6 октября 2025 г., страницы 154-155.

3) Көрпебай Г.Т. Интегральные уравнения в теории управляемости и оптимального быстродействия обыкновенных и линейных интегро-дифференциальных уравнений. Актуальные вопросы фундаментальной и прикладной математики, ноябрь 18-21, 2025, Усть-Каменогорск.

4) Controllability and optimal performance of linear systems with phase constraints. IX International Scientific and Practical Conference «Modern science: fundamental and applied aspects», June 25-26, 2024, 31 p. Rome. ITALY. c. 18-20

5) Boundary value problems of linear control systems with phase and integral constraints. XIV International Scientific and Practical Conference «The modern vector of the development of science», June 27-28, 2024, Philadelphia, USA c. 41-43

**Публикации результатов диссертационной работы.**

По результатам диссертации опубликовано 10 работ:

- *Публикации в изданиях, входящих в базы данных Web of Science и Scopus:*

1) Aisagaliev, S., Korpebay G. Controllability and optimal speed-in-action of linear systems with boundary conditions // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2023, Vol.110(2). – P. 21–34.

2) Aisagaliev, S., Korpebay G. Controllability and optimal fast operation of nonlinear systems // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2024, Vol.115(3). – P. 77-92.

- *Публикации в изданиях, рекомендованных Комитетом по обеспечению качества в сфере науки и высшего образования Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан*

- *Публикации в материалах международных научных конференций*

1) Көрпебай Г.Т. Оптимальное быстродействие линейных систем с фазовыми и интегральными ограничениями. Материалы Уфимской осенней математической школы. Уфа, 1 октября 2022 г., с. 125–127.

2) Г. Т. Көрпебай Управляемость и оптимальное быстродействия линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с фазовыми и интегральными

ограничениями. Международной научно-практической конференции «Цифровые технологии и междисциплинарные подходы к решению прикладных задач науки», Атрауский университет имени Х. Досмұхамедов. г. Атырау, 6 октября 2025 г., страницы 154-155.

3) Көрпебай Г.Т. Интегральные уравнения в теории управляемости и оптимального быстродействия обыкновенных и линейных интегро-дифференциальных уравнений. Актуальные вопросы фундаментальной и прикладной математики, ноябрь 18-21, 2025, Усть-Каменогорск.

4) Korpebay G. Controllability and optimal performance of linear systems with phase constraints. IX International Scientific and Practical Conference «Modern science: fundamental and applied aspects», June 25-26, 2024, 31 p. Rome. ITALY. c. 18-20.

5) Korpebay G. Boundary value problems of linear control systems with phase and integral constraints. XIV International Scientific and Practical Conference «The modern vector of the development of science», June 27-28, 2024, Philadelphia, USA c. 41-43.

6) Г. Т. Көрпебай. Бірінші текті фредгольм интегралдық теңдеуінің шешімділігі және жуық шешімін құру әдісі // International Scientific Conference of Students and Young Scientists «FARABI ALEMI» Almaty, Kazakhstan, April 6-7, 2023 c. 19.

7) Г. Т. Көрпебай. Управляемость линейных систем с фазовыми и интегральными ограничениями // V International Book Edition of the countries of the Commonwealth of Independent States. Нур-султан .– 2022. – P. 62-72.

8) Г. Т. Көрпебай. Управляемость и оптимальное быстродействие линейных систем // VIII International Book Edition of the countries of the Commonwealth of Independent States. Нур-султан. – 2023. – P. 42-44.

**Объем и структура диссертационной работы.** Диссертационная работа состоит из 182 страниц.

Работа состоит из титульного листа, содержания, нормативных ссылок, вспомогательных результатов, используемых обозначений, введения, трех разделов, заключения, списка использованных источников и приложения.

Нумерация формул, теорем, условий и определений трехзначная: первая цифра обозначает номер раздела, вторая — номер подраздела, третья — порядковый номер формулы, теоремы, условия или определения внутри подраздела.

**Краткое содержание диссертационной работы.**

Диссертационная работа состоит из трех разделов, объединенных задачей разработки конструктивных методов решения задач управляемости и оптимального быстродействия и их численной программной реализации.

В первом разделе исследуются линейные системы с фазовыми и интегральными ограничениями. Полученные теоретические результаты доведены до алгоритмов вычисления допустимых управлений и оптимального времени управления и подтверждены численными экспериментами.

Во втором разделе рассматриваются нелинейные динамические системы. Задача управляемости сведена к задаче минимизации функционала, построены градиентные вычислительные методы и выполнено численное решение модельных задач (уравнение Дуффинга, математический маятник), подтверждающее корректность подхода.

В третьем разделе исследуются линейные интегро-дифференциальные системы, связанные с интегральными уравнениями Фредгольма первого рода. Разработаны алгоритмы вычисления управлений и проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие применимость методов.

Полученные теоретические результаты реализованы в виде программного комплекса, разработанного на языке Python, который обеспечивает численный анализ задач управляемости и оптимального быстродействия, моделирование динамики систем и наглядное представление результатов. Тем самым подтверждается практическая значимость предложенных решений.

# 1 УПРАВЛЯЕМОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ФАЗОВЫМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

## 1.1 Постановка задачи.

Исследуется задача оптимального быстродействия, сводящаяся к минимизации функционала

$$J(x(\cdot),\ u(\cdot), x_0, x_1, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} 1 \cdot dt = t_1 - t_0 \to inf \qquad (1.1.1)$$

в множестве функций, являющихся решениями рассматриваемых уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + \mu(t),\ t \in I = [t_0,\ t_1], \qquad (1.1.2)$$

с краевыми условиями

$$(x(t_0) = x_0,\ \ x(t_1) = x_1) \in S_0 \times S_1,\ \ S_0 \subset R^n,\ S_1 \subset R^n, \qquad (1.1.3)$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t) \in G(t):\ \ G(t) = \{x \in R^n | \omega(t) \le L(t)x \le \varphi(t),\ t \in I\}, \qquad (1.1.4)$$

интегральных ограничений

$$g_j(x(\cdot), u(\cdot), x_0, x_1, t_1) \le c_j, \quad j = \overline{1, m_1}, \qquad (1.1.5)$$

$$g_j(x(\cdot), u(t), x_0, x_1, t_1) = c_j, \quad j = \overline{m_1 + 1, m_2}, \qquad (1.1.6)$$

$$g_j(x(\cdot), u(\cdot), x_0, x_1, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \left[a_j^*(t)\ \ x(t) + b_j^*(t) \quad u(t)\right]dt, \quad j = \overline{1, m_2}, \qquad (1.1.7)$$

с ограничениями на значения управления

$$u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m) | u(t) \in V(t) \subset R^m \ \text{п.в.}\ t \in I\}, \qquad (1.1.8).$$

Здесь символ (*) означает операцию транспанирования; момент времени, $t_0$ — считается фиксированным, тогда как $t_1$ является свободным и удовлетворяет условию $t_1 > t_0$. Матрицы $A(t)$ и B $(t)$ имеют размеры $n \times n$, и $n \times m$ соответственно, причем их элементы являются кусочно-непрерывными функциями. Функция $\mu(t) \in L_2(I, R^n)$ предполагается заданной. При указанных условиях дифференциальное уравнение (1.1.2) имеет единственное решение для любого фиксированного управления $u(t) \in U(t)$ и произвольной начальной точки $x_0 \in S_0$. Соответствующая функция $x(t) = x(t; t_0, x_0, u), \quad t \in I$, является абсолютно непрорывной.

В краевых условиях множества $S_0$, и $S_1$ задаются как ограниченные, выпуклые и замкнутые подмножества пространства $R^n$. В фазовых ограничениях матрица $L(t), t \in I$, имеет размерность $s \times n$ и непрерывные элементы, а функции $\omega(t)$ и $\varphi(t)$, $t \in I$, представляют собой заданные непрерывные вектор-функции размерности $s \times 1$. В интегральных ограничениях функции $a_j(t)$ и $b_j(t), j = \overline{1, m_2}$, являются кусочно-непрерывными вектор-функциями размерностей $n \times 1$ и $m \times 1$ соответственно. Ограничения на управление задаются множеством $V(t), \ t \in I$, которое является ограниченным, выпуклым и замкнутым.

Отметим, что интегральные ограничения вида (1.1.5) могут быть приведены к эквивалентной форме путем введения дополнительных переменных $d_j \geq 0, \quad j = \overline{1, m_1}$. В этом случае они записываются в виде

$$g_j(x(\cdot), u(\cdot), x_0, x_1, ) = c_j - d_j, j = \overline{1, m_1}.$$

Введем обозначение $\overline{c_j} = c_j - d_j, \ j = \overline{1, m_1}$. Тогда сформируем вектор $\overline{c} = \left(\overline{c_1}, \dots, \overline{c_{m_2}}\right)$, где компоненты определяются следующим образом: $\overline{c_j} = c_j - d_j$, $j = \overline{1, m_1}$, $\overline{c_j} = c_j, \ j = \overline{m_1, +1, m_2}$ при условиях $d_j \geq 0, \ j = \overline{1, m_1}$.
Определим множеств

$$\bar{Q} = \left\{\overline{c} \in R^{m_2} \mid \overline{c_j} = c_j - d_j, \quad d_j \geq 0, \ j = \overline{1, m}, \ \overline{c_j} = c_j, \ j = \overline{m_1 + 1, m_2}\right\},$$

где параметры $d_j \geq 0, \ j = \overline{1, m_1}$, являются неизвестными неотрицательными величинами.

**Определение 1.1.1**. Пусть задан момент времени $t_1$ для которого выполняется неравенство $t_1 > t_0$. Тройка $(\overline{u}(t), \overline{x_0}, \overline{x_1}) \in U \times S_0 \times S_1$ называется допустимым управлением задачи (1.1.1)–(1.1.8), если соответствующая краевая

задача (1.1.2)–(1.1.8) при заданных ограничениях допускает решение. Множество всех таких управлений обозначим через $\sum_{t_1}$, где $\sum_{t_1} \subset U \times S_0 \times S_1$.

**Задача 1.1.1.** *Установить необходимые и достаточные условия, при которых краевая задача (1.1.2)–(1.1.8) имеет решение при фиксированном значении* $t_1$.

**Задача 1.1.2**. *Найти допустимое управление* $(\overline{u}(t),\ \overline{x_0}, \overline{x_1}) \in \sum_{t_1} \subset U \times S_0 \times S_1$.

Краевая задача (1.1.2)–(1.1.8) называется задачей управляемости при фиксированном $t_1$ и $t_1 > t_0$, если существует допустимое управление $(\overline{u}(t),\ \overline{x_0}, \overline{x_1}) \in \sum_{t_1}$, которое переводит траекторию системы (1.1.2), начинающуюся в точке $\overline{x_0} \in S_0$ в момент времени $t_0$, в точку $t_0$ к моменту времени $t_0$. При этом должны выполняться условия $\overline{x}(t; \overline{u},\ \overline{x_0}, \overline{x_1}) \in G(t),\ t \in I$, а также равенства $g_j(\overline{x}(\cdot), \overline{u}(\cdot), \overline{x_0},\ \overline{x_1}) = \overline{c_j},\ j = \overline{1, m_2}$.

**Определение 1.1.2**. Допустимое управление $(u_*(t),\ x_0^*, x_1^*) \in \sum_{t_{1*}}$ называется оптимальным, если момент времени условие $t_{1*}$ обеспечивает минимум функционала времени, то есть $t_{1*} - t_0 = \min\limits_{t_1 > t_0} [t_1 - t_0]$.

**Задача 1.1.3.** Найти оптимальное управление $(u_*(t),\ x_0^*,\ x_1^*) \in \sum_{t_{1*}}$, где $(x_0^*, x_1^*) \in S_0 \times S_1$, такое, что $x_*(t, u_*, x_0^*, x_1^*) \in G(t),\ t \in I_1,\ \ g_j(x_*(\cdot), u_*(\cdot), x_0^*, x_1^*) = \overline{c_j},\ j = \overline{1, m_2}$, где $I_1 = [t_0,\ \ t_{1*}]$. Функция $x_*(t) = x_*(t, u_*, x_0^*, x_1^*)$, где $t \in I = [t_0, t_{1*}]$, называется оптимальной траекторией задачи (1.1.1)–(1.1.8).

## 1.2 Необходимые и достаточные условия существования решений краевой задачи при фиксированном $t_1$.

Построение решений сформулироованных задач основывается на результатах, полученных Серикбай Айсагалиев, связанных с выводом общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода при наличии фиксированного параметра.

Далее исследуется краевая задача управляемости (1.1.2)–(1.1.8) при условии, что момент времени $t_1$ считается заданным и удовлетворяет неравенству $t_1 > t_0$. Для удобства дальнейшего анализа введём следующие обозначения

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \dots \\ a_{m_2}(t) \end{pmatrix}, \quad B_0(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \dots \\ b_{m_2}(t) \end{pmatrix},$$

$$a_j(t) = \left(a_{j1}(t), \dots, a_{jn}(t)\right), \quad b_j(t) = (b_{j1}(t), \dots, b_{jm}(t)), \quad (1.2.1)$$

функционал (1.1.7) запишем в виде

$$g(x(\cdot), u(\cdot), x_0, x_1, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} [A_0(t)x(t) + B_0(t)u(t)]dt. \quad (1.2.2)$$

Пусть вектор функция $\eta(t) = \left(\eta_1(t), \dots, \eta_{m_2}(t)\right),\ t \in I$, где

$$\eta(t) = \int_{t_0}^{t} [A_0(\tau)x(\tau) + B_0(\tau)u(\tau)]d\tau. \quad (1.2.3)$$

Тогда

$$\dot{\eta}(t) = A_0(t)x(t) + B_0(t)u(t), \quad t \in I, \quad (1.2.4)$$

$$\eta(t_0) = 0, \quad \eta(t_1) = \overline{c} \in \bar{Q},\ (x_0, x_1) \in S_0 \times S_1,\ u(t) \in U(t), \quad (1.2.5)$$

где $A_0(t)$ и $B_0(t)$ представляют собой матрицы размерностей $m_2 \times n$ и $m_2 \times m$, соответственно, элементы которых являются кусочно-непрерывными функциями. Тогда задача оптимального быстродействия (1.1.1)–(1.1.8) может быть представлена в следующем виде: требуется минимизировать функциона

$$J(\xi(\cdot), u(\cdot), x_0, x_1, d, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} 1 \cdot dt = t_1 - t_0 \ \to inf \quad (1.2.6)$$

при условиях

$$\dot{\xi} = A_1(t)\xi + B_1(t)u(t) + \overline{\mu}(t), \quad t \in I, \quad (1.2.7)$$

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}, \quad \xi(t_0) = \begin{pmatrix} x(t_0) = x_0 \\ \eta(t_0) = 0 \end{pmatrix} = \xi_0,$$

$$\xi(t_1) = \begin{pmatrix} x(t_1) = x_1 \\ \eta(t_1) = \overline{c} \end{pmatrix} = \xi_1, \quad x(t) = P_1\xi(t),$$

$$P_1 = \left(I_n, O_{nm_2}\right), \quad P_1\xi(t) \in G(t),\ u(t) \in U(t),\ (x_0, x_1) \in S_0 \times S_1,\ \overline{c} \in Q \quad (1.2.8)$$

где

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} A(t) & O_{nm_2} \\ A_0(t) & O_{m_2,m_2} \end{pmatrix}, \qquad B_1(t) = \begin{pmatrix} B(t) \\ B_0(t) \end{pmatrix},$$

$$\overline{\mu}(t) = \begin{pmatrix} \mu(t) \\ O_{m_2} \end{pmatrix}, \qquad d \in D = \{d \in R^{m_1} | d \geq 0\},$$

где матрицы $A_1(t)$ и $B_1(t)$ имеют размерности $(n + m_2) \times (n + m_2)$ и $(n + m_2) \times m$, соответственно, функция $\overline{\mu}(t) \in L_2(I, R^{n+m_2})$. Обозначение $O_{k,q}$ – используется для прямоугольной нулевой матрицы рассматриваются размерности $k \times q$, при этом символ $I_n$ используется для обозначения единичной матрицы порядка $n \times n$.

После выполнения преобразований (1.2.4) и (1.2.5) исходная постановка задачи оптимального быстродействия (1.1.1)–(1.1.8) приводится к представлению (1.2.6)–(1.2.8). Далее рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{y} = A_1(t)y + B_1(t)w_1(t) + \overline{\mu}(t), \quad t \in I, \quad w_1(\cdot) \in L_2(I,\ R^m), \tag{1.2.9}$$

$$y(t_0) = \xi(t_0) = \xi_0 = (x_0, 0) \in S_0 \times O_{m_2},\ y(t_1) = \xi(t_1) = (x_1, \overline{c}) \in S_1 \times Q. \tag{1.2.10}$$

Нетрудно видеть, что линейная управляемая система (1.2.9) с граничными условиями (1.2.10) получается из системы (1.2.7)–(1.2.8) при исключении фазовых ограничений и ограничений на управляющие функции. Общее решение дифференциального уравнения (1.2.9) имеет следующий вид

$$y(t) = \Phi(t, t_0)\xi_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B_1(\tau)w_1(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\overline{\mu}(\tau)d\tau\ ,\ t \in I, \tag{1.2.11}$$

здесь $\Phi(t,\ \tau) = \theta_1(t)\theta_1^{-1}(\tau)$ — матрица перехода системы, а $\theta_1(t)$ является фундаментальной матрицей решений соответствующей линейной однородной системы $\dot{\varsigma} = A_1(t)\varsigma$. Учитывая, что $y(t_1) = \xi_1$, из равенства (1.2.11) получаем следующее соотношение

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B_1(t)w_1(t)dt = \ \ a = \Phi(t_0, t_1)\xi_1 - \xi_0 - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\overline{\mu}(t)dt. \tag{1.2.12}$$

Из полученных соотношений вытекает, что управление $w_1(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ характеризуется выполнением интегрального уравнения (1.2.12). Согласно результатам, приведённым в (А1 приложения А), для решения интегрального уравнения (1.2.12) могут быть использованы теоремы А1 и А2 (приложение А),

где $K(t_0,t)=\Phi(t_0,t)B_1(t)$, $\beta=a$, $w(t)=w_1(t)$, $t\in I=[t_0,t_1]$, $n_1=n+m_2\overline{m}=m$.

**Теорема 1.2.1.** *Пусть выполнены следующие условия:*

*1. моменты времени* $t_0$ *и* $t_1$ *заданы и удовлетворяют неравенству* $t_1>t_0$;

*2.* $\mathrm{a}\in R^{n_1}$ *– произвольный вектор,а* $v(\cdot)\in L_2(I,R^m)$ *выбирается произвольно.*

*Тогда имеют место следующие утверждения.*

*1. Функция управления* $w_1(\cdot)\in L_2(I,R^m)$ *является решением интегрального уравнения (1.2.12) тогда и только тогда, когда матрица*

$$W(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B_1(t)B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)dt, \qquad (1.2.13)$$

*обладает свойством положительной определённости.*

*2. Пусть* $U_1\subset L_2(I,R^m)$ *— множество управлений, каждое из которых обеспечивает перевод траектории системы (1.2.9), (1.2.10) из произвольного начального состояния* $\xi_0=(x_0,0)\in S_0\times O_{m_2}$ *в заданное конечное состояние* $\xi_1=(x_1,\vec{c})\in S_1\times Q$ *задается следующим включением:*

$$w_1(t)\in U_1=\{w_1(\cdot)\in L_2(I,R^m)|w_1(t)=v(t)+T_1(t)\xi_0+T_2(t)\xi_1+$$

$$+\overline{\mu}_1(t)+M_1(t)z(t_1,v),t\in I,\quad \forall v(t),\quad v(\cdot)\in L_2(I,R^m), \qquad (1.2.14)$$

$$a=\Phi(t_0,t_1)\xi_1-\xi_0-\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\overline{\mu}(t)dt\},$$

*где (см. (1.2.13))*

$$\begin{aligned}
&T_1(t)=-B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1),\\
&T_2(t)=B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),\\
&M_1(t)=-B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),\\
&\overline{\mu}_1(t)=-B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\overline{\mu}(t)dt,
\end{aligned} \qquad (1.2.15)$$

*3. через* $z(t) = z(t, v),\ t \in I$, *обозначим функцию, которая удовлетворяет рассматриваемому дифференциальному уравнению*

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)v(t), \quad z(t_0) = 0, \quad v(\cdot) \in L_2(I, R^m). \tag{1.2.16}$$

**Доказательство.** Доказательство теоремы непосредственно вытекает из теорем А1 и А2 (приложение А). Действительно, из соотношения (А1) при $K(t_0, t) = \Phi(t_0, t)B_1(t)$ получаем интегральное уравнение (1.2.12). При этом

$$C(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)K^*(t_0, t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B_1(t)B_1^*(t)\Phi^*(t_0, t)dt = W(t_0, t_1).$$

Следовательно, существование решения интегрального уравнения (1.2.12) полностью эквивалентно условию положительной определённости матрицы $W(t_0, t_1) > 0$. В соответствии с положениями теоремы 1.1.2, управление $w_1(t)$, $t \in I$ может быть вычислено по формуле (А3)

$$w_1(t) = v(t) + K^*(t_0, t)\, W^{-1}(t_0, t_1)a - K^*(t_0, t)\, W^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)v(t)dt =$$

$$= v(t) + B_1^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)[\Phi(t_0, t_1)\xi_1 - \xi_0 - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\bar{\mu}(t)dt] -$$

$$-B_1^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B_1(t)v(t)dt =$$

$$= v(t) + T_1(t)\xi_0 + T_2(t)\xi_1 + \bar{\mu}(t) + M_1(t)z(t_1, v), t \in I, \forall v, v(\cdot) \in L_2(I, R^m),$$

где матрицы $T_1(t), T_2(t), M_1(t), t \in I$ – определяются соотношениями (1.2.15),

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B_1(t)v(t)dt = \Phi(t_0, t_1)z(t_1, v), v(\cdot) \in L_2(I, R^m),$$

Функция $z(t,v)$, $t \in I$, определяется как решение дифференциального уравнения (1.2.16). Множество $U_1$ формируется при условии, что произвольная функция $v(\cdot) \in L_2(I,R^m)$ перебирает все элементы пространства $L_2(I,R^m)$. Таким образом, доказательство теоремы завершено.

Отметим, что элементы множества $U_1$ могут быть получены по следующей процедуре. Сначала выбирается произвольная функция $v(\cdot) \in L_2(I,R^m)$. Затем решается начальная задача (1.2.16), в результате чего определяется функция $z(t,v)$, $t \in I$, и, в частности, вычисляется значение $z(t_1,v)$. После этого по формуле (1.2.14) находится функция $z(t_1,v)$. При варьировании функции $z(t_1,v)$. по всему пространству $L_2(I,R^m)$, получается множество $U_1$.

**Теорема 1.2.2.** *Предположим, что выполнены все условия, указанные в теореме 1.2.3, и функция* $w_1(t)$ *принадлежит множеству* $U_1$. *В этом случае решение дифференциального уравнения (1.2.9) вместе с соответствующей функцией*

$$y(t) = z(t,v) + E_1(t)\xi_0 + E_2(t)\xi_1 + \overline{\mu}_2(t) + M_2(t)z(t_1,v), t \in I, \quad (1.2.17)$$

*где*

$$E_1(t) = \Phi(t,t_0)W(t,t_1)W^{-1}(t_0,t_1),$$

$$E_2(t) = \Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),$$

$$\overline{\mu}_2(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\overline{\mu}(\tau)d\tau - \Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)\overline{\mu}(t)dt,$$

$$M_2(t) = -\Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),$$

$$W(t_0,t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B_1(\tau)B_1^*(\tau)\Phi^*(t_0,\tau)d\tau,$$

$$W(t,t_1) = W(t_0,t_1) - W(t_0,t), \quad t \in I. \quad (1.2.18)$$

**Доказательство.** Согласно соотношению (1.2.11), если управление $w_1(t)$ принадлежит множеству $U_1$, то функция $y(t)$ определяемая на интервале $t \in I$, имеет вид

$$y(t) = \Phi(t,t_0)\xi_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B_1(\tau)w_1(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\bar{\mu}(\tau)d\tau =$$

$$= \Phi(t,t_0)\xi_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B_1(\tau)[v(\tau) + T_1(\tau)\xi_0 + T_2(\tau)\xi_1 + \bar{\mu}_1(\tau) +$$

$$+M_1(\tau)z(t_1,v)]d\tau + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\bar{\mu}(\tau)d\tau = \Phi(t,t_0)\xi_0 +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B_1(\tau)v(\tau)d\tau + \Phi(t,t_0)\int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B_1(\tau)T_1(\tau)dt\ \ \xi_0 +$$

$$+\Phi(t,t_0)\int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B_1(\tau)T_2(\tau)dt\ \ \xi_1 + \Phi(t,t_0)\int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B_1(\tau)\bar{\mu}_1(\tau)d\tau +$$

$$+\Phi(t,t_0)\int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B_1(\tau)M_1(\tau)dt\ \ z(t_1,v) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B_1(\tau)\bar{\mu}(\tau)d\tau,\ \ t \in I.$$

Отсюда с учетом того, что:

$$\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B_1(\tau)v(\tau)d\tau = z(t,v),$$

$$\int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B_1(\tau)T_1(\tau)d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B_1(\tau)[-B_1^*(\tau)\Phi^*(t_0,\tau)W^{-1}(t_0,t_1)]d\tau = -W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1),$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,\tau)B_1(\tau)T_2(\tau)d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,\tau)B_1(\tau)[B_1^*(\tau)\Phi^*(t_0,\tau)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)]d\tau$$

$$= W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),$$

$$\int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B_1(\tau)M_1(\tau)d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B_1(\tau)[-B_1^*(\tau)\Phi^*(t_0,\tau)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)]d\tau$$

$$= -W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),$$

$$\Phi(t,t_0)\xi_0 - \Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\xi_0 = \Phi(t,t_0)[I_n -$$

$$-W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)]\xi_0 = \Phi(t,t_0)\{I_n - [W(t_0,t_1) - W(t,t_1)]W^{-1}(t_0,t_1)\}\xi_0 =$$

$$= \Phi(t,t_0)W(t,t_1)W^{-1}(t_0,t_1)\xi_0,$$

получим формулы (1.2.17), где $E_1(t)$, $E_2(t)$, $\bar{\mu}_2$, $M_2(t)$, $t \in I$ определяются соотношениями (1.2.18). Теорема доказана.

Нетрудно проверить, что выполняются условия $y(t_0) = \xi_0$, $y(t_1) = \xi_1$. Действительно, при $t = t_0$, имеем $E_1(t_0) = I_{n+m_2}, E_2(t_0) = 0$, $M_2(t_0) = 0, \bar{\mu}_2(t_0) = 0$, откуда следует $y(t_0) = \xi_0$ . При $t = t_1$, выполняются соотношения $E_1(t_1) = 0$, $E_2(t_1) = I_{n+m_2}$, $M_2(t_1) = -I_{n+m_2}$. Тогда получаем $y(t_1) = z(t_1,v) + \xi_1 - z(t_1,v) = \xi_1$, где $I_{n+m_2}$– обозначает единичную матрицу порядка $(n + m_2) \times (n + m_2)$.

Согласно теоремам А1, А2, 1.2.3 и 1.2.4, для линейной управляемой системы (1.2.9), (1.2.10) при фиксированном $t_1$ можно определить все множества управлений $U_1$, элементы которых переводят траекторию системы из произвольного начального состояния $\xi_0 = (x_0, 0) \in S_0 \times O_{m_2}$ в любое заданное конечное состояние $\xi_1 = (x_1, \bar{c}) \in S_1 \times Q$.

Краевая задача (1.1.2) – (1.1.8) при фиксированном $t_1$ представляет собой задачу управляемости и с помощью неособого преобразования приводится к системе вида (1.2.7), (1.2.8). В связи с этим возникает вопрос: при каких условиях выполняется равенство $y(t) = \xi(t),\ t \in I$.

**Лемма 1.2.1.** *Пусть выполнены условия теоремы 1.2.2, 1.2.3, функция* $w_1(t) \in U_1$. *Тогда* $y(t) = \xi(t),\ t \in I$ *тогда и только тогда, когда значение*

$$J_1(u(\cdot), v(\cdot), p(\cdot), x_0, x_1, d) = \int_{t_0}^{t_1} [|w_1(t) - u(t)|^2 + |p(t) - L(t)P_1 y(t)|^2]dt = 0, \quad (1.2.19)$$

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)v(t), \quad z(t_0) = 0, \quad v(\cdot) \in L_2(I, R^m), \quad (1.2.20)$$

$$p(t) \in V = \{p(\cdot) \in L_2(I, R^S) | \omega(t) \le p(t) \le \varphi(t), \quad t \in I\}, \quad (1.2.21)$$

$$(x_0, x_1) \in S_0 \times S_1, \quad u(t) \in U(t), \quad d \in D, \quad (1.2.22)$$

*где* $w_1(t),\ y(t),\ \ t \in I$ *следует из (1.2.14), (1.2.17) соответственно.*

**Доказательство**. Из соотношения (1.2.19) следует, что значение функционала $J_1 = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняются тождества $w_1(t) = u(t), \quad t \in I, \quad p(t) = L(t)P_1 y(t), \quad t \in I$. Следовательно, управление $w_1(t)$ принадлежит пересечению множеств $\in U(t) \cap U_1(t)$, а также выполняются неравенства $\omega(t) \le p(t) = L(t)P_1 y(t) \le \varphi(t), \quad t \in I$. Таким образом, решения задачи управляемости (1.2.7), (1.2.8) и системы (1.2.9), (1.2.10) совпадают, а функция $y(t) = \xi(t),\ t \in I$. Лемма доказана.

## 1.3 Построение допустимого управления

Согласно определению 1.1.1, решение краевой задачи (1.1.2)–(1.1.8) при фиксированном значении $t_1$ представляет собой допустимое управление $(\bar{u}(t), \bar{x}_0,\ \bar{x}_1) \in U \times S_0 \times S_1$. Из утверждения леммы 1.2.1 следует, что допустимые управления могут быть получены в результате решения соответствующей оптимизационной задачи (см. (1.2.19)).

$$J_1(u(\cdot)v(\cdot), p(\cdot), x_0, x_1, d) = \int_{t_0}^{t_1} [|w_1(t) - u(t)|^2 + |p(t) - L(t)\ P_1 y(t)|^2]dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} F_1(q(t), t)dt \to inf \quad (1.3.1)$$

при условиях (1.2.20) – (1.2.22), где

$$w_1(t) = v(t) + T_{11}(t)x_0 + T_{21}(t)x_1 - \Sigma_1(t)d + \overline{\mu}_3 + M_1(t)z(t_1, v), \quad t \in I, \tag{1.3.2}$$

$$y(t) = z(t, v) + E_{11}(t)x_0 + E_{21}(t)x_1 - \pi_1(t)d + \overline{\mu}_4(t) + M_2(t)z(t_1, v), t \in I, \tag{1.3.3}$$

$$q(t) = (\theta(t),\ z(t, v),\ z(t_1, v)),\ \theta(t) = (u(t),\ v(t),\ p(t), x_0, x_1, d), \tag{1.3.4}$$

$$F_1(q(t), t) = |w_1(t) - u(t)|^2 + |p(t) - L(t)P_1 y(t)|^2, t \in I, \tag{1.3.5}$$

$$\overline{\mu}_3(t) = \overline{\mu}_1(t) + T_{22}(t)\bar{c}, \quad \overline{\mu}_4(t) = \overline{\mu}_2(t) + E_{22}(t)\bar{c},\ t \in I. \tag{1.3.6}$$

Заметим, что:

$$\begin{aligned}
&T_1(t)\xi_0 = T_1(t)\begin{pmatrix} x_0 \\ 0_{m_{2,1}} \end{pmatrix} = (T_{11}(t), T_{12}(t))\begin{pmatrix} x_0 \\ 0_{m_{2,1}} \end{pmatrix} = T_{11}(t)x_0, \\
&T_2(t)\xi_1 = T_2(t)\begin{pmatrix} x_1 \\ \bar{c} \end{pmatrix} = (T_{21}(t), \quad T_{22}(t))\begin{pmatrix} x_1 \\ \bar{c} \end{pmatrix} = T_{21}(t)x_1 + T_{22}(t))\bar{c} = \\
&= T_{21}(t)x_1 + (\Sigma_1(t), \Sigma_2(t))\begin{pmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \end{pmatrix} - d = T_{21}(t)x_1 + \Sigma_1(t)\bar{c}_1 - \Sigma_1(t)d + \Sigma_2(t)\bar{c}_2, \\
&E_1(t)\xi_0 = E_1(t)\begin{pmatrix} x_0 \\ 0_{m_{2,1}} \end{pmatrix} = (E_{11}(t), \quad E_{12}(t))\begin{pmatrix} x_0 \\ 0_{m_{2,1}} \end{pmatrix} = E_{11}(t)x_0, \\
&E_2(t)\xi_1 = E_2(t)\begin{pmatrix} x_1 \\ \bar{c} \end{pmatrix} = (E_{21}(t), \quad E_{22}(t))\begin{pmatrix} x_1 \\ \bar{c} \end{pmatrix} = E_{21}(t)x_1 + E_{22}(t)\bar{c} = \\
&= E_{21}(t)x_1 + (\pi_1(t), \pi_2(t))\begin{pmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \end{pmatrix} - d = E_{21}(t)x_1 + \pi_1(t)\bar{c}_1 - \pi_1(t)d + \pi_2(t)\bar{c}_2.
\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

Формулы (1.3.2) – ( 1.3.6) следуют из (1.2.14), (1.2.17) с учетом (1.3.7).

Отметим, что если $\bar{\theta}(t) = \left(\bar{u}(t), \bar{v}(t), \bar{p}(t), \bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{d}\right)$ оптимальное управление в задаче (1.3.1), (1.2.20) – (1.2.22) при $J_1(\bar{\theta}) = 0$, то тройка $(\bar{u}(t), \bar{x}_0, \bar{x}_1) \in U \times S_0 \times S_1$ допустимые управления для задачи (1.1.2) – (1.1.8).

Введем следующие обозначения:

$$X = U \times L_2^{\rho}(I, R^m) \times V \times S_0 \times S_1 \times D_{\rho},$$

$$H = L_2(I, R^m) \times L_2(I, R^m) \times L_2(I, R^s) \times R^n \times R^n \times R^{m_1},$$

$L_2^{\rho}(I, R^m) = \{v(\cdot) \in L_2(I, R^m) | \|v\| \leq \rho, \rho > 0 - \text{достаточно большое число}\}$, $D_{\rho} = \{d \in R^{m_1} | |d| \leq \rho\}$, $\theta \in X$, $X \subset H$, где $X$ – ограниченное выпуклое замкнутое множество в гильбертово пространство $H$. Тогда оптимизационная задача (1.3.1), (1.2.20)–(1.2.22) может быть записана в следующем виде

$$J_1(\theta(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F_1(q(t), t)dt \to inf, \quad \theta(\cdot) \in X \subset H.$$

Пусть множество $\bar{X} = \{\bar{\theta}(\cdot) \in X | J_1(\bar{\theta}) = \inf J_1(\theta(\cdot))\}$.

**Лемма 1.3.1.** *Пусть выполнены следующие условия:*

*1. матрица $W(t_0, t_1) > 0$ является положительно определённой;*

*2. множества $S_0, S_1$ – ограниченные выпуклые, замкнутые.*

*Тогда справедливы следующие утверждения:*

*1. в задаче (1.3.1), (1.2.20) – (1.2.22) функционал (1.3.1) является выпуклым;*

*2. в задаче (1.3.1), (1.2.20) – (1.2.22) функционал (1.3.1) достигает нижней грани на множестве $X$, причем $\bar{X} \neq \emptyset$. $\emptyset$ – пустое множества;*

*3. краевая задача (1.1.2) – (1.1.8) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется условие $J_1(\bar{\theta}(\cdot)) = 0$, где $\bar{\theta}(\cdot) \in \bar{X}$.*

**Доказательство.** Как следует из формул (1.3.2) – (1.3.6) функция $F_1(q, t)$ может быть представлена в виде $F_1(q, t) = q^* Q_1 q + 2q^* a(t) + b(t)$, $t \in I$, где матрица $Q_1 = Q_1(t)$, $t \in I$ порядка $(n + m_2) \times (n + m_2)$ неотрицательна. Тогда $\frac{\partial^2 F_1(q,t)}{\partial q^2} = 2Q_1(t) \geq 0$, $t \in I$. Следовательно, функция $F_1(q, t)$ является выпуклой функций относительно $q$ при всех $t \in I$. Решение дифференциального уравнения (1.2.20) функция $z(t, \alpha\, v_1 + (1 - \alpha)v_2) = \alpha\, z(t, v_1) + (1 - \alpha)z(t, v_2)$, $\forall t$, $t \in I$ при всех $v_1$, $v_2 \in L_2^{\rho}(I, R^m)$, величина $\alpha \in [0,1]$. Тогда

$$J_1(\alpha\, \theta_1 + (1 - \alpha)\theta_2) = \int_{t_2}^{t_1} F_1(\alpha\, q_1 + (1 - \alpha)q_2, t)dt \leq \alpha \int_{t_2}^{t_1} F_1(q_1, t)dt +$$

$$+(1 - \alpha) \int_{t_0}^{t_1} F_1(q_2, t)dt = \alpha\, J_1(\theta_1) + (1 - \alpha)J_1(\theta_2), \forall \theta_1, \theta_2 \in X, \forall \alpha, \alpha \in [0,1],$$

где $X$ – ограниченное, выпуклое и замкнутое множество в гильбертовом пространстве $H$. Тем самым первое утверждение леммы доказано.

Поскольку функционал $J_1(\theta) \in C^1\ (X)$ это следует из того, что функция $F_1(q,t)$ – является непрерывно дифференцируемой по переменной $q$, а элементы матриц $A_1(t),\ B_1(t),\ t \in I$ – представляют собой кусочно-непрерывные функции — выпуклый функционал $J_1(\theta),\ \theta \in X$ является слабо полунепрерывным снизу.

Ограниченное, выпуклое и замкнутое множество $X$ в гильбертовом пространстве $H$ обладает свойством слабой бикомпактности. В соответствии с теоремой Вейерштрасса любой слабо полунепрерывный снизу функционал $J_1(\theta)$ достигает своей нижней грани на слабо бикомпактном множестве $X$. Тем самым второе утверждение леммы доказано.

**Третье утверждение леммы следует из леммы 1.2.1**. Действительно, для любого $\theta \in X$ выполняется неравенство $J_1(\theta) \geq 0$ – то есть функционал $J_1(\theta),\ \theta \in X,$ ограничен снизу. Если $J_1(\bar{\theta}) = 0,\ \bar{\theta} \in \bar{X},$ то троика $(\bar{u}(t),\ \bar{x_0},\ \bar{x_1}) \in U \times S_0 \times S_1$ вляется допустимым управлением краевой задачи (1.1.1)–(1.1.8). В случае, когда $J_1(\bar{\theta}) > 0,\ \bar{\theta} \in X,$ краевая задача (1.1.2)–(1.1.8) при фиксированном $t_1$ решения не имеет, то есть, $U \cap U_1 = \emptyset$, где $\emptyset$ - обозначает пустое множество. Тем самым лемма доказана.

Частные производные функции $F_1(q(t)$ по $q$ имеют следующий вид:

$$F_{1v}(q,t) = 2[w_1 - u], F_{1u}(q,t) = -2[w_1 - u], F_{1p}(q,t) = 2[p - L(t)P_1 y],$$

$$F_{1x_0}(q,t) = 2T_{11}^*(t)[w_1 - u] - 2E_{11}^*(t)P_1^* L_1^*(t)[p - L(t)P_1 y],$$

$$F_{1x_1}(q,t) = 2T_{21}^*(t)[w_1 - u] - 2E_{21}^*(t)P_1^* L^*(t)[p - L(t)P_1 y],$$

$$F_{1d}(q,t) = -2\Sigma_1^*(t)[w_1 - u] - 2\pi_1^*(t)P_1^* L^*(t)[p - L(t)P_1 y],$$

$$F_{1z}(q,t) = -2P_1^* L^*(t)[p - L(t)P_1 y],$$

$$F_{1z(t_1)}(q,t) = 2M_1^*(t)[w_1 - u] - 2M_2^*(t)P_1^* L^*[p - L(t)P_1 y], \tag{1.3.8}$$

где функции $w_1 = w_1(t),\ y = y(t),\ t \in I$ определяются формулами (1.3.2), (1.3.3) соответственно.

**Теорема 1.3.1.** *Пусть выполнены следующие условия:*

*1. Матрица $W(t_0, t_1)$ является положительно определённой;*

*2. функции $F_1(q,t)$, $F_{1q}(q,t)$ непрерывны по переменным $(q,t)$.*

*Тогда имеет место следующее утверждение:*
*в задаче (1.3.1), (1.2.20)–(1.2.22) функционал (1.3.1) является непрерывно дифференцируемым по Фреше*

$$J'_1(\theta) = (J'_{1u}(\theta), J'_{1v}(\theta), J'_{1p}(\theta), J'_{1x_0}(\theta), J'_{1x_1}(\theta), J'_{1d}(\theta)) \in H$$

*для любого* $\theta \in X$, *где*

$$J'_{1u}(\theta) = F_{1u}(q(t), t), \quad J'_{1v}(\theta) = F_{1v}(q(t), t) - B_1^*(t)\psi(t), \quad J'_{1p}(\theta) = F_{1p}(q(t), t),$$

$$J'_{1x_0}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_{1x_0}(q(t), t)dt, \quad J'_{1x_1}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_{1x_1}(q(t), t)dt, \qquad (1.3.9)$$

$$J'_{1d}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_{1d}(q(t), t)dt,$$

*где* $z(t), \quad t \in I$ *– решение уравнения (1.2.20), функция* $\psi(t), \quad t \in I$ *определяется из решения дифференциального уравнения (см. (1.3.8), (1.3.9))*

$$\dot{\psi} = F_{1z}(q(t), t) - A_1^*(t)\psi(t), \quad \psi(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} F_{1z(t_1)}(q(t), t)dt. \qquad (1.3.10)$$

*При этом градиент функционала* $J'_1(\theta), \theta \in X$ *обладает свойством*

$$\|J'_1(\theta_1) - J'_1(\theta_2)\| \le K\|\theta_1 - \theta_2\|, \ \forall \theta_1, \theta_2 \in X, \qquad (1.3.11)$$

*где* $K = const > 0$.

**Доказательство.** Пусть $\theta(t) = (u(t), v(t), p(t), x_0, x_1, d) \in X, \theta + \Delta\theta = (u(t) + \Delta u(t), v(t) + h(t), p(t) + \Delta p(t), x_0 + \Delta x_0, x_1 + \Delta x_1, d + \Delta d) \in X$. Тогда приращение функционала

$$\Delta J_1 = J_1(\theta + \Delta\theta) - J_1(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} [F_1(q(t) + \Delta q(t), t) - F_1 q(t), t)]dt,$$

где $q(t) + \Delta q(t) = (\theta(t) + \Delta\theta(t), z(t, v) + \Delta z(t, v), z(t_1, v) + \Delta z(t_1, v))$,

$$|\Delta z(t)| \le \int_{t_0}^{t} \|\Phi(t,\tau)\|\|B_1(\tau)\||h(\tau)|d\tau = c_1 \int_{t_0}^{t_1} |h(t)|dt \le c_2\|h\|_{L_2}, t \in I,$$

где $c_1 = \sup \|\Phi(t,\tau)\|\|B_1(\tau)\|,\ t_0 \le t,\tau \le t_1,\ \ c_2 = c_1\sqrt{t_1 - t_0}$.

Так как функция $F_1(q,t)$ имеет непрерывные производные по $q$, то

$$\Delta J_1 = \int_{t_0}^{t_1} [\Delta u^*(t)F_{1u}(q(t),t) + h^*(t)F_{1v}(q(t),t) + \Delta p^*(t)F_{1p}(q(t),t) +$$

$$+\Delta x_0^* F_{1x_0}(q(t),t) + \Delta x_1^*(t)F_{1x_1}(q(t),t) + \Delta d^* F_{1d}(q(t),t) + \Delta z^*(t)F_{1z}(q(t),t) +$$

$$+\Delta z^*(t_1)F_{1z(t_1)}(q(t),t)]dt + \sum_{i=1}^{8} R_i,$$

где

$$R_1 = \int_{t_0}^{t_1} \Delta u^*(t)[F_{1u}(q(t) + \Delta q(t),t) - F_{1u}(q(t),t)]dt,$$

$$R_2 = \int_{t_0}^{t_1} h^*(t)[F_{1v}(q(t) + \Delta q(t),t) - F_{1v}(q(t),t)]dt,$$

$$R_3 = \int_{t_0}^{t_1} \Delta p^*(t)[F_{1p}(q(t) + \Delta q(t),t) - F_{1p}(q(t),t)]dt,$$

$$R_4 = \int_{t_0}^{t_1} \Delta x_0^*(t)[F_{1x_0}(q(t) + \Delta q(t),t) - F_{1x_0}(q(t),t)]dt,$$

$$R_5 = \int_{t_0}^{t_1} \Delta x_1^*[F_{1x_1}(q(t) + \Delta q(t),t) - F_{1x_1}(q(t),t)]dt,$$

$$R_6 = \int_{t_0}^{t_1} \Delta d^*[F_{1d}(q(t) + \Delta q(t),t) - F_{1d}(q(t),t)]dt,$$

$$R_7 = \int_{t_0}^{t_1} \Delta z^*(t)[F_{1z}(q(t) + \Delta q(t), t) - F_{1z}(q(t), t)]dt,$$

$$R_8 = \int_{t_0}^{t_1} \Delta z^*(t_1)[F_{1z(t_1)}(q(t) + \Delta q(t), t) - F_{1z(t_1)}(q(t), t)]dt.$$

Отсюда с учетом того, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \Delta z^*(t_1)F_{1z(t_1)}(q(t), t)dt = \Delta z^*(t_1) \int_{t_0}^{t_1} F_{1z(t_1)}q(t), t)dt =$$
$$-\Delta z^*(t_1)\psi(t_1) =$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}[\Delta z^*(t)\psi(t)]dt = -\int_{t_0}^{t_1} [\Delta \dot{z}^*(t)\psi(t)]dt - \int_{t_0}^{t_1} [\Delta z^*(t)\dot{\psi}(t)]dt =$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} [\Delta z^*(t)A_1^*(t) + h^*(t)B_1^*(t)]\psi(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta z^*(t)[F_{1z}(q(t), t) -$$

$$-A_1^*(t)\psi(t)]dt = -\int_{t_0}^{t_1} h^*(t)B_1^*(t)\psi(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta z^*(t)F_{1z}(q(t), t)dt,$$

получим

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} [\Delta u^*(t)F_{1u}(q(t), t) + h^*(t)[F_{1v}(q(t), t) - B_1^*(t)\psi(t)]$$
$$+ \Delta p^*(t)F_{1p}(q(t), t) +$$

$$+\Delta x_0^* F_{1x_0}(q(t), t) + \Delta x_1^* F_{1x_1}(q(t), t) + \Delta d^* F_{1d}(q(t), t)]dt + \sum_{i=1}^{8} R_i.$$

Далее учитывая, что $F_1(q, t) = q^*Q_1q + 2q^*a(t) + b(t),\ t \in I$ и что частные производные функции $F_1(q, t)$ по переменной $q$ удовлетворяют условиям Липшица, получаем оценку $\left|\sum_{i=1}^{8} R_i\right| \le c_0\|\Delta\theta\|^2$. Следовательно, градиент функционала $J_1'(\theta)$ задается формулой (1.3.9).

Пусть $\theta_1 = \theta + \Delta\theta,\ \ \theta_2 = \theta$. Тогда из (1.3.9) следует

$$J_1'(\theta_1) - J_1'(\theta_2) = (F_{1u}(q(t) + \Delta q(t), t) - (F_{1u}q(t), t),$$

$$F_{1v}(q(t) + \Delta q(t), t) - F_{1v}(q(t), t) - B_1^*(t)\Delta\psi(t),$$

$$F_{1p}(q(t) + \Delta q(t), t) - F_{1p}(q(t), t),$$

$$\int_{t_0}^{t_1} [F_{1x_0}(q(t) + \Delta q(t), t) - F_{1x_0}(q(t), t)]dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[F_{1x_1}(q(t) + \Delta q(t), t) - F_{1x_1}(q(t), t)\right]dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} [F_{1d}(q(t) + \Delta q(t), t) - F_{1d}(q(t), t)]dt).$$

Следовательно,

$$|J_1'(\theta_1) - J_1'(\theta_2)| \le L_1|\Delta q(t)| + L_2|\Delta\psi(t)| + L_3\|\Delta q\|,$$

$$\|J_1'(\theta_1) - J_1'(\theta_2)\| = \int_{t_0}^{t_1} |J_1^1(\theta_1) - J_1^1(\theta_2)|^2 dt \le L_4\|\Delta q\|^2 + L_5 \int_{t_0}^{t_1} |\Delta\psi(t)|^2 dt,$$

где

$$|\Delta q(t)| \le |\Delta u(t)| + |h(t)| + |\Delta p(t)| + |\Delta x_0| + |\Delta x_1| + |\Delta d| + |\Delta z(t)| + |\Delta z(t_1)|,$$

$$\|\Delta q\|^2 = \int_{t_0}^{t_1} |\Delta q(t)|^2 dt \le c(\|\Delta u\|^2 + \|h\|^2 + \|\Delta p\|^2 + |\Delta x_0|^2 + |\Delta x_1|^2 + |\Delta d|^2)$$

частные производные функции $F_1(q, t)$ по переменной $q$ удовлетворяют условия Липшица.

Так как

$$\Delta\dot{\psi}(t) = [F_{1z}(q(t) + \Delta q(t), t) - F_{1z}(q(t), t)] - A_1^*(t)\Delta\psi(t), \;\; t \in I,$$

$$\Delta\psi(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} [F_{1z(t_1)}(q(t) + \Delta q(t), t) - F_{1z(t_1)}(q(t), t)]dt.$$

то применяя лемму Гронуолла, получим

$$|\Delta\psi(t)| \le L_6\|\Delta q\|, \;\; t \in I.$$

Из полученных оценок следует, что $\|J_1'(\theta_1) - J_1'(\theta_2)\| \le K\|\theta_1 - \theta_2\|, \; \forall\theta_1, \theta_2 \in X$, где $K = const$ постоянная Липшица. Тем самым теорема доказана.

Далее строится последовательность $\theta_n = \{u_n, \; v_n, p_n, x_0^n, x_1^n, d_n\}, \; n = 0,1,2, \; \ldots$ в соответствии с алгоритмом (см. (1.3.8)–(1.3.10))

$$\begin{gathered} u_{n+1} = P_U[u_n - \alpha_n J'_{1u}(\theta_n)], \; v_{n+1} = P_{L_2^p}[v_n - \alpha_n J'_{1v}(\theta_n)], \\ p_{n+1} = P_V[p_n - \alpha_n J'_{1p}(\theta_n)], \; x_0^{n+1} = P_{S_0}[x_0^n - \alpha_n J'_{1x_0}(\theta_n)], \\ x_1^{n+1} = P_{S_1}\left[x_1^n - \alpha_n J'_{1x_1}(\theta_n)\right], \quad d_{n+1} = P_{D_\rho}[d_n - \alpha_n J'_{1d}(\theta_n)], \\ n = 0,1,2, \ldots, \; 0 < \varepsilon_0 \le \alpha_n \le \frac{2}{K+2\varepsilon_1}, \; \varepsilon_1 > 0, \end{gathered} \tag{1.3.12}$$

где $P_\Omega[\cdot]$ – проекция точки на множестве $\Omega$, $K = const > 0$ из (1.3.11).

**Теорема 1.3.2.** *Пусть выполняются следующие условия:*

*1. выполнены условия леммы 1.2.2 и теоремы 1.3.1;*

*2. последовательность $\{\theta_n\} \subset X$ построена согласно алгоритму (1.3.12).*

*Тогда справедливы следующие утверждения:*

*1. предел числовой последовательности $J_1(\theta_n)$ сходится, причем* $\lim\limits_{n\to\infty} J_1(\theta_n) = J_1(\bar{\theta}) = \inf\limits_{\theta\in X} J_1(\theta)$;

*2. последовательность $\{\theta_n\} \subset X$ слабо сходится к множеству $\bar{X}$, $\theta_n \overset{\text{сл}}{\to} \bar{\theta}$, $\bar{\theta} \in \bar{X}$, при этом $u_n \overset{\text{сл}}{\to} \bar{u}$, $p_n \overset{\text{сл}}{\to} \bar{p}$, $v_n \overset{\text{сл}}{\to} \bar{v}$, $x_0^n \to \bar{x}_0$, $x_1^n \to \bar{x}_1, d_n \to \bar{d}$ при $n \to \infty$, где $\bar{\theta} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{d}) \in \bar{X} = \{\bar{\theta} \in X \big| J_1(\bar{\theta}) = \inf\limits_{\theta\in X} J_1(\theta)\}$;*

*3. вдоль последовательности $\{\theta_n\} \subset X$ выполняется оценка* $0 \le J_1(\theta_n) - J_1(\bar{\theta}) \le \frac{c_0}{n}$, $n = 1,2, \; \ldots, \; c_0 = const > 0$;

*4. краевая задача (1.1.2)–(1.1.8) при фиксированном* $t_1, t_1 > t_0$ *имеет решение тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{n\to\infty} J_1(\theta_n) = J_1(\bar{\theta}) = 0$.

**Доказательство.** Учитывая свойство проекции точки на множество и используя равенство (1.3.12), получаем.

$$< u_{n+1} - u_n + \alpha_n J'_{1u}(\theta_n), u - u_{n+1} >_{L_2} \geq 0,$$

$$< v_{n+1} - v_n + \alpha_n J'_{1v}(\theta_n), v - v_{n+1} >_{L_2} \geq 0,$$

$$< p_{n+1} - p_n + \alpha_n J'_{1p}(\theta_n), p - p_{n+1} >_{L_2} \geq 0,$$

$$< x_0^{n+1} - x_0^n + \alpha_n J'_{1x_0}(\theta_n), x_0 - x_0^{n+1} >_{R^n} \geq 0,$$

$$< x_1^{n+1} - x_1^n + \alpha_n J'_{1x_1}(\theta_n), x_1 - x_1^{n+1} >_{R^n} \geq 0,$$

$$< d_{n+1} - d_n + \alpha_n J'_{1d}(\theta_n), d - d_{n+1} >_{R^{m_1}} \geq 0,$$

$\forall u, u \in U,\ \forall v,\ v \in L_2(I, R^m),\ \forall x_0, x_0 \in S_0,\ \forall x_1, x_1 \in S_1,\ \forall d, d \in D,\ \forall p, p \in V$.

Следовательно, при выборе $\theta = (u, v, p, x_0, x_1, d) = \theta_n$, имеем

$$< J'_{1u}(\theta_n), u_n - u_{n+1} >_{L_2} \geq \frac{1}{\alpha_n} \|u_n - u_{n+1}\|^2,$$

$$< J'_{1v}(\theta_n), v_n - v_{n+1} >_{L_2} \geq \frac{1}{\alpha_n} \|v_n - v_{n+1}\|^2,$$

$$< J'_{1p}(\theta_n),\ p_n - p_{n+1} >_{L_2} \geq \frac{1}{\alpha_n} \|p_n - p_{n+1}\|^2,$$

$$< J'_{1x_0}(\theta_n), x_0^n - x_0^{n+1} >_{R^n} \geq \frac{1}{\alpha_n} |x_0^n - x_0^{n+1}|^2,$$

$$< J'_{1x_1}(\theta_n), x_1^n - x_1^{n+1} >_{R^n} \geq \frac{1}{\alpha_n} |x_1^n - x_1^{n+1}|^2$$

$$< J'_{1d}(\theta_n), d_n - d_{n+1} >_{R^{m_1}} \geq \frac{1}{\alpha_n} |d_n - d_{n+1}|^2,$$

Так как функционал $J_1(\theta) \in C^{1,1}(X)$, то верно неравенство

$$J_1(\theta_1) - J_1(\theta_2) \geq < J'(\theta_1), \qquad \theta_1 - \theta_2 > -\frac{K}{2}\|\theta_1 - \theta_2\|^2, \quad \forall\theta_1, \qquad \theta_2 \in X.$$

Отсюда при $\theta_1 = \theta_n,\ \theta_2 = \theta_{n+1}$ имеем

$$J_1(\theta_n) - J_1(\theta_{n+1}) \geq < J'(\theta_n), \qquad \theta_n - \theta_{n+1} > -\frac{K}{2}\|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2.$$

Тогда

$$< J'_1(\theta_n), \qquad \theta_n - \theta_{n+1} > \ \geq \frac{1}{\alpha_n}\|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2, \qquad \forall\theta_n, \theta_{n+1} \in X.$$

Следовательно,

$$J_1(\theta_n) - J_1(\theta_{n+1}) \geq (\frac{1}{\alpha_n} - \frac{K}{2})\ \|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2 \geq \varepsilon_1\|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2,$$

где $\frac{1}{\alpha_n} \geq \frac{K+2\varepsilon_1}{2}$, $\frac{1}{\alpha_n} - \frac{K}{2} \geq \varepsilon_1$. Отсюда следует, что числовая последовательность $\{J_1(\theta_n)\}$ является строго убывающей. Поскольку значение функционала $J_1(\theta_n)$ ограничено снизу, то есть $J_1(\theta) \geq 0,\ \forall\theta,\ \theta \in X,$ для всех $\{J_1(\theta_n)\}$ последовательность является сходящейся. Следовательно $\lim\limits_{n\to\infty}[J_1(\theta_n) - J_1(\theta_{n+1})] = 0$. Переходя к пределу, получаем $\|\theta_n - \theta_{n+1}\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Покажем, что последовательность $\{\theta_n\} \subset X$ является минимизирующей. Поскольку функционал $J_1(\theta) \in C^{1,1}(X)$ и является выпуклым, выполняется необходимое и достаточное условие в виде следующего неравенства

$$J_1(\theta_2) - J_1(\theta_1) \leq < J'_1(\theta_2), \theta_2 - \theta_1 > \forall\theta_1, \theta_2 \in X.$$

Отсюда при $\theta_2 = \theta_n, \theta_1 = \bar{\theta} \in \bar{X} \subset X, \theta_n \in X$, имеем

$$J_1(\theta_n) - J_1(\bar{\theta}) \leq < J'_1(\theta_n), \theta_n - \bar{\theta} > = < J'_1(\theta_n), \theta_n - \theta_{n+1} + \theta_{n+1} - \bar{\theta} \geq =$$

$$= < J'_1(\theta_n), \theta_n - \theta_{n+1} > - < J'_1(\theta_n), \bar{\theta} - \theta_{n+1} >.$$

Тогда

$$< J'_1(\theta_n), \theta - \theta_{n+1} > \geq \frac{1}{\alpha_n} < \theta - \theta_{n+1}, \theta_n - \theta_{n+1} >.$$

Отсюда при $\theta = \bar{\theta}$ имеем

$$< J'_1(\theta_n), \bar{\theta} - \theta_{n+1} > \geq \frac{1}{\alpha_n} < \theta_n - \theta_{n+1}, \bar{\theta} - \theta_{n+1} >.$$

Из полученных оценок, имеем

$$J_1(\theta_n) - J_1(\bar{\theta}) \leq < J'_1(\theta_n) - \frac{1}{\alpha_n}(\bar{\theta} - \theta_{n+1}), \theta_n - \theta_{n+1} > \leq$$

$$\leq |\| J'_1(\theta_n) - \frac{1}{\alpha_n}(\bar{\theta} - \theta_{n+1}) \|\| \theta_n - \theta_{n+1} \| \leq$$

$$\leq (\sup \| J'_1(\theta_n) \| + \frac{r}{\varepsilon_0}) \| \theta_n - \theta_{n+1} t \| = l \ \| \theta_n - \theta_{n+1} \|, \ l = const > 0,$$

где $r$-диаметр множества $X$, $\left\| \bar{\theta} - \theta_{n+1} \right\| < r$, $\frac{1}{\alpha_n} \leq \frac{1}{\varepsilon_0}$, $0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_n$.

Так как $\|\theta_n - \theta_{n+1}\| \to 0$ при $n \to \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} J_1(\theta_n) = J_1(\bar{\theta}) = \min\limits_{\theta\in X} J_1(\theta) = \inf\limits_{\theta\in X} J_1(\theta)$. Тем самым последовательность $\{\theta_n\} \subset X$ является минимизирующей.

Докажем, что последовательность $\{\theta_n\} \subset X$ является минимизирующей $\bar{\theta} \in \bar{X}$. Поскольку множество $X$ является слабо бикомпактным и $\{\theta_n\} \subset X$, из данной последовательности можно выделить подпоследовательность $\{\theta_n\} \subset X$ для которой выполняется сходимость $\{(\theta_{k_m})\} \subset X$ такую, что $\theta_{k_m} \overset{\text{сл}}{\to} \bar{\theta}$ при $m \to \infty$, причем $\bar{\theta} \in X$. Так как последовательность $\{J_1(\theta_n)\}$ имеет предел, равный $J_1(\bar{\theta})$, то соответствующая подпоследовательность $\{J_1(\theta_{k_m})\}$ также сходится к этому значению, то есть $J(\bar{\theta})$ т.е. $\lim\limits_{m\to\infty} J_1(\theta_{k_m}) = J_1(\bar{\theta})$.

Кроме того, функционал $J_1(\theta)$ обладает свойством слабой нижней полунепрерывности на множестве $X$. В связи с этим выполняется следующее неравенство

$$J_1(\bar{\theta}) \leq \lim_{m\to\infty} J_1(\theta_{k_m}) \leq \lim_{m\to\infty} J_1(\theta_{k_m}) = J_1(\bar{\theta}), \quad \theta_{k_m} \overset{\text{сл}}{\to} \bar{\theta} \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Отсюда имеем $\lim\limits_{m\rightrightarrows\infty} J_1\left(\theta_{k_m}\right) = J_1(\bar{\theta})$, $\theta_{k_m} \overset{\text{сл}}{\to} \bar{\theta}$ при $m \to \infty$ где $J_1(\bar{\theta}) = \inf\limits_{\theta\in X} J_1(\theta)$. Таким образом, в слабом пределе последовательности $\bar{\theta}$ обозначаемом через $\bar{\theta}$ функционал $\{\theta_n\} \subset X$ достигает своего наименьшего значения на множестве $X$. Тем самым второе утверждение доказано.

Из полученных выше оценок, имеем

$$J_1(\theta_n) - J_1(\theta_{n+1}) \geq \varepsilon_1 \|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2,\ J_1(\theta_n) - J_1(\bar{\theta}) \leq l\ \|\theta_n - \theta_{n+1}\|.$$

Пусть $a_n = J_1(\theta_n) - J_1(\bar{\theta})$. Тогда

$$a_n \leq l\ \|\theta_n - \theta_{n+1}\|, \qquad a_n - a_{n+1} \geq \varepsilon_1\ \|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2.$$

Следовательно, $a_n > 0,\ a_n - a_{n+1} \geq A a_n^2,\ n = 1,2,\ldots,\ A = \frac{\varepsilon_1}{l}$.

Для рассматриваемой числовой последовательности справедлива оценка $a_n < \frac{1}{An},\ n = 1,2,\ldots$, откуда следует $J_1(\theta_n) - J(\bar{\theta}) \leq \frac{m_0}{n},\ m_0 = \frac{l^2}{\varepsilon_1}$. Тем самым третье утверждение теоремы доказано. Четвёртое утверждение теоремы непосредственно вытекает из леммы 1.2.2. Теорема доказана.

Из результатов теорем 1.2.1–1.3.6 и лемм 1.2.1, 1.2.2 следуют решения задач 1.1.1 и 1.1.2.

1. Для существования решения краевой задачи (1.1.2)–(1.1.8) при фиксированном $t_1, t_1 > t_0$ необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

1) матрица $W(t_0, t_1)$ является положительно определённой;

2) значение функционала $J_1(\bar{\theta}) = 0$, где $\bar{\theta} \in \bar{X}$ – птимальное решение задачи (1.3.1), (1.2.20)–(1.2.22) (решение задачи 1.1.1);

Иначе говоря, задача оптимального быстродействия (1.1.1)–(1.1.8) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняются условия $W(t_0, t_1) > 0, J_1(\bar{\theta}) = 0$ при $t_1 = t_{1*}$.

2. Допустимое управление $(\bar{u}(t), \bar{x}_0,\ \bar{x}_1) \in \Sigma_{t_1} \subset U \times S_0 \times S_1$ определяется из решения начальной задачи оптимального управления (1.3.1), (1.2.20)–(1.2.22) при условии, что $J_1(\bar{\theta}) = 0$. Иными словами, если $\bar{\theta} = \left(\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{d}\right) \in \bar{X}$, $J_1(\bar{\theta}) = 0$ то тройка $(\bar{u}(t), \bar{x}_0,\ \bar{x}_1)$ – является допустимым управлением задачи оптимального быстродействия (1.1.1)–(1.1.8), что соответствует решению задачи 1.1.2.

## 1.4 Оптимальное быстродействие линейных систем

Рассмотрим решение задачи 1.1.3. Как следует из лемм 1.2.1, 1.1.2 и теорем 1.3.1, 1.3.2 необходимым и достаточным условием существования решения краевой задачи (1.1.2) – (1.1.8) при фиксированном $t_1$ является: 1) $W(t_0, t_1) > 0$; 2) значение функционала $J_1(\bar{\theta}) = 0$, где $\bar{\theta} \in \bar{X} = \{\bar{\theta} \in X | J_1(\bar{\theta}) = \inf\limits_{\theta \in X} J_1(\theta)$, где $\bar{\theta} \in \bar{X}$ – решение оптимизационной задачи: минимизировать функционал

$$J_1(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} [|w_1(t) - u(t)|^2 + |p(t) - L(t)P_1 y(t)|^2] dt \to \inf \qquad (1.4.1)$$

при условиях

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)v(t), \quad z(t_0) = 0, \quad v(\cdot) \in L_2^{\rho}(I, R^m), \qquad (1.4.2)$$

$$\theta = (u, v, p, x_0, x_1, d) \in X = U \times L_2^{\rho}(I, R^m) \times V \times S_0 \times S_1 \times D_{\rho} \subset H. \qquad (1.4.3)$$

Поскольку функционал $J_1(\theta) \in C^1(X)$ – является выпуклым, а множество, X – обладает свойством слабой бикомпактности, нижняя граница функционала $J_1(\theta)$, $\theta \in X$ достигается на множестве X.

Решение задачи оптимального быстродействия сводится к определению минимального значения момента времени $t_1$ обозначаемого через $t_{1*}$, $t_{1*} > t_0$ для которого выполняется условие (см. (1.4.1))

$$\min_{t_1} \inf_{\theta \in X} J_1(\theta) = \min_{t_1} \inf_{\theta \in X} [J_{11}(\theta) + J_{12}(\theta)] = 0, \qquad (1.4.4)$$

где $J_{11}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} |w_1(t) - u(t)|^2 dt$, $J_{12}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} |p(t) - L(t)P_1 y(t)|^2 dt$.

Так как значения $J_{11}(\theta) \geq 0$, $J_{12}(\theta) \geq 0$, $\theta \in X$, то из (1.4.4) имеем

$$\min_{t_1} \inf_{\theta \in X} J_{11}(\theta) = 0 = \min_{t_1} \inf_{\theta \in X} J_{12}(\theta). \qquad (1.4.5)$$

Метод решения задачи оптимального быстродействия следует из (1.4.4), (1.4.5) при условиях (1.4.2), (1.4.3). В частности, когда отсутствует фазовые ограничение, задача оптимального быстродействия имеет вид: минимизировать функционал

$$J_{11}(\theta_1) = \int_{t_0}^{t_1} |w_1(t) - u(t)|^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} F_{11}(q_1(t), t) dt \to \inf \qquad (1.4.6)$$

при условиях (1.4.2), (1.4.3) при фиксированном $t_1$, $t_1 > t_0$, где $\theta_1 = (u, v, x_0, x_1, d) \in U_1, q_1 = (\theta_1, z(t_1, v))$. Решение оптимизационной задачи (1.4.6), (1.4.2), (1.4.3) осуществляется аналогично, с использованием результатов теорем 1.3.1 и 1.3.2, где применяются соответствующие частные производные.

$$F_{11v}(q_1, t) = 2[w_1 - u],\ F_{11u}(q_1, t) = -2[w_1 - u],\ F_{11x_0}(q_1, t) = 2T_{11}^*(t)[w_1 - u],$$

$$F_{11x_1}(q_1, t) = 2T_{21}^*(t)[w_1 - u],\ F_{11d}(q_1, t) = -2\Sigma_1^*(t)[w_1 - u],\ F_{11z}(q_1, t) = 0,$$

$$F_{11z(t_1)}(q_1, t) = 2M_1^*(t)[w_1 - u].$$

Выбирается некоторое значение $t_1^0$ удовлетворяющее условию $t_1^0 > t_0$ и решается оптимизационная задача (1.4.6), (1.4.2), (1.4.3) при $t_1 = t_1^0$. После этого определяется направление уменьшения значения функционала (1.4.6) по параметру $t_1$. Предположим, что найдена точка $\bar{\theta} = \bar{\theta}(t_1^0) \in \bar{X}$, для которой $J_{11}(\bar{\theta}) = J_{11}(\bar{\theta}(t_1^0)) = \inf\limits_{\theta \in X} J_{11}(\theta)$. Возможны два варианта:

а) $J_{11}(\bar{\theta}(t_1^0)) > 0$;

б) $J_{11}(\bar{\theta}(t_1^0)) = 0$.

Далее эти случаи рассматриваются отдельно. В случае а) выбирается новое значение $t_1 = 2t_1^0$, случае б) принимается $t_1 = (t_0 + t_1^0)/2$ и процесс продолжается аналогичным образом. Таким образом, применяя метод деления пополам, можно определить значение $t_1 = \bar{t}_{1*}$, где $\bar{t}_{1*} \le t_{1*}$. Это объясняется тем, что время перехода траекторий системы (1.1.1)–(1.1.8) из начального состояния $x_{0*} \in S_0$ в момент времен $t_0$ в состояние $x_{1*} \in S_1$ в момент времени $t_{1*}$ при отсутствии фазовых ограничений не превышает $t_{1*}$.

Другой подход к решению задачи оптимального быстродействия заключается в минимизации функционала

$$J_{12}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} |p(t) - L(t)P_1 y(t)|^2 dt \to \inf \qquad (1.4.7)$$

при условиях

$$J_{11}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} |w_1(t) - u(t)|^2 dt = 0,\ t_1 \ge \bar{t}_{1*}. \qquad (1.4.8)$$

Оптимизационная задача (1.4.7), (1.4.8) может быть решена методом штрафных функционалов [8]. Введем множество

$$X_1 = \{\theta \in X | J_{11}(\theta(\cdot)) \leq 0\} = \{\theta \in X | J_{11}(\theta(\cdot)) = 0\} \subset X.$$

Штрафной функционал, соответствующий ограничению (1.4.8), имеет вид $P_k(\theta) = A_k J_{11}(\theta),\ \theta \in X$, где $A_k$ – некоторая постоянная, $k = 1,2,\ldots$, $A_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Функционал $P_k(\theta),\ \theta \in X$ обладает следующими свойствами:

1. $P_k(\theta) \geq 0,\ \forall\theta,\ \theta \in X,\ k = 1,2,\ldots$, в силу того, что $J_{11}(\theta) \geq 0,\ \forall\theta, \theta \in X$;

2. $\lim\limits_{k\to\infty} P_k(\theta) = 0$, при $\theta \in X_1$, так как $J_{11}(\theta) = 0,\ \forall\theta,\ \theta \in X_1$;

3. $\lim\limits_{k\to\infty} P_k(\theta) = +\infty$ при $\theta \in X$ и $\theta \notin X_1$ в силу того, что $J_{11}(\theta) > 0$.

Рассмотрим вместо исходной задачи (1.4.7), (1.4.8) последовательность задач следующего типа: минимизировать функционал

$$J_k(\theta) = J_{12}(\theta) + P_k(\theta) = J_{12}(\theta) + A_k J_{11}(\theta) \to \inf,\ k = 1,2,\ldots, \quad (1.4.9)$$

при условиях (1.4.2), (1.4.3), где $t_1 \geq \bar{t}_{1*}$,

$$J_k(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_{1k}(q(t),t)dt, \qquad F_{1k}(q,t) = F_{12}(q,t) + A_k F_{11}(q,t),$$

$$F_{12}(q,t) = |p(t) - L(t)P_1 y(t)|^2,\ F_{11}(q,t) = |w_1(t) - u(t)|^2.$$

Исходная задача (1.4.7) – ( 1.4.8) может быть представлена в виде: минимизировать функционал

$$J_{12}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} |p(t) - L(t)P_1 y(t)|^2 dt \to \inf \quad (1.4.10)$$

при условиях

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)v(t), \quad z(t_0) = 0,\ v(t) \in L_2^{\rho}(I, R^m),\ \theta \in X_1,\ t_1 \geq \bar{t}_{1*}. \quad (1.4.11)$$

Взаимосвязь решений задач оптимизации (1.4.9), (1.4.2), (1.4.3) и (1.4.10), (1.4.11) формулируется в следующей теореме.

**Теорема 1.4.1.** *Пусть функционалы $J_{12}(\theta)$, $J_{11}(\theta)$ определены и непрерывны на множестве X гильбертова пространства H, $\inf J_{12}(\theta) > -\infty$ и пусть $\{\theta_k\} \subset X$ – минимизирующая последовательность для задачи (1.4.9), (1.4.2), (1.4.3), а $\{\theta_m\} \subset X_1$ – минимизирующая последовательность для задачи (1.4.10), (1.4.11). Тогда*

$$\inf_{\theta\in X_1} J_{12}(\theta) = J_* = \inf_{\theta\in X} J_k(\theta) = \lim_{m\to\infty} J_{12}(\theta_m) = \lim_{k\to\infty} J_{12}(\theta_k),\ \{\theta_m\}\subset X_1,$$
$\{\theta_k\}\subset X,$

*Последовательность $\{\theta_k\}\subset X$ слабо сходятся к точке $\theta_*\in X$, где $\theta_*\in X$ – решение оптимизационной задачи (1.4.7), (1.4.8).*

**Доказательство**. Следует отметить, что пространство $H$ рефлексивно, $X$, $X_1$ – ограниченные выпуклые замкнутые множества, функционалы $J_{12}(\theta),\ J_{11}(\theta)$ выпуклые на $X$. Так как $\{\theta_k\}\subset X$ – минимизирующая последовательность, то верны неравенства

$$J_k^* = \inf_{\theta\in X_1} J_k(\theta) \le J_k(\theta_k) \le J_k^* + \varepsilon_k,\ \ \theta_k\in X,\ \ k = 1,2,\dots,$$

где $\varepsilon_k > 0,\ \varepsilon_k\to 0$ при $k\to\infty$. Аналогично, для минимизирующей последовательности $\{\theta_n\}\subset X_1$ имеем

$$J^* = \inf_{\theta\in X_1} J_{12}(\theta) \le J_{12}(\theta_m) \le J^* + \varepsilon,\ \ \varepsilon > 0.$$

Существуют числа $m_0 > 0,\ k_0 > 0$ такие, что при $m\ge m_0,\ \ k\ge k_0$ имеем
$$J_{12}(\theta_k) \le J_k(\theta_k) \le J_k^* + \varepsilon_k \le J_k(\theta_m) + \varepsilon \le J^* + 2\varepsilon,\ \ \varepsilon_k\le\varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} J_k(\theta_k) = J^* = \inf_{\theta\in X_1} J_{12}(\theta) = \lim_{k\to\infty} J_{1k}(\theta_k) = \inf_{\theta\in X} J_k(\theta), \qquad \lim_{k\to\infty} J_k^* = J^*.$$

Теорема доказана.

Как следует из теоремы 1.4.1, для построения оптимального решения задачи (1.4.7), (1.4.8) необходимо решить задачу: минимизировать функционал

$$J_k(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_{1k}(q(t),t)dt = \int_{t_0}^{t_1} [F_{12}(q(t),t) + A_k F_{11}(q(t),t)]dt \to \inf, k = 1,2,\dots, \qquad (1.4.12)$$

при условиях (1.4.2), (1.4.3).

***Теорема 1.4.2.*** *Пусть матрица $W(t_0,t_1) > 0$, функции $F_{12}(q,t),\ F_{11}(q,t)$ определены и непрерывны по совокупности переменных, вместе с частными производными по $q$, производная $\partial F_{1k}(q,t)/\partial q$ удовлетворяет условию Липшица. Тогда:*

*1. функционал (1.4.12) при условиях (1.4.2), (1.4.3) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент функционала*

$$J'_k(\theta) = (J'_{ku}(\theta), \quad J'_{kv}(\theta), \quad J'_{kp}(\theta), J'_{kx_0}(\theta), J'_{kx_1}(\theta), \quad J'_{kd}(\theta)) \in H$$

*в любой точке $\theta \in X$ вычисляется по формуле*

$$J'_{ku}(\theta) = F_{1ku}(q(t),t),\ J'_{kv}(\theta) = F_{1kv}(q(t),t) - B_1^*(t)\psi(t),$$

$$J'_{kp}(\theta) = F_{1kp}(q(t),t),\ J'_{kx_0}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_{1kx_0}(q(t),t)dt, \qquad (1.4.13)$$

$$J'_{kx_1}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_{1kx_1}(q(t),t)dt,\ J'_{kd}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_{1kd}(q(t),t)dt,$$

*где $z(t), t \in I$ – решение дифференциального уравнения (1.4.2), а функция $\psi(t), t \in I$ – решение сопряженной системы*

$$\dot{\psi} = F_{1kz}(q(t),t) - A_1^*(t)\,\psi(t),\quad \psi(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} F_{1kz(t_1)}(q(t),t)dt. \ (1.4.14)$$

*2. градиент $J'_k(\theta),\ \theta \in X$ удовлетворяет условию Липшица*

$$\|J'_k(\theta_1) - J'_k(\theta_2)\| \le l_k\|\theta_1 - \theta_2\|,\ \forall\theta_1,\theta_2 \in X. \qquad (1.4.15)$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1.3.1.

Строим последовательности $\{\theta_{nk}\} = \{u_{nk},\ v_{nk}, p_{nk}, x_{0k}^n, x_{1k}^n, d_n^k\},\ n = 0,1,2,\ \dots$ , для каждого $k,\ k = 1,2,\ \dots$ по алгоритму

$$u_{n+1,k} = P_U[u_{nk} - \alpha_{nk}J'_{ku}(\theta_{nk})],\ v_{n+1,k} = P_{L_2^\rho}[v_{nk} - \alpha_{nk}J'_{kv}(\theta_{nk})],$$

$$p_{n+1,k} = P_V[p_{nk} - \alpha_{nk}J'_{kp}(\theta_{nk})],\ x_{0k}^{n+1} = P_{S_0}[x_{0k}^n - \alpha_n J'_{kx_0}(\theta_{nk})],$$

$$x_{1k}^{n+1} = P_{S_1}\left[x_{1k}^n - \alpha_{nk}J'_{kx_1}(\theta_{nk})\right],\ d_{n+1}^k = P_{D_\rho}[d_k^n - \alpha_{nk}J'_{kd}(\theta_{nk})],$$

$$n = 0,1,2,\dots,\ k = 1,2,\dots,\ 0 < \varepsilon_{0k} \le \alpha_{nk} \le \frac{2}{l_k + 2\varepsilon_k},\ \varepsilon_k > 0. \qquad (1.4.16)$$

**Теорема 1.4.3.** *Пусть выполнены условия теоремы 1.4.2, последовательность $\{\theta_{nk}\} \subset X$ определяется по формуле (*1.4.16*). Тогда:*

1. *для любого фиксированного* $k$*, последовательность* $\{\theta_{nk}\} \subset X$ *является минимизирующей, для функционала* $J_k(\theta),\ \theta \in X$,

2. *последовательность* $\{\theta_{*k}\}$ *слабо сходится к точке* $\theta_* \in X_1,\ \theta_{*k} \overset{\text{сл}}{\to} \theta_*$ *при* $k \to \infty$, *где* $\theta_*$ *– решение задачи (*1.4.7*), (*1.4.8*),* $J_{11}(\theta_*) = 0$;

3. *для любого фиксированного* $k$ *справедлива следующая оценка скорости сходимости*

$$0 \le J_k(\theta_{nk}) - J_k^* \le \frac{c_0}{n} \quad , \quad n = 1,2, \dots , \qquad c_0 = const > 0;$$

4. $\lim\limits_{k\to\infty} J_k^* = J^* = \inf\limits_{\theta \to X_1} J_{12}(\theta) = J_{12}(\theta_*)$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1.3.2.

Заметим, что $\bar{t}_{1*} \le t_1 \le t_1^*$, где $\bar{t}_{1*}$ – известная величина. Придавая различные значения величине $t_1$ находим $t_1 = t_1^*$, где

$$J_{12}(\theta_*) = \int_{t_0}^{t_1^*} |p_*(t) - L(t)P_1 y_*(t)|^2 dt = 0,$$

$$J_{11}(\theta_*) = \int_{t_0}^{t_1^*} |w_{1*}(t) - u_*(t)|^2 dt = 0.$$

Легко убедиться в том, что такой же результат следует из решения оптимизационной задачи (1.4.2) – (1.4.3) при $t_1 = t_1^*$, $\bar{t}_{1*} \le t_1 \le t_1^*$.

## 1.5 Решение модельной задачи

Рассмотрим следующую задачу оптимального быстродействия: минимизировать функционал

$$J(x(\cdot), u(\cdot), t_1) = \int_0^{t_1} 1 \cdot dt = t_1 \to inf \qquad (1.5.1)$$

на множестве решений уравнений

$$\dot{x}_1 = x_2 + \cos t, \quad \dot{x}_2 = u, \quad t \in I = [0, t_1], \qquad (1.5.2)$$

с краевыми условиями

$$x(o) = x_0 = \begin{pmatrix} x_1(0) = x_{10} = 1 \\ x_2(0) = x_{20} = 1 \end{pmatrix} \in S_0 = \{(1,1)\},$$

$$x(t_1) = x_1 = \begin{pmatrix} x_1(t_1) = x_{11} = -1 \\ x_2(t_1) = x_{21} = -1 \end{pmatrix} \in S_1 = \{(-1,-1)\}, \quad (1.5.3)$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in G(t): \; G(t) = \{x \in R^2 | -1 \le x_1(t) \le 2{,}34;$$

$$-1{,}675 \le x_2(t) \le 1, \; t \in I = [0, t_1]\}, \quad (1.5.4)$$

с ограничениями на значения управления

$$u(t) \in U = \{u(t) \in L_2(I, R^1) | \; -1 \le u(t) \le +1 \text{ , п. в. } \; t \in I\}. \quad (1.5.5)$$

Смысл задачи

Это задача оптимального быстродействия:

- нужно перевести систему
- из состояния $(1, 1)$
- в состояние $(-1, -1)$
- за минимальное время $t_1$,

с учетом:

- дифференциальных уравнений движения
- ограничений на состояние
- ограничений на управление

То есть, как управлять системой, чтобы прийти в цель как можно быстрее.

Минимизируется функционал $\int_0^{t_1} 1 \cdot dt = t_1$ минимизируем само время перехода.

Динамика системы $\dot{x}_1 = x_2 + \cos t, \quad \dot{x}_2 = u,$

- $x_1$ — положение
- $x_2$ — скорость
- $u(t)$ — управление (ускорение)
- $cost$ — внешнее возмущение

То есть это управляемый колебательный объект.

Ограничения. Начало и конец

- старт: (1, 1)

- финиш: (−1, −1)

Ограничения на состояние

$$-1 \le x_1 \le 2.34, \quad -1.675 \le x_2 \le 1$$

траектория не может выходить из допустимой области.

Ограничения на управление

$$-1 \le u(t) \le 1$$

нельзя «разгоняться бесконечно».

Так как отсутствуют интегральные ограничения, то линейная управляемая система (1.2.9), (1.2.10) запишется в виде

$$\dot{y}_1 = y_2 + \cos t,\ \dot{y}_2(t) = w_1(t),\ t \in I,\ y_1(0) = x_{10} = 1,\ y_2(0) = x_{20} = 1,$$

$$y_1(t_1) = x_{11} = -1,\ y_2(t_1) = x_{21} = -1, \quad w_1(t) \in L_2(I, R^1),\ I = [0, t_1].$$

Начальные и конечные условия

$y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 1$ — старт системы.

$y_1(t_1) = -1, y_2(t_1) = -1$ — цель, куда нужно прийти.

Ограничение $w_1(t) \in L_2(I, R^1)$

Это означает:

- управление квадратично интегрируемо;
- функция физически допустима;
- можно применять методы оптимального управления.

Проще, управление не бесконечно большое и не разрывное.

От системы

$$\dot{y} = Ay + Bu + \bar{\mu}(t)$$

к матричной форме линейной управляемой системы**.**

Здесь:

- $A$ — матрица динамики системы;
- $B$ — матрица управления;
- $\bar{\mu}(t)$ — внешнее воздействие (здесь $\cos(t)$);

Матрицы $A,\ B,\ \bar{\mu}(t)$

Исходные уравнения:

$$\dot{y}_1 = y_2 + cost, \quad \dot{y}_2 = w_1(t).$$

Записываем в векторном виде:

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} w_1(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} cost \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{\mu}(t)}.$$

Короткая формулировка.

Отсутствие интегральных ограничений позволяет представить исходную динамическую систему в виде линейной управляемой системы с управлением $w_1(t)$. Введенные обозначения не изменяют физического смысла модели, а обеспечивают возможность применения общих результатов теории управляемости линейных систем для дальнейшего исследования задачи оптимального быстродействия

Для данного примера матрицы

$$A_1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mu}(t) = \begin{pmatrix} cost \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\theta(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi(0,t) = e^{-A_1 t} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\theta(t) = e^{At}$ это фундаментальная матрица решений однородной системы: $\dot{y} = Ay$. То есть она описывает: как система движется без управления и без возмущения.

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Шаг 1. Замечаем особенность матрицы $A$: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. То есть $A^2$=0.

Шаг 2. Ряд экспоненты матрицы

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \cdots$$

Но $A^2 = 0 \Rightarrow$ все старшие степени нули. Поэтому: $e^{At} = I + At$.

Шаг 3. Подставляем

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, At = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Складываем:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Phi(0,t) = e^{-At}.$$

Это обратная фундаментальная матрица (движение «назад по времени»).

$$e^{-At} = I - At = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Физический смысл

Матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— это движение с постоянной скоростью:

- скорость остается той же;
- положение растет как $x_1 = x_1(0) + tx_2(0)$.

То есть система — двойной интегратор (классическая модель механики).

Короткое объяснение.

Матрицы $A$, $B$ и вектор внешнего воздействия $\bar{\mu}(t)$ получены из векторной записи исходной системы. Фундаментальная матрица решений однородной системы определяется как матричная экспонента $e^{At}$. Поскольку матрица $A$ нильпотентна второго порядка ($A^2 = 0$), матричная экспонента имеет вид $e^{At} = I + At$, что приводит к явному выражению фундаментальной матрицы и ее обратной $e^{-At} = I - At$.

Матрицы

$$W(0,t_1) = \int_0^{t_1} e^{-At} BB^* e^{-A^* t} dt = \begin{pmatrix} \frac{t_1^3}{3} & -\frac{t_1^2}{2} \\ -\frac{t_1^2}{2} & t_1 \end{pmatrix} > 0,$$

1. Матрица $W(0,t_1)$

$$W(0,t_1)=\int_0^{t_1} e^{-At}BB^*e^{-A^*t}dt$$

Это называется: Матрица управляемости Грама

2. Почему считается именно такой интеграл

Для линейной системы

$$\dot{y}=Ay+Bu$$

теория управляемости говорит: Система управляема на $t_1$, если матрица

$$W(0,t_1)>0$$

(положительно определена).

3. Как получилась явная формула

$$e^{-At}=\begin{pmatrix}1 & -t\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Сначала считаем:

$$B^*B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0 \quad 1)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Далее перемножаем матрицы и интегрируем по $t$. После вычислений получается:

$$W(0,t_1)=\begin{pmatrix}\frac{t_1^3}{3} & -\frac{t_1^2}{2}\\ -\frac{t_1^2}{2} & t_1\end{pmatrix}.$$

4. Почему важно, что $W(0,t_1)>0$. Система полностью управляема. То есть:

- можно попасть в любую точку;
- существует допустимое управление;
- задача быстродействия имеет смысл.

Это ключевой теоретический результат.

$$W^{-1}(o,t_1)=\begin{pmatrix}12/t_1^3 & 6/t_1^2\\ 6/t_1^2 & 4/t_1\end{pmatrix},$$

$$T_1(t) = -B^* e^{-A^* t} W^{-1}(t_0, t_1) = \left( \frac{12t}{t_1^3} - \frac{6}{t_1^2}, \qquad \frac{6t}{t_1^2} - \frac{4}{t_1} \right),$$

$$T_1(t)x_0 = \frac{12t - 6t_1 + 6tt_1 - 4t_1^2}{t_1^3},$$

$$T_2(t) = B^* e^{-A^* t} W^{-1}(0, t_1) e^{-At_1} = \left( \frac{12t}{t_1^3} + \frac{6}{t_1^2}, \quad -\frac{6}{t_1^2} + \frac{2}{t_1} \right),$$

$$T_2(t)x_1 = \frac{12t - 6t_1 + 6tt_1 - 2t_1^2}{t_1^3},$$

$$M_1(t) = -B^* e^{-A^* t} W^{-1}(0, t_1) e^{-At_1} = (\frac{12t}{t_1^3} - \frac{6}{t_1^2}, \qquad \frac{-6t}{t_1^2} - \frac{2}{t_1}),$$

$$\bar{\mu}_1(t) = -B^* e^{-A^* t} W^{-1}(0, t_1) \int_0^{t_1} e^{-At} \bar{\mu}(t) dt = (\frac{12t}{t_1^3} - \frac{6}{t_1^2}) \sin t_1.$$

5. Обратная матрица $W^{-1}(0, t_1)$

Она используется для: Явной формулы управления. В теории линейных систем:

$$u(t) = -B^* e^{-A^* t} W^{-1}(t_0, t_1) \text{ (граничные данные).}$$

Поэтому дальше появляются:

- $T_1(t)$ — влияние начального состояния;
- $T_2(t)$ — влияние конечного состояния;
- $M_1(t)$ — дополнительные члены;
- $\bar{\mu}_1(t)$ — влияние внешнего возмущения $\cos t$.

Все они получаются подстановкой $W^{-1}$ в общую формулу решения.

6. Физический смысл выражений $T_1,\ T_2, M_1, \bar{\mu}_1$. Очень важн:

$T_1(t)x_0$ — вклад начального состояния в управление.

$T_2(t)x_1$ — вклад конечной точки, куда нужно попасть.

$M_1(t)$ — член, связанный с динамикой системы.

$\bar{\mu}_1(t)$ — влияние внешней силы $\cos t$.

7. Главный смысл всего блока формул

Все эти вычисления делают одно: дают явную формулу допустимого управления.

- решается задача оптимизации;
- получается управление предельного типа;
- находится минимальное время $t_{1*} = 3{,}35$.

То есть именно здесь начинается решение задачи быстродействия.

8. Короткий объяснение.

Вот готовая формулировка: Матрица $W(0,t_1)$, определяемая интегральным выражением Грама, является матрицей управляемости рассматриваемой линейной системы. Ее положительная определенность гарантирует существование управления, переводящего систему из заданного начального состояния в конечное. Обратная матрица $W^{-1}$ используется для построения явной формулы допустимого управления, в которой выделяются слагаемые, обусловленные начальными и конечными условиями, динамикой системы и внешним воздействием.

Из формулы (1.2.13) следует, что функция

$$w_1(t) = v(t) + (\frac{12t}{t_1^3} - \frac{6}{t_1^2})z_1(t_1,v) + (\frac{-6t}{t_1^2} + \frac{2}{t_1}t)z_2(t_1,v) +$$

$$+\left(\frac{24t}{t_1^3} - \frac{12}{t_1^2} - \frac{2}{t_1}\right) + \left(\frac{12t}{t_1^3} - \frac{6}{t_1^2}\right)\sin t_1, \qquad t \in I = [0,t_1],$$

Что означает формула для $w_1(t)$. Из формулы (1.2.13) следует: В теории Айсагалиева (через интегральное уравнение Фредгольма) получено общее описание всех управлений, которые способны обеспечить заданные краевые условия. То есть $w_1(t)$ записывают в виде:

$w_1(t) = v(t)$+корректирующие члены

- $v(t)$ — свободная функция (ее можно выбирать произвольно из $L_2$
- остальные члены — это то, что обязательно добавляется, чтобы:
  - попасть в конечную точку,
  - выполнить краевые условия,
  - учесть влияние $\cos t$.

где функция $z(t,v) = (z_1(t,v),\ z_2 = (t,v)),\ t \in I$ – решение дифференциального уравнения

$$\dot{z}_1 = z_2, \qquad \dot{z}_2 = v(t),\ \ z_1(0) = 0,\ \ z_2(0) = 0,\ \ v(t) \in L_2(I,R^1).$$

Зачем вводят $v(t)$ и функцию $z(t,v)$

Вводится вспомогательная система:

$$\dot{z}_1 = z_2,\ \dot{z}_2 = v(t),\ \ z_1(0) = 0,\ \ z_2(0) = 0.$$

Это делается, потому что: проще сначала работать со «свободным управлением» $v(t)$ и смотреть, к чему оно приводит.

Тогда:

- $z(t,v)$ — траектория, порожденная именно $v(t)$
- значения $z_1(t_1,v)$, $z_2(t_1,v)$ — это конечный результат действия $v(t)$ к моменту $t_1$

Формуле $w_1(t)$ появляются $z_1(t_1,v)$ и $z_2(t_1,v)$. Потому что $w_1(t)$ строится так, чтобы:

- свободная часть $v(t)$ могла быть любой
- но управление все равно должно “подстроиться”, чтобы выполнить краевые условия

То есть коэффициенты при $z_1(t_1,v)$, $z_2(t_1,v)$ — это: «компенсаторы», обеспечивающие попадание в конечную точку.

Остальные добавки в $w_1(t)$. Внутри $w_1(t)$ есть:

- полиномы по $t$ (например, $\frac{12t}{t_1^3}-\frac{6}{t_1^2}$)
- член со $\sin t_1$

Это возникает, потому что:

- динамика $A, B$ — линейная,
- интегралы с $\cos t$ дают $\sin t$,
- а интегрирование матриц Грама дает полиномиальные коэффициенты по $t$ и $t_1$.

Из (1.2.16) имеем

$$y(t)=\big(y_1(t),\qquad y_2(t)\big)=\big(z_1(t,v),\qquad z_2(t,v)\big)+E_1(t)x_0+E_2(t)x_1+$$

$$+\bar{\mu}_2(t)+M_2(t)z(t_1,v),\qquad t\in I,$$

где

$$E_1(t)=e^{At}W(t,t_1)W^{-1}(0,t_1),\ \ E_2=e^{At}W(0,t_1)W^{-1}(0,t_1)e^{-A\tau_1}$$

$$\bar{\mu}_2(\mathrm{t})=\int_0^{t_1} e^{A(t-\tau)}\bar{\mu}_2(\tau)d\tau-e^{At}W(0,t)W^{-1}(0,t_1)\int_0^{t_1} e^{-At}\bar{\mu}(\mathrm{t})dt,$$

$$M_2(t)=-e^{At}W(0,t)W^{-1}(0,t_1)e^{-At},$$

$$W(0,t)=\int_0^{t_1} e^{-A\tau}BB^*e^{-A^*\tau}d\tau=\begin{pmatrix}t^3/3 & -t^2/2\\ -t^2/2 & t\end{pmatrix},$$

Что означает формула для траектории $y(t)$. Из (1.2.16) имеем: есть общая формула решения краевой задачи, где траектория распадается на несколько частей:

$$y(t) = z(t,v) + E_1(t)x_0 + E_2(t)x_1 + \bar{\mu}_2(t) + M_2(t)z(t_1,v),$$

Траектория $y(t)$ — сумма вкладов.

Физический смысл каждого слагаемого в $y(t)$

Разберем каждую часть:

1) $z(t,v)$ — траектория от «свободной части управления» $v(t)$.

2) $E_1(t)x_0$ — вклад начального состояния $x_0$.

3) $E_2(t)x_1$ — вклад конечного условия $x_1$ (то, куда надо попасть).

4) $\bar{\mu}_2(t)$ — вклад внешнего воздействия $\cos t$.

5) $M_2(t)z(t_1,v)$ — коррекция, которая «дотягивает» траекторию так, чтобы краевые условия выполнились.

$E_1(t)$ и $E_2(t)$

$$E_1(t) = e^{At}W(t,t_1)W^{-1}(0,t_1),\ \ E_2(t) = e^{At}W(0,t_1)W^{-1}(0,t_1)e^{-A\tau_1}$$

Они называются операторами краевых условий:

- $E_1(t)$ переносит влияние начальной точки по времени.
- $E_2(t)$ переносит влияние конечной точки по времени.

8) Что такое $W(0,t_1)$ и $W(t,t_1)$

Это части матрицы управляемости (Грама):

$$W(0,t) = \int_0^t e^{-A\tau}BB^*e^{-A^*\tau}d\tau$$

и

$$W(t,t_1) = \int_t^{t_1} e^{-A\tau}BB^*e^{-A^*\tau}d\tau$$

Именно поэтому там появляются:

- $\frac{t^3}{3},\ \frac{t^2}{2},\ t_1^3 - t^3,\ t_1^2 - t^2.$

Главный смысл

Дает явное представление:

- всех управлений $w_1(t)$ через свободную функцию $v(t)$
- всех траекторий $y(t)$, которые удовлетворяют краевым условиям

А дальше уже:

- добавляют ограничения $u(t) \in [-1,1]$ и фазовые

- строят функционал (1.5.6)
- и ищут оптимальное управление для быстродействия.

Объяснение.

Из общей формулы решения интегрального уравнения (1.2.13) управление $w_1(t)$ представляется в виде суммы произвольной функции $v(t) \in L_2(I)$ и корректирующих слагаемых, обеспечивающих выполнение краевых условий и учет внешнего воздействия. Вспомогательная функция $z(t, v)$ определяется как решение системы $\dot{z}_1 = z_2,\ \dot{z}_2 = v(t)$ при нулевых начальных условиях. Согласно (1.2.16) траектория $y(t)$ раскладывается на вклад свободной части $z(t, v)$, вклад начального и конечного состояний через матрицы $E_1(t)$, $E_2(t)$, а также вклад возмущения $\bar{\mu}_2(t)$ и корректирующее слагаемое $M_2(t)z(t_1, v)$.

Вводится функционал $J_1$. После длинных преобразований исходная задача быстродействия (минимизировать время $t_1$ сводится к эквивалентной задаче оптимального управления: теперь оптимизационная задача 1.3.1 при условиях (1.2.20) – (1.2.22) запишется так.

$$J_1\big(u(\cdot), v(\cdot), p(\cdot)\big) = \int_0^{t_1} [|w_1(t) - u(t)|^2 + |p_1(t) - y_1(t)|^2 +$$

$$+|p_2(t) - y_2(t)|^2]dt \to \inf \qquad (1.5.6)$$

Смысл каждого слагаемого:

- $|w_1(t) - u(t)|^2$ — заставляет реальное управление $u$ совпадать с допустимым управлением $w_1$.
- $|p_1(t) - y_1(t)|^2$ — заставляет вспомогательную траекторию $p(t)$ совпадать с реальной траекторией $y(t)$ и одновременно соблюдать фазовые ограничения.

То есть: мы «штрафуем» любые нарушения ограничений. Если минимум равен нулю, значит ограничения выполнены точно.

При условиях

$$\dot{z}_1 = z_2,\ \dot{z}_2 = v(t),\ \ z(0) = (z_1(0), z_2(0)) = 0,\ \ v(t) \in L_2(I, R^1), \qquad (1.5.7)$$

$$p(t) \in V(t) = \{p(\cdot) \in L_2(I, R^2) - 1 \le p_1(t) \le +1, -1{,}675 \le p_2(t) \le 1,$$

$$t \in I = [0, t_1]\}, \quad (1.5.8)$$

$$u(t) \in U = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^1)|\ \ -1 \le u(t) \le +1, \quad t \in I = [0, t_1]\}. \quad (1.5.9)$$

Ограничения задачи

(1.5.7) — динамика свободной части

$$\dot{z}_1 = z_2, \qquad \dot{z}_2 = v(t), \;\; z(0) = (z_1(0), z_2(0)) = 0.$$

Это просто двойной интегратор для произвольного $v(t)$.

(1.5.8) — фазовые ограничения

$$-1 \le p_1(t) \le +1, \qquad -1{,}675 \le p_2(t) \le 1.$$

То есть $p(t)$ обязана лежать в допустимой области состояний.

(1.5.9) — ограничения на управление

$$-1 \le u(t) \le +1.$$

Это физическое ограничение на силу управления.

Критерий существования допустимого управления. Из теорем следует: Допустимое управление существует тогда и только тогда, когда:

$W(0, t_1) > 0$ — система управляема.

$J_1(\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}) = 0$ — найдено такое управление, при котором все ограничения выполнены точно.

Важно, в этой задаче. $W(0, t_1) > 0$ для любого $t_1 > 0$. Значит все решает условие минимума $J_1 = 0$.

Как находят минимальное время. Перебирают значения $t_1$ и ищут: $\min J_1$. Минимум ноль впервые получается при $t_1 = 3.35$.

Как следует из теорем 1.3.1, 1.3.6 для существования допустимого управления для краевой задачи (1.5.2) – (1.5.5) при фиксированном $t_1,\ t_1 > t_0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: 1) $W(0, t_1) > 0$; 2) $J_1(\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}) = 0$, где $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}) \in \bar{X}$ – оптимальное управление в задаче (1.5.6) – (1.5.7). Заметим, что матрица $W(0, t_1) > 0$ для любого $t_1,\ t_1 > t_0$.

Решение задачи оптимального быстродействия (1.5.1) – (1.5.5) следует из задачи оптимального управления (1.5.6) – ( 1.5.7) для значений $t_1 = 4,\ 2,\ 3{,}5,\ 3{,}15$:

Полученное оптимальное управление. Оно имеет вид:

$$u_*(t) = w_{1*}(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < 2{,}675; \\ 1, & 2{,}675 \le t \le 3{,}35; \end{cases}$$

$$v_*(t) = \begin{cases} t - 1, & 0 \le t < 2{,}675; \\ t + 1, & 2{,}675 \le t \le 3{,}25; \end{cases} \quad t \in [0, t_{1*}]$$

$$z_1(t, v_*) = \begin{cases} \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2}, & 0 \le t < 2{,}675; \\ \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} - 5{,}35t + 7{,}1556, & 2{,}675 \le t \le 3{,}35; \end{cases}$$

$$z_2(t, v_*) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} - t; & 0 \le t < 2{,}675; \\ \frac{t^2}{2} - t + 5{,}35; & 2{,}675 \le t \le 3{,}35; \end{cases}$$

$$y_{1*}(t) = x_{1*}(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{2} + t + \sin t; & 0 \le t < 2{,}675; \\ \frac{t^2}{2} - 4{,}35t + \sin t + 8{,}156; & 2{,}675 \le t < 3{,}35; \end{cases} \quad t \in [0, t_1^*]$$

$$y_{2*}(t) = x_{2*}(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \le t < 2{,}675; \\ t - 4{,}35, & 2{,}675 \le t \le 3{,}35 \end{cases}$$

$$p_{1*}(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{2} + t + \sin t; & 0 \le t < 2{,}675; \\ \frac{t^2}{2} - 4{,}35t + \sin t + 8{,}156; & 2{,}675 \le t \le 3{,}35; \end{cases} \quad t \in [0, t_{1*}]$$

$$p_{2*}(t) = \begin{cases} 1 - t; & 0 \le t < 2{,}675; \\ t - 4{,}35; & 2{,}675 \le t \le 3{,}35; \end{cases}$$

Это классическая структура: управление предельного типа— главный результат теории быстродействия.

Оптимальные траектории. Дальше выписываются:

- $u_*(t)$
- $v_*(t)$
- $y_{1*}(t)$
- $p_{1*}(t)$

Далее проверяется, все ограничения выполняются:

$$-1 \le p_{1*}(t) \le 2{,}34, \ \ t \in [0, t_{1*}];$$
$$-1{,}675 \le p_{2*}(t) \le 1, \ \ t \in [0, t_{1*}].$$

Минимальное время перехода от состояния $(1, \ 1) \in S_0$ в состояние $(-1, \ 1) \in S_1$ ровно $t_{1*} = 3{,}35$.

Главный итог всей задачи, получено: $t_1 = 3.35$. Это минимально возможное время перехода.

Короткая формулировка для диссертации. Вот готовый научный текст: Задача оптимального быстродействия сведена к эквивалентной задаче минимизации функционала отклонений управления и фазовых переменных. Установлено, что существование допустимого управления определяется положительной определенностью матрицы управляемости и обращением минимизируемого функционала в нуль. В результате решения получено оптимальное управление предельного типа и вычислено минимальное время перевода системы из начального состояния в конечное, равное $t_1 = 3.35$.

## 1.6 Численное решение задачи оптимального быстродействия

Для подтверждения полученных теоретических результатов была выполнена численная реализация решения модельной задачи оптимального быстродействия.

Программная реализация разработана на языке Python и основана на дискретизации временного интервала, численном интегрировании системы дифференциальных уравнений и применении методов оптимизации при наличии ограничений на управление.

Ниже приведены основные фрагменты программного кода, используемые для вычислительного эксперимента.

Задание динамической системы и исходных матричных функций

В рассматриваемой работе исследуется линейная нестационарная система управления с внешним воздействием. Для формализации динамики системы вводятся матричные функции $A(t), B(t)$, а также вектор-функция $\mu(t) \backslash \mu(t)$, определяющие эволюцию фазового состояния.

В программной реализации данные функции задаются следующим образом:

```
def A_func(t):
    return np.array([[0.0, 1.0],
                     [0.0, 0.0]])
```

Матрица $A(t) \in R^{2\times2}$ описывает внутреннюю динамику системы. В данном случае она является постоянной по времени и соответствует системе второго порядка, приведенной к нормальной форме. Такая структура характерна, например, для моделей с кинематической связью между координатой и скоростью.

```
def B_func(t):
```

```
    return np.array([[0.0],
                     [1.0]])
```

Матрица $B(t) \in R^{2\times1}$ определяет канал управления. Управление воздействует непосредственно на вторую компоненту состояния, что соответствует стандартной модели управляемого ускорения.

```
def mu_func(t):
    return np.array([np.cos(t), 0.0])
```

Вектор-функция $\mu(t) \in R^2$ описывает внешнее неоднородное воздействие на систему. В данной модели оно действует только на первую компоненту состояния и имеет гармонический характер. Наличие $\mu(t)$ приводит к неавтономной системе и требует учета интегральных поправок при построении оптимального управления.

Малое регуляризирующее возмущение

Для расширения системы и обеспечения корректности последующих вычислений вводятся дополнительные матричные функции $A_0(t)$ и $B_0(t)$:

```
e = 1e-7
```

Здесь параметр $\varepsilon = 10^{-7}$ задает малое положительное число, используемое для регуляризации.

```
def A0_func(t):
    return e * np.array([[1.0, 0.0]])
```

Матрица $A_0(t) \in R^{1\times2}$ представляет собой малое возмущение основной динамики. Она используется при построении расширенной системы и не оказывает существенного влияния на исходную динамику, однако обеспечивает невырожденность некоторых матриц (в частности, граммиана управляемости).

```
def B0_func(t):
    return e * np.array([[0.0]])
```

Матрица $B_0(t) \in R^{1\times1}$ аналогично вводится как малый регуляризирующий член в управляющем канале дополнительной переменной.

Введение малых матриц $A_0(t)$ и $B_0(t)$ является стандартным приемом в задачах оптимального управления и управляемости. Оно позволяет:

- избежать вырождения расширенной динамической системы;

- обеспечить численную устойчивость при вычислении фундаментальной матрицы и граммиана;
- корректно формализовать краевые условия при оптимизации.

При предельном переходе $\varepsilon \to 0$ исходная модель восстанавливается.

Итоговая математическая модель

Таким образом, базовая динамика системы задается уравнением:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \mu(t), x(t) \in R2,$$

а дополнительные матрицы $A_0(t)$, $B_0(t)$ используются для построения расширенной системы, применяемой на последующих этапах исследования.

2. Задание размерностей и согласование матричных размеров

```
n = 2
m = 1
m2 = A0_func(0.0).shape[0]  # =1
N = n +  m2                 # =3
```

В этом блоке фиксируются размерности исходной и расширенной моделей.

2.1. Размерность исходного состояния $x(t)$

Параметр

$$n = 2$$

означает, что вектор состояния исходной системы имеет вид

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in R_2.$$

Соответственно, матрица динамики $A(t)$ имеет размер $2 \times 2$, а матрица управления $B(t)$ — размер $2 \times 1$.

2.2. Размерность управления

Параметр

$$m = 1$$

задает скалярное управление $u(t) \in R$. В коде это отражено тем, что $B(t)$ имеет один столбец.

2.3. Размерность дополнительной (вспомогательной) компоненты

Величина

```
m2 = A0_func(0.0).shape[0]
```

получается как число строк матрицы $A_0(t)$. Поскольку ранее $A_0(t) \in R^{1\times 2}$, то $m_2 = 1$. Таким образом, в расширенную модель добавляется одна дополнительная переменная (условно обозначим ее $\eta(t) \in R$).

2.4. Итоговая размерность расширенного состояния

```
N = n +  m2
```

определяет размерность расширенного вектора состояния:

$$z(t) = (x(t), \eta(t))^{\top} \in R^{n+m_2} = R^3.$$

То есть расширенное состояние имеет размерность $N = 3$.

3. Построение расширенных функций $A_1(t),\ B_1(t), \bar{\mu}(t)$

Далее в коде формируется расширенная система вида

$$\dot{z}(t) = A_1(t)z(t) + B_1(t)u(t) + \bar{\mu}(t), z(t) \in R^N.$$

Это делается для того, чтобы в дальнейшем корректно вычислять фундаментальную матрицу, граммиан управляемости и интегральные выражения в задачах оптимального управления.

3.1. Расширенная матрица динамики $A_1(t)$

```
def A1_func(t):
    A = A_func(t)
    A0 = A0_func(t)
    top = np.hstack([A, np.zeros((n, m2))])
    bottom = np.hstack([A0, np.zeros((m2, m2))])
    return np.vstack([top, bottom])  # (3×3)
```

Шаг 1. Извлечение исходных блоков

- A = A_func(t) — исходная матрица $A(t) \in R^{2\times2}$,
- A0 = A0_func(t) — матрица $A_0(t) \in R^{1\times2}$.

Шаг 2. Формирование верхнего блока

```
top = np.hstack([A, np.zeros((n, m2))])
```

Строится матрица размера $2 \times 3$: $[A(t)\ 0]$, где нулевой блок имеет размер $n \times m_2 = 2 \times 1$. Его смысл: дополнительная переменная $\eta(t)$ не влияет на динамику $x(t)$ напрямую (в данном построении).

Шаг 3. Формирование нижнего блока

```
bottom = np.hstack([A0, np.zeros((m2, m2))])
```

Строится матрица размера $1 \times 3$: $[A_0(t)\ \ 0]$, где последний нулевой блок имеет размер $m_2 \times m_2 = 1 \times 1$. Это соответствует уравнению для дополнительной переменной:

$$\dot{\eta}(t) = A_0(t)x(t) + 0 \cdot \eta(t) + \cdots$$

Шаг 4. Сборка полной матрицы $A_1(t)$

```
return np.vstack([top, bottom])
```

Итоговая матрица $A_1(t) \in R^{3\times3}$ имеет блочную структуру.

3.2. Расширенная матрица управления $B_1(t)$

```
def B1_func(t):
    B = B_func(t)
    B0 = B0_func(t)
    return np.vstack([B, B0])        # (3×1)
```

- B = B_func(t) — исходный вектор-столбец $B(t) \in R^{2\times1}$,
- B0 = B0_func(t) — малый блок $B_0(t) \in R^{1\times1}$.

Вертикальная склейка дает:

$$B_1(t) = (B(t)B_0(t)) \in R^{3\times1}.$$

Тем самым управление воздействует и на исходное состояние $x(t)$, и (возможно, очень слабо) на дополнительную переменную $\eta(t)$ через малый параметр $B_0(t)$.

3.3. Расширенный вектор внешнего воздействия $\bar{\mu}(t)$

```
def mu_bar_func(t):
    return np.concatenate([mu_func(t), np.zeros((m2,))])  # (3,)
```

Здесь задается:

$$\bar{\mu}(t) = \begin{pmatrix} \mu(t) \\ 0 \end{pmatrix} \in R^3.$$

То есть внешнее воздействие действует только на исходные переменные $x(t)$, а на вспомогательную компоненту $\eta(t)$ не влияет.

4. Вычисление фундаментальной матрицы $\Phi(t, t_0)$

```
def build_fundamental_matrix(A1_func, t0, t1, num_points=200):
```

Этот блок строит фундаментальную матрицу (матрицу перехода) для однородной части расширенной системы:

$$\dot{z}(t) = A_1(t)z(t).$$

Фундаментальная матрица $\Phi(t, t_0)$ определяется как решение матричного уравнения:

$$\frac{dt}{d}\Phi(t, t_0) = A_1(t)\Phi(t, t_0), \Phi(t_0, t_0) = I.$$

Используется далее для:

- переноса состояния между моментами времени,
- построения граммиана управляемости,
- вычисления интегральных выражений.

4.1. Определение размерности матрицы

```
N_mat = A1_func(t0).shape[0]
```

Так как $A_1(t) \in R^{N\times N}$, то N_mat=N=3.

4.2. Преобразование матричного ОДУ к векторному

Численные методы (например, solve_ivp) решают ОДУ вида $\dot{y} = f(t, y)$, где $y$ — вектор. Поэтому матрицу $\Phi$ «разворачивают» в вектор:

```
def ode_phi(t, y_flat):
    Y = y_flat.reshape((N_mat, N_mat))
    return (A1_func(t) @ Y).flatten()
```

То есть:

- y_flat — это вектор длины $N_2 = 9$,
- он преобразуется обратно в матрицу $Y \in R^{3\times3}$,
- вычисляется $A_1(t)Y$,
- затем результат снова превращается в вектор.

4.3. Начальное условие $\Phi(t_0) = I$

```
Y0 = np.eye(N_mat).flatten()
```

Задается

$$\Phi(t_0, t_0) = I_3.$$

4.4. Сетка по времени и численное интегрирование

```
t_eval = np.linspace(t0, t1, num_points)
sol = solve_ivp(
    ode_phi, [t0, t1], Y0, t_eval=t_eval,
    rtol=1e-8, atol=1e-10
)
```

- строится равномерная сетка из num_points точек;
- решается матричное ОДУ;
- задаются строгие допуски:
  - rtol=1e-8 — относительная точность,
  - atol=1e-10 — абсолютная точность.

Это повышает надежность вычисления $\Phi$, что важно при последующих операциях (например, при инверсии).

4.5. Восстановление списка матриц $\Phi(t_k)$

```
Phi_list = sol.y.T.reshape((num_points, N_mat, N_mat))
```

sol.y содержит решение в виде массива. Здесь он приводится к массив

4.6. Интерполяция $\Phi(t)$ для произвольного времени

```
phi_funcs = [[interp1d(sol.t, Phi_list[:, i, j],
                       kind='cubic', fill_value='extrapolate')
              for j in range(N_mat)] for i in range(N_mat)]
```

Каждый элемент $\Phi_{ij}(t)$ интерполируется отдельной функцией (interp1d) по времени:

- kind='cubic' — кубическая интерполяция (гладкая),
- extrapolate — разрешает значения за пределами сетки.

Далее строится функция, возвращающая матрицу целиком:

```
def phi_eval(t):
    M = np.zeros((N_mat, N_mat))
    for i in range(N_mat):
        for j in range(N_mat):
            M[i, j] = float(phi_funcs[i][j](t))
    return M
```

4.7. Вычисление обратной и транспонированной фундаментальной матрицы

```
def phi_inv_eval(t):
    return np.linalg.inv(phi_eval(t))
def phi_transpose_eval(t):
    return phi_eval(t).T
```

- `phi_inv_eval(t)` возвращает $\Phi(t, t_0)^{-1}$,
- `phi_transpose_eval(t)` — $\Phi(t, t_0)^{\top}$.

Обе функции нужны в формулах граммиана управляемости и сопряженных выражениях.

4.8. Возвращаемые функции

```
return phi_eval, phi_inv_eval, phi_transpose_eval
```

Итог: далее по коду можно получать:

- $\Phi(t, t_0)$,
- $\Phi(t, t_0)^{-1}$,
- $\Phi\Phi(t, t_0)^{\top}$

в любой точке времени.

Краткая формулировка блока.

Данный фрагмент реализует переход от исходной системы размерности $n = 2$ к расширенной системе размерности $N = n + m_2 = 3$, задавая блочные матрицы $A_1(t), B_1(t)B$ и $\bar{\mu}(t)$. Далее численно строится фундаментальная матрица $\Phi(t, t_0)$ расширенной однородной системы $\dot{z} = A_1(t)z$ путем интегрирования матричного ОДУ с начальным условием $\Phi(t_0) = I$. Для удобства последующих вычислений элементы $\Phi(t)$ интерполируются по

времени, что позволяет вычислять $\Phi(t), \Phi(t)^{-1}$ и $\Phi(t)^{\top}$ при произвольных $t \in [t_0, t_1]$.

5. Граммиан управляемости и его вычисление

В данном разделе реализуется вычисление граммиана управляемости для расширенной линейной нестационарной системы. Этот объект является ключевым в теории управляемости и оптимального управления и играет фундаментальную роль во всех последующих вычислениях.

5.1. Теоретическая мотивация введения граммиана

Рассмотрим линейную нестационарную систему

$$\dot{z}(t) = A_1(t)z(t) + B_1(t)u(t), z(t) \in R^N.$$

Для такой системы граммиан управляемости на интервале $[t_0, t_1]$определяется как

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)\, B_1(\tau) {B_1}^{\top}(\tau) \Phi^{\top}(t_0, \tau) d\tau,$$

где:

- $\Phi(t, \tau)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{z} = A_1(t)z$.

5.2. Зачем нужен граммиан в данной работе

Граммиан управляемости используется одновременно для трех целей:

Проверка управляемости

Если матрица $W(t_0, t_1)$ невырождена, то система управляема на интервале $[t_0, t_1]$, то есть существует управление, переводящее систему из любого начального состояния в любое конечное.

Построение оптимального управления

В линейно-квадратичных задачах и задачах минимального времени оптимальное управление выражается явно через обратный граммиан:

$$u^*(t) = {B_1}^{\top}(t)\Phi^{\top}(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)(z_1 - \Phi(t_0, t_1)z_0 - \text{интегральные члены}).$$

Корректное учетом краевых условий

В данной реализации граммиан связывает:

- начальное состояние $z(t_0)$,
- конечное состояние $z(t_1)$,
- управление $u(t)$,
- внешнее воздействие $\mu(t)$.

Без граммиана корректная формула управления и градиентов невозможна.

5.3. Реализация вычисления граммиана в коде

5.3.1. Подготовка временной сетки

```
ts = np.linspace(t0, t1, num_points)
dt = ts[1] - ts[0]
```

Интервал времени $[t_0, t_1]$ разбивается на равномерную сетку из num_points узлов. Шаг интегрирования $dt$ используется для численного приближения интеграла.

5.3.2. Инициализация аккумулятора

```
acc = np.zeros((N_mat, N_mat))
Gram = []
```

- acc — накопитель значения интеграла,
- Gram — список частичных граммианов $W(t_0, t)$ для всех $t \in [t_0, t_1]$.

Это важно, так как далее в коде используются как полный граммиан, так и его временные срезы.

5.3.3. Численное интегрирование определения граммиана

```
for t in ts:
    Phi0t = phi_inv_eval(t)
    B1t = B1_func(t)
    acc += (Phi0t @ B1t @ B1t.T @ Phi0t.T) * dt
    Gram.append(acc.copy())
```

Эта часть реализует численное приближение интеграла:
$W(t_0, t) \approx \sum_{\tau \le t} \Phi(t_0, \tau)\, B_1(\tau) B_1{}^{\top}(\tau) \Phi^{\top}(t_0, \tau) \Delta t.$
Здесь:

- Phi0t = ϕ⁻¹(t) соответствует $\Phi(t_0, t)$,
- B1t @ B1t.T — квадратичная форма по управлению,
- накопление происходит по схеме прямоугольников.

Каждый шаг цикла добавляет вклад очередного временного узла.

5.3.4. Полный граммиан

```
W_full = Gram[-1]
```

Это значение:

$$W(t_0, t_1),$$

то есть граммиан на всем интервале управления. Он используется:

- для вычисления $W^{-1}(t_0, t_1)$,
- в формулах оптимального управления,
- в проверке достижимости конечного состояния.

5.4. Зачем нужны срезы граммиана $W(t_0, t)$,

В данной работе требуется не только полный граммиан, но и его временные срезы:

$$W(t_0, t), t \in [t_0, t_1].$$

Поэтому строится интерполяция:

```
W_funcs = [[interp1d(ts, [G[i, j] for G in Gram], ...)
```

Каждый элемент матрицы $W_{ij}(t)$ аппроксимируется линейной интерполяцией.

5.4.1. Функция $W(t_0, t)$

```
def W_slice(t):
    ...
    return M
```

Возвращает значение граммиана от начала до текущего времени: $W(t_0, t)$.

5.4.2. Остаточный граммиан $W(t, t_1)$

```
def W_remain(t):
    return W_full - W_slice(t)
```

Это реализация тождества:

$$W(t, t_1) = W(t_0, t_1) - W(t_0, t).$$

Данный объект используется при:

- декомпозиции интегралов,
- построении корректоров,
- разделении влияния прошлых и будущих интервалов.

5.5. Почему без этого блока невозможна дальнейшая оптимизация

Без граммиана невозможно:

- гарантировать управляемость системы;
- корректно связать $z(t_0)$ и $z(t_1)$;
- построить аналитические формулы для оптимального управления;
- вычислить градиенты функционала;
- реализовать минимально-временную постановку.

Граммиан — это центральный объект всей численной схемы.

5.6. Краткая формулировка

В данном блоке реализуется численное вычисление граммиана управляемости расширенной нестационарной линейной системы. Граммиан используется для анализа управляемости, построения оптимального управления, учета краевых условий и вычисления градиентов функционала. Для последующих вычислений строятся как полный граммиан на интервале $[t_0, t_1]$, так и его временные срезы $W(t_0, t_1)$ и остаточные матрицы $W(t, t_1)$.

6. Предвычисление вспомогательных матриц и интегральных корректоров

Данный блок кода реализует предвычисление всех матричных и векторных коэффициентов, входящих в формулы оптимального управления и сопряженных переменных для линейной нестационарной системы с краевыми условиями.

Его ключевая цель — вынести дорогостоящие интегральные и матричные операции из итерационного цикла оптимизации, обеспечив тем самым:

- численную устойчивость,
- вычислительную эффективность,
- строгую реализацию аналитических формул теории управления.

6.1. Математический контекст

Рассматривается расширенная система

$$\dot{z}(t) = A_1(t)z(t) + B_1(t)u(t) + \bar{\mu}(t), z(t) \in R^N,$$

с краевыми условиями

$$z(t_0) = z_0, z(t_1) = z_1.$$

Решение такой задачи в явном виде опирается на:

- фундаментальную матрицу $\Phi(t, t_0)$,
- граммиан управляемости $W(t_0, t_1)$,
- интегральные члены, обусловленные неоднородностью $\mu(t)$.

Все эти объекты входят в аналитические формулы управления и сопряженных переменных, но вычислять их на каждом шаге градиентного метода крайне неэффективно. Именно поэтому вводится этап предвычислений.

6.2. Инициализация и базовые матрицы

```
N_mat = phi_eval(t0).shape[0]
W_inv = np.linalg.inv(W_full)
Phi_t0_t1 = phi_eval(t1)
```

Здесь:

- N_mat — размерность расширенной системы $N$;
- W_inv = W(t_0,t_1)^{-1} — ключевой оператор, связывающий начальное и конечное состояния;
- Phi_t0_t1 = ₩Phi(t_1,t_0) — матрица перехода от $t_0$ к $t_1$.

Без этих матриц невозможно аналитически выразить оптимальное управление.

6.3. Интеграл от внешнего воздействия $\mu(t)$

```
I_mu = ∫ Φ^{-1}(τ) μ̄(τ) dτ
```

Реализовано как:

```
integrand = phi_inv_eval(tau) @ mu_bar_func(tau)
I_mu = trapezoid(integrand, taus, axis=0)
```

Математический смысл

Этот интеграл появляется в формуле точного решения неоднородной системы:

$$z(t_1) = \Phi(t_1, t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)\,\bar{\mu}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)\,B_1(\tau)u(\tau)d\tau.$$

В переписанном виде (через $\Phi^{-1)}$ он участвует в коррекции управления, обеспечивая компенсацию внешних сил.

Без $I_\mu$ управление было бы рассчитано так, как если бы $\mu(t) \equiv 0$, что принципиально неверно.

6.4. Матрицы $T_1(t)$, $T_2(t), M_1(t)$

```
T1t = - (B1ᵀ Φ^{-ᵀ} W⁻¹)
T2t =  (B1ᵀ Φ^{-ᵀ} W⁻¹ Φ(t₁ ))
M1t = -T2t
```

Теоретическая интерпретация

Эти матрицы реализуют аналитическую формулу оптимального управления**:**

$u^*(t) = -B_1{}^{\top}(t)\Phi^{\top}(t_0, t)W^{-1}(z_1 - \Phi(t_1, t_0)z_0 - \text{интегральные члены}).$

- $T_1(t)$ — вклад начального состояния;
- $T_2(t)$ — вклад конечного состояния;
- $M_1(t)$ — связь управления с конечным состоянием траектории.

Эти матрицы отвечают за краевую согласованность управления.

6.5. Вектор $\mu_3(t)$ — коррекция из-за неоднородности

```
mu3 = - B1ᵀ Φ^{-ᵀ} W⁻¹ I_mu
```

Смысл

Это дополнительный член в управлении, компенсирующий влияние $\mu(t)$ на всем интервале $[t_0, t_1]$.

Математически:

$$u^*(t) = \cdots - B_1{}^{\top}(t)\Phi^{\top}(,t)W^{-1}\int_{t_0}^{t_1}\Phi^{-1}\,\Phi(\tau)\bar{\mu}(\tau)d\tau.$$

Без $\mu_3(t)$ система не попадет точно в конечную точку при наличии внешних сил.

6.6. Матрицы $E_1(t)E_2(t)$: разделение влияния времени

```
E1t = Φ(t) (W - W(t)) W⁻¹
E2t = Φ(t) W(t) W⁻¹ Φ(t₁ )
```

Математический смысл

Эти матрицы реализуют разложение:

$$W(t_0, t_1) = W(t_0, t) + W(t, t_1),$$

и позволяют разделить влияние прошлых и будущих интервалов времени.
Используются для:

- построения сопряженных переменных,
- вычисления градиентов,
- оценки вклада текущего момента времени.

6.7. Частичный интеграл $J_\mu(t)$

$$J\mu(t) = \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\mu(\tau)d\tau$$

Реализован численно с высокой аккуратностью:

```
Jm = trapezoid(vals, Mu_ts[:K], axis=0)
```

Этот интеграл описывает накопленное влияние внешнего воздействия до текущего момента времени. Он используется в выражении для траектории и сопряженной переменной.

6.8. Вектор $\mu_4(t)$

$$mu4(t) = J\mu(t) - E2(t)\, I\mu$$

Это корректирующий член, обеспечивающий:

- точное выполнение динамики,
- согласование интегралов по времени.

6.9. Матрица $M_2(t)$

$$M2(t) = -\Phi(t)\, W(t)\, W^{-1}\, \Phi(t_1\ )$$

Она описывает вклад конечного состояния траектории в текущую динамику и используется при формировании выражений для состояния и сопряженных величин.

6.10. Этот блок принципиально необходим. Без данного блока невозможно:

1. Реализовать аналитическую формулу оптимального управления;
2. Учесть неоднородность системы;
3. Обеспечить точное выполнение краевых условий;
4. Сделать градиентный метод устойчивым и быстрым;
5. Отделить теорию от численной реализации.

Этот блок — численный эквивалент всей аналитической части теории управления, перенесенный в код.

6.11. Итоговая формулировка

В данном разделе реализуется предвычисление вспомогательных матриц и интегральных корректоров, входящих в аналитические формулы оптимального

управления линейной нестационарной системой с краевыми условиями. Эти величины выражаются через фундаментальную матрицу, граммиан управляемости и интегралы от внешнего воздействия. Предварительное вычисление указанных объектов позволяет существенно повысить вычислительную эффективность и численную устойчивость последующего градиентного алгоритма оптимизации.

7. Градиентный метод решения задачи оптимального управления при фиксированном времени $t_1$

В данном разделе реализуется численный алгоритм решения краевой задачи оптимального управления при фиксированном конечном времени $t_1$. Алгоритм основан на проекционном градиентном методе в функциональном пространстве, где оптимизируемыми переменными являются управление и вспомогательные траектории.

7.1. Роль данного блока в общей схеме

Этот блок является сердцем всей численной процедуры. Все предыдущие этапы (фундаментальная матрица, граммиан, вспомогательные операторы) подготавливают аналитические коэффициенты.

Именно здесь:

- решается прямая задача для текущего управления,
- вычисляется функционал ошибки,
- выполняется итерационное улучшение управления,
- проверяется достижимость конечного состояния.

Без этого блока код ничего не оптимизирует, а лишь вычисляет вспомогательные матрицы.

7.2. Фиксация временного интервала и дискретизация

```
t0 = 0.0
N_time = 200
ts = np.linspace(t0, t1, N_time)
```

Интервал $[t_0, t_1]$. фиксируется, так как задача минимального времени решается внешним циклом (бисекцией). Здесь же решается внутренняя задача: при данном $t_1$ подобрать управление, переводящее систему из $x_0$ в $x_1$.

Временная сетка используется:

- для дискретизации управлений,
- для численного интегрирования,
- для вычисления функционала.

7.3. Начальные приближения (инициализация)

```
u = 0.5 * np.sin(2 * ts)
v = 0.3 * np.cos(ts)
p = np.vstack([0.2 * ts, 0.2 * ts])
```

Задаются начальные догадки для оптимизируемых функций:

- $u(t)$ — основное управление,

- $v(t)$ — вспомогательное управление расширенной системы,
- $p(t)$ — вспомогательная траектория (аналог сопряженной или корректирующей функции).

Выбор гладких начальных приближений улучшает сходимость градиентного метода.

7.4. Копии начального и конечного состояния

```
x0n = x0.copy()
x1n = x1.copy()
d = 1e-6 * np.ones((m2,))
```

- $x_0^n, x_1^n$ — итерационные оценки краевых условий,
- $d$ — малый регуляризирующий параметр для дополнительной переменной.

Это позволяет мягко корректировать краевые условия в ходе итераций, избегая численной неустойчивости.

7.5. Проекционные операторы (ограничения)

```
P_U, P_V1, P_V2, P_L, P_S, P_D
```

Этот блок реализует проекционный градиентный метод, то есть оптимизацию с ограничениями.

7.5.1. Ограничения на управление

$$| u(t) | \leq 1$$

```
P_U = lambda u: np.clip(u, -1, 1)
```

Физический смысл: ограниченная мощность управления.

7.5.2. Ограничения на вспомогательные траектории

```
P_V1, P_V2
```

Ограничивают компоненты $p(t)$, предотвращая их неограниченный рост.

7.5.3. Ограничение нормы

```
P_L, P_S
```

Используются для:

- стабилизации итераций,
- предотвращения «взрыва» градиентного метода.

7.5.4. Регуляризация

P_D

Ограничивает малую добавочную переменную $d$, обеспечивая устойчивость расширенной системы.

7.6. Предвычисленные аналитические коэффициенты

```
phi, phi_inv = build_fundamental_matrix(...)
Wf, Ws = compute_gramian(...)
aux = build_aux_on_grid(...)
```

Здесь используются результаты предыдущих блоков:

- фундаментальная матрица,
- граммиан,
- аналитические коэффициенты $T_1, T_2, M_1, E_1, E_2, \mu_3, \mu_4, M_2$.

Это позволяет использовать аналитические формулы управления, а не численные аппроксимации.

7.7. Решение прямой задачи (forward problem)

```
def solve_state(vv):
    solve_ivp(...)
```

Для текущего управления $v(t)$ решается расширенная система:

$$\dot{z}(t) = A_1(t)z(t) + B_1(t)v(t) + \bar{\mu}(t), z(t_0) = z_0.$$

Результат:

- $Z(t) \in R^3$ — расширенное состояние,
- $X(t) = Z_{1:2}(t)$ — физическое состояние системы.

Это прямая задача, без нее невозможно оценить качество управления.

7.8. Вычисление аналитического управления и траектории

Внутренний цикл по времени:

```
w1[i] = ...
Y[:, i] = ...
```

7.8.1. Управление $w_1(t)$

Это реализация аналитической формулы оптимального управления, зависящей от:

- начального состояния,
- конечного состояния,
- интегралов от $\mu(t)$,
- текущей траектории.

Фактически:

$$w_1(t) \approx u^*(t)$$

7.8.2. Вспомогательная траектория $Y(t)$

Используется для:

- согласования состояния,
- построения функционала,
- вычисления градиента.

7.9. Функционал ошибки

```
du = w1 - u
dp1 = p[0] - Y[0]
dp2 = p[1] - Y[1]
```

Функционал:

$$J = \int_0^{t_1} (|\, u - w_1 \,|^2 + |\, p - Y \,|^2)\, dt$$

Реализован покомпонентно и сохраняется в Fhist.

Минимизация этого функционала эквивалентна выполнению условий оптимальности.

7.10. Критерий остановки

```
grad_norm < tol
```

Останавливает итерации, когда:

- управление и аналитическая формула согласованы,
- вспомогательные траектории стабилизировались.

7.11. Градиентный шаг с проекцией

```
u = P_U(u - alpha * du)
v = P_L(v - alpha * 2 * du)
p = ...
```

Это стандартный шаг:

$$\theta^{k+1} = P(\theta^k - \alpha \nabla J(\theta^k)),$$

где $P$ — оператор проекции.

Метод гарантирует:

- убывание функционала,
- выполнение ограничений,
- численную устойчивость.

7.12. Проверка достижения цели

```
err = np.linalg.norm(X[:, -1] - x1)
```

Финальная ошибка:

$$\| x(t_1) - x_1 \|$$

Используется:

- как критерий успеха при фиксированном $t_1$,
- во внешнем алгоритме поиска минимального времени.

7.13. Зачем этот блок необходим (кратко)

Без блока 7 невозможно:

1. Найти управление при заданном $t_1$
2. Реализовать условия оптимальности;
3. Проверить достижимость конечного состояния;
4. Использовать граммиан на практике;
5. Решить задачу минимального времени.

Этот блок — численная реализация всей теории оптимального управления.

7.14. Формулировка для диссертации (готовый абзац)

В данном разделе реализуется проекционный градиентный метод решения краевой задачи оптимального управления для расширенной линейной нестационарной системы при фиксированном конечном времени. Алгоритм основан на последовательном решении прямой задачи, вычислении функционала несогласованности и итерационном уточнении управлений с учетом аналитических формул, полученных через фундаментальную матрицу и граммиан управляемости. Использование проекций обеспечивает выполнение ограничений и численную устойчивость метода.

8. Поиск минимального времени управления методом бисекции

В данном разделе реализуется алгоритм численного определения минимального времени $t_1^*$, за которое линейная нестационарная управляемая система может быть переведена из заданного начального состояния $x_0$ в заданное конечное состояние $x_1$.

8.1. Постановка задачи минимального времени

Рассматривается задача оптимального управления вида:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \mu(t),$$

$$x(0) = x_0, x(t_1) = x_1,$$

$$| u(t) | \leq u_{max},$$

где требуется минимизировать время $t_1$, за которое выполняются краевые условия.

В теоретическом виде задача минимального времени является существенно нелинейной и неразглаженной, поэтому на практике она сводится к серии задач с фиксированным $t_1$.

8.2. Идея численного подхода

Основная идея состоит в следующем:

1. Зафиксировать значение $t_1$;
2. Решить задачу оптимального управления при этом $t_1$ (блок 7);
3. Проверить, возможно ли достичь конечного состояния с заданной точностью;
4. Изменить $t_1$ и повторить процедуру.

Ключевое наблюдение: множество допустимых $t_1$ обладает свойством монотонности:

- если достижение $x_1$ возможно за время $t_1$,
- то оно возможно и за любое большее время.

Это свойство позволяет применять метод бисекции.

8.3. Описание алгоритма бисекции

8.3.1. Задание функции достижимости

```
f = lambda t: solve_fixed_t1(t, x0, x1)
```

Функция f(t):

- решает задачу управления при фиксированном $t_1 = t$;
- возвращает величину ошибки:

Таким образом, служит индикатором достижимости.

8.3.2. Начальный интервал поиска

```
l, r = low, high
```

Задается начальный интервал $[t_{min}, t_{max}]$, внутри которого гарантированно лежит оптимальное время.

- $t_{min}$ — заведомо малое время (недостижимо),
- $t_{max}$ — достаточно большое время (достижимо).

8.3.3. Итерационный процесс

```
while r - l > tol:
```

Алгоритм продолжается, пока длина интервала превышает заданную точность tol.

8.3.4. Выбор середины интервала

```
m = (l + r) / 2
sol = f(m)
```

Вычисляется среднее значение $m$ и решается задача управления для $t_1 = m$.

8.3.5. Логика обновления интервала

```
if sol['err'] < 1e-2:
    r = m
else:
    l = m
```

- Если конечное состояние достигается с допустимой точностью, значит $m$ избыточно, и верхняя граница сдвигается влево;
- Если нет — значит времени недостаточно, и нижняя граница увеличивается.

Таким образом, интервал монотонно сжимается к оптимальному времени.

8.3.6. Возврат результата

```
return (l + r) / 2
```

Итоговое значение принимается как приближение минимального времени управления:

$$t_1^* \approx \frac{l+r}{2}.$$

8.4. Почему выбран именно метод бисекции

Метод бисекции обладает рядом важных преимуществ:

1. Гарантированная сходимость при монотонности;
2. Нечувствительность к форме функции ошибки;
3. Не требует вычисления производных;
4. Устойчив к шуму численного решения;
5. Прост в реализации и анализе.

В задачах минимального времени это особенно важно, поскольку функционал не является гладким.

8.5. Связь с теорией оптимального управления

С точки зрения теории:

- данный алгоритм реализует численное приближение к условию трансверсальности;
- поиск $t_1^*$ соответствует нахождению момента, когда система становится управляемой с заданной точностью;
- метод заменяет сложное решение вариационной задачи на устойчивую численную процедуру.

8.6. Почему без этого блока задача не решается

Без блока бисекции:

- возможно найти управление только для заданного времени;
- нельзя определить минимальность времени;
- задача превращается в обычную задачу с фиксированным горизонтом.

Именно этот блок делает задачу задачей минимального времени, а не просто задачей управления.

8.7. Готовая формулировка

Для численного решения задачи минимального времени управление строится для фиксированных значений конечного времени, а затем реализуется поиск минимального допустимого времени методом бисекции. На каждом шаге решается краевая задача оптимального управления, после чего анализируется достижимость конечного состояния. Использование метода бисекции обеспечивает устойчивую и гарантированную сходимость алгоритма при минимальных вычислительных затратах.

9. Main по шагам

```
x0 = np.array([1, 1])
x1 = np.array([-1, -1])
```

- x0 — начальное состояние системы $x(0)$
- x1 — целевое конечное состояние $x(t_1)$

То есть задача: перевести систему из $(1,1)$ в $(-1,-1)$.

```
t_opt = find_t1(x0, x1)
```

Это поиск минимального времени $t^*$ (блок 8, бисекция):

- пробует разные $t_1$,
- внутри каждый раз решает задачу управления (блок 7),
- сужает интервал, пока не найдет минимальное $t_1$, при котором ошибка мала.

```
sol = solve_fixed_t1(t_opt, x0, x1)
```

Теперь, когда $t^*$ найдено, код еще раз решает задачу управления уже для оптимального времени, чтобы получить:

- траекторию состояния `sol['x']`,
- историю функционала/ошибки `sol['F']`,
- число итераций `sol['iters']`,
- финальную ошибку `sol['err']`.

```
print(f"t*={t_opt:.3f}, err={sol['err']:.2e}, iters={sol['iters']}")
```

- t* — найденное минимальное время,
- err — насколько близко подошли к цели $\| x(t^*) - x_1 \|$,
- iters — сколько итераций градиентного метода потребовалось.

9.2. Первый график: траектория состояния $x_1(t), x_2(t)$

```
plt.plot(sol['t'], sol['x'][0], label='x1')
plt.plot(sol['t'], sol['x'][1], label='x2')
plt.legend()
plt.show()
```

Это временные зависимости компонент состояния:

- по оси $t$: время от 0 до $t^*$,
- по оси $y$: значения $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

sol['x'][0] — первая компонента $x_1(t)$
sol['x'][1] — вторая компонента $x_2(t)$

Этот график отвечает на вопросы:

1. Как именно система движется во времени, пока мы ее «управляем».
2. Стабильна ли траектория (нет ли взрывного роста, разрывов, резких скачков).
3. Достигается ли целевое состояние: в конце графика значения должны быть близки к $-1$ и $-1$.

То есть это основная «физическая» визуализация результата управления.

9.3. Второй график: тепловая карта истории функционала $F$

```
plt.imshow(sol['F'][:sol['iters']],
           origin='upper',
           aspect='auto',
           extent=[sol['t'][0], sol['t'][-1], sol['iters'], 0],
           cmap='hot')
plt.colorbar()
plt.show()
```

Хранится в sol['F']
sol['F'] — это матрица размера примерно:

$$(\text{итерации}) \times (\text{время})$$

То есть для каждой итерации $k$ и каждого момента времени $t_i$ хранится величина:

$$F_k(t_i) = (du)^2 + (dp1)^2 + (dp2)^2$$

где:

- $du = w_1 - u$ — несогласованность управления,
- $dp = p - Y$ — несогласованность вспомогательных траекторий.

Проще:
это «локальная ошибка условий оптимальности» по времени на каждой итерации.

Показывает imshow (тепловая карта)
imshow рисует картинку, где:

- по горизонтали — время $t$,
- по вертикали — номер итерации градиентного метода,
- цвет — величина ошибки $F$:
  - светлее/ярче = больше ошибка,
  - темнее = меньше ошибка (приближение к оптимуму).

Параметры:

- origin='upper' — первая итерация сверху
- aspect='auto' — автоматически растягивает изображение
- extent=[t0, t1, iters, 0] — подписывает оси:
  - $t$ слева направо,
  - итерации сверху вниз (поэтому iters,0)
- cmap='hot' — цветовая схема «горячая»

Тепловая карта нужна (важно для диссертации)

1. Сходится ли метод вообще: ошибка должна в среднем уменьшаться по итерациям.
2. Где по времени ошибка держится дольше всего:
   - иногда контроль «труднее» в начале,
   - иногда ближе к $t_1$.
3. Есть ли проблемы/нестабильность:
   - если яркие полосы не исчезают,
   - если ошибка скачет или растет.

То есть это не «физический» график системы, а диагностика качества оптимизации.

9.4. Итог: что дают два графика вместе

- График 1 (x1(t), x2(t)) — показывает результат управления: как система дошла до цели.
- График 2 (imshow F) — показывает процесс оптимизации: как алгоритм учился/сходился.

Первый график демонстрирует траекторию управляемого состояния, подтверждая достижение целевого состояния. Второй график отражает динамику уменьшения функционала несогласованности по итерациям и времени, что позволяет оценить сходимость алгоритма и локализацию остаточной ошибки.

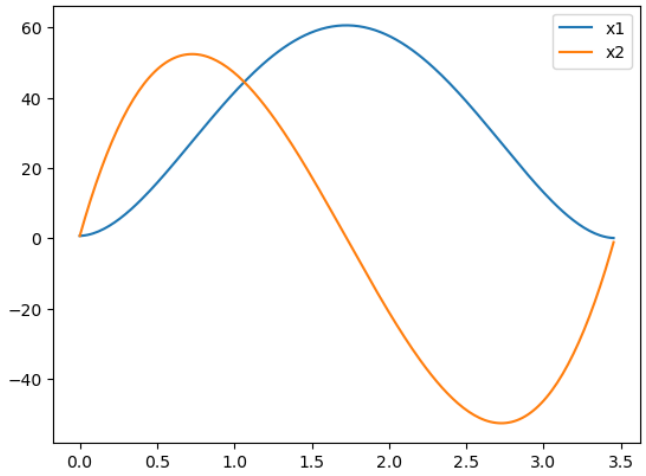



Рисунок 1.1 — Траектории переменных состояния $x_1(t)$ и $x_2(t)$ во времени.

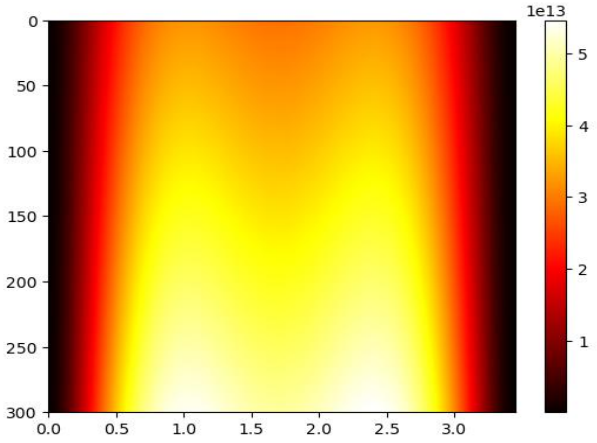



Рисунок 1.2 — Поверхность значений функционала невязки $F(t)$ в процессе итераций градиентного метода.

## Основные выводы по первой части

В первой части диссертации исследуются задачи управляемости и оптимального быстродействия линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с фазовыми и интегральными ограничениями. Особое внимание уделено конструктивным методам решения указанных задач, их проверке на модельных примерах и программной реализации.

Показано, что результаты первой части не ограничиваются теоретическим анализом, а обеспечивают переход от математической постановки задачи к вычислительному эксперименту. На модельном примере продемонстрирована работоспособность разработанных методов, а их программная реализация на языке Python подтверждает применимость полученных результатов для решения практических задач оптимального управления динамическими системами.

# 2 УПРАВЛЯЕМОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИИ

## 2.1 Методы исследования

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)\ f(x,u,t),\ t \in I = [t_0, t_1], \tag{2.1.1}$$

с краевыми условиями

$$x(t_0) = x_0 \in R^n,\ \ x(t_1) = x_1 \in R^n, \tag{2.1.2}$$

при наличии ограничений на значения управления

$$u(t) \in U(t) = \{u(t) \in L_2(I, R^{m_1}) | u(t) \in V(t) \subset R^{m_1} \text{ почти всюду } t \in I\} \tag{2.1.3}$$

Здесь $A(t),\ B(t)$ – матрицы с кусочно-непрерывными элементами порядков $n \times n,\ n \times m$ соответственно, вектор функция $f(x,\ u,\ t)$ – непрерывна по совокупности переменных при всех $(x,\ u,\ t) \in R^n \times R^{m_1} \times I,$ удовлетворяет условиям

$$|f(x,\ u,\ t) - f(y,\ u,\ t)| \le l(t)|x - y|,\ \ \forall (x,u,t),\ (y,\ u,\ t) \in R^n \times R^{m_1} \times I, \tag{2.1.4}$$

$$|f(x,\ u,\ t)| \le c_0(|x| + |u|^2) + c_1(t),\ \ t \in I, \tag{2.1.5}$$

$$l(t) > 0,\ \ l(t) \in L_1(I,\ R^1),\ \ c_0 = const > 0,\ \ c_1(t) \ge 0,\ \ c_1(t) \in L_2\,(I,\ R^1). \tag{2.1.6}$$

Из (2.1.4) – (2.1.6) следует, что дифференциальное уравнение (2.1.1) при заданном начальном условии $x(t_0) = x_0,$ для любого фиксированного управления $u(t) \in L_2(I, R^{m_1}),$ имеет единственное решение. Полагаем, что $U(t),\ t \in I$ – заданное ограниченное выпуклое замкнутое множество в $L_2(I,\ R^{m_1})$. В частности, если $A(t) \equiv 0,\ B(t) = I_n,\ I_n$ – единичная матрица порядка $n \times n$, то уравнение (2.1.1) имеет вид $\dot{x} = f(x,\ u,\ t)$.

**Определение.** *Система (2.1.1) – (2.1.3) называется управляемой, если существует управление* $u(t) \in U(t)$, *которое переводит решение дифференциального уравнения (2.1.1) из начального состояния* $x_0 = x(t_0)$ *в момент времени* $t_0$ *в состояние* $x_1 = x(t_1)$ *в момент времени* $t_1$.

Наряду с системой (2.1.1) – (2.1.3) рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)\ w(t), \quad t \in I = [t_0, t_1], \tag{2.1.7}$$

$$y(t_0) = x_0 \in R^n,\ y(t_1) = x_1 \in R^n, \tag{2.1.8}$$

$$w(t) \in L_2(I,\ R^m). \tag{2.1.9}$$

Решаются следующие задачи:

**Задача 2.1.1**. *Найти все множества управлений* $\Lambda(t) \subset L_2(I,\ R^m)$, *каждый элемент множества* $\Lambda(t)$ *функция* $w(t) \in \Lambda(t)$ *переводит решение дифференциального уравнения (2.1.7) при условиях (2.1.8), (2.1.9) из начальной точки* $x_0 = y(t_0)$ *в точку* $x_1 = y(t_1)$.

**Задача 2.1.2**. *Найти управление* $u(t) \in \Lambda(t)$, *которое переводит траекторию системы (2.1.1) – (2.1.3) из начального состояния* $x_0 = x(t_0)$ *в момент времени* $t_0$, *в состояние* $x_1 = x(t_1)$ *в моменттвремени* $t_1$.

**Задача 2.1.3.** *(Оптимальное быстродействие). Найти управление* $u(t) \in U(t) \subset L_2(I,\ R^m)$, *которое переводит траекторию системы (2.1.1) – (2.1.3) из точки* $x_0 = x(t_0)$ *в точку* $x_1 = x(t_1)$ *за кратчайшее время, где* $t_0$ *– фиксировано,* $t_1$ *– не фиксировано.*

Задача оптимального быстродействия запишется в виде

$$J(x,\ u,\ t_1) = \int_{t_0}^{t_1} 1 \cdot dt = t_1 - t_0\ \to inf$$

при условиях (2.1.1) – (2.1.3).

## 2.2 Первый метод. Линейная управляемая система

Рассмотрим решение задачи 2.1.1.

Решение дифференциального уравнения (2.1.7) имеет вид

$$y(t) = \Phi(t, t_0)\ x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi\,(t, \tau)B(\tau)w(\tau)d\tau, \quad t \in I, \tag{2.2.1}$$

где $\Phi(t,\ \tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, $\theta(t)$ – фундаментальная матрица решений линейного однородного уравнения $\dot{\xi} = A(t)\xi$. Заметим, что матрица $\theta(t),\ \ t \in I$ порядка $n \times n$ является решением матричного уравнения $\dot{\theta}(t) = A(t)\ \theta(t),\ \ \theta(t_0) = I_n$, где $I_n$ – единичная матрица порядка $n \times n$. Из (2.2.1) при $t \in t_1$, с учетом того, $y(t_1) = x_0$, получим

$$y(t_1) = x_1 = \Phi(t_1, t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi\ (t_1, t)\, B(t)\, w(t) dt.$$

Тогда

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi\ (t_1, t)\, B(t)\, w(t) dt = x_1 - \Phi(t_1, t_0)\, x_0.$$

Отсюда с учетом того, что $\Phi(t_1, t) = \Phi(t_1, t_0)\ \Phi(t_0, t),\ \ \Phi^{-1}(t_1, t_0) = \Phi(t_0, t_1)$, имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi\ (t_0, t)\, B(t)\, w(t)\, dt = \Phi\ (t_0, t_1) x_1 - x_0. \qquad (2.2.2)$$

Обозначим

$$K(t) = \Phi(t_0, t) B(t),\ \ a = \Phi(t_0, t_1) x_1 - x_0,\ \ t \in I,\ \ a \in R^n. \qquad (2.2.3)$$

Из (2.2.2) следует, что управление $w(t) \in L_2(I,\ R^m)$ переводит траекторию системы (2.1.7) – (2.1.9) из любой точки $x_0$ в любую точку $x_1$, когда $u(t)$ является решением интегрального уравнения (2.1.2). Следующая теорема определяет необходимое и достаточное условия разрешимости интегрального уравнения (2.2.2) для любого вектора $a \in R^n$ из (2.1.3).

**Теорема 2.2.1.** (Теорема Р.Е. Калмана [1]) *Интегральное уравнение (2.2.2) имеет решения для любого вектора $a \in R^n$ тогда и только тогда, когда матрица*

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi\ (t_0, t)\ B(t)\ B^*(t)\ \Phi^*(t_0, t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} K\ (t)\ K^*(t) dt, \qquad (2.2.4)$$

*порядка $n \times n$ является положительно определенной, где $(*)$ – знак транспонирования.*

Доказательство теоремы 2.1.1. можно найти в работе [1]. Следующие две теоремы являются новыми результатами в теории управляемости линейных систем.

**Теорема 2.2.2.** *Пусть матрица $W(t_0, t_1)$ определяемая по формуле (2.2.4) является положительно определенной. Тогда общее решение интегрального уравнения (2.2.2) при любом $a \in R^n$ определяется по формуле*

$$w(t) = v(t) + \lambda_1(t,\ x_0,\ x_1) + N_1(t)\ z(t_1,\ v) \in L_2(I, R^m), \qquad (2.2.5)$$

*где $v(t) \in L_2(I,\ R^m)$ – любая функция. Функция $z(t) = z(t,\ v),\ \ t \in I$ – решение дифференциального уравнения*

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)\ v(t),\ \ \ z(t_0) = 0,\ \ \ v(t) \in L_2(I, R^m), \qquad (2.2.6)$$

*где*

$$\lambda_1(t,\ x_0,\ x_1) = B^*(t)\ \Phi^*(t_0, t)\ W^{-1}(t_0, t_1)\ a,\ \ \ N_1(t) =$$

$$-B^*(t)\ \Phi^*(t_0, t)\ W^{-1}(t_0, t_1)\ \Phi(t_0, t_1),\ \ t \in I, \qquad (2.2.7)$$

**Доказательство.** Введем следующие множества

$$W = \{w\,(t) \in L_2(I, R^m) |\ \textstyle\int_{t_0}^{t_1} K\,(t)\ w(t)\,dt = a\}, \qquad (2.2.8)$$

$$\Lambda = \{w(t) \in L_2(I, R^m) | w(t) = v(t) + \lambda_1(t,\ x_0,\ x_1) + N_1(t)\ z(t_1, v),$$

$$v(t) \in L_2(I, R^m) - \text{любая функция}\}. \qquad (2.2.9)$$

Множество $W$ содержит все решения интегрального уравнения (2.2.2) при $W(t_0, t_1) > 0$. Теорема утверждает, что функция $w(t) \in L_2(I,\ R^m)$ принадлежит множеству $W$ тогда и только тогда, когда она принадлежит множеству $\Lambda$. Докажем, что $W = \Lambda$. Для этого достаточно доказать, что $\Lambda \subset W,\ \ W \subset \Lambda$.

Покажем, что $U \subset W$. В самом деле, если $w(t) \in U$, то как следует из (2.2.9) верно равенство

$$\int_{t_0}^{t_1} K\,(t)\,w(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} K\,(t)\,[v(t) + \lambda_1(t,\ x_0,\ x_1) + N_1(t)\ z(t_1,\ v)]dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} K\,(t)\ v(t)dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} K\,(t)\;\lambda_1(t,\;x_0,\;x_1)dt+\int_{t_0}^{t_1} K\,(t)\;N_1(t)dt\;z(t_1,\;v)=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1} K\,(t)\;v(t)d+\int_{t_0}^{t_1} K\,(t)\,B^*(t)\Phi^*(t_0,t)dt\;W^{-1}(t_0,t_1)\,a+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} K\,(t)\,[-B^*(t)\;\Phi^*(t_0,t)]dt\;W^{-1}(t_0,t_1)\;\Phi(t_0,t_1)\;z(t_1,\;v).$$

Отсюда с учетом того, что решение дифференциального уравнения (2.2.7) имеет вид

$$z(t)=\Phi(t,t_0)\;z(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi\,(t,\tau)\;B(\tau)\;v(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t}\Phi\,(t,\tau)\;B(\tau)\;v(\tau)d\tau,$$

получим $\big(K(t)=\Phi(t_0,t)\;B(t)\big)$

$$\int_{t_0}^{t_1} K\,(t)\;w(t)dt=\int_{t_0}^{t_1}\Phi\,(t_0,t)\,B(t)\;v(t)\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\Phi\,(t_0,t)\;B(t)\;B^*(t)\;\Phi^*(t_0,t)dt\;W^{-1}(t_0,t_1)\;a\;-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\Phi\,(t_0,t)\;B(t)\;B^*(t)\Phi^*(t_0,t)dt\;W^{-1}(t_0,t_1)\;\Phi(t_0,t_1)\;\Phi(t_1,t_0)\times$$

$$\times\int_{t_0}^{t_1}\Phi\,(t_0,t)\;B(t)\;v(t)\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\Phi\,(t_0,t)\;B(t)\;v(t)\,dt+a-\int_{t_0}^{t_1}\Phi\,(t_0,t)\;B(t)\;v(t)\,dt=a.$$

Следовательно, $w(t)\in W,\;\;\Lambda\subset W.$

Покажем, что $W\subset\Lambda$. Пусть $w_*(\tau)\in W$. Тогда как следует из (2.1.2) выполнено равенство

$$\int_{t_0}^{t_1} K\,(t)\;w_*(t)dt=a.$$

Заметим, что в соотношении (2.2.5) функция $v(t) \in L_2(I,\ R^m)$ произвольная. В частности, можно выбрать $v(t) = w_*(\tau),\ \ t \in I$. Теперь функция $w(t) \in U$ запишется в виде.

$$w(t) = v(t) + \lambda_1(t,\ x_0,\ x_1) + N_1(t)\ z(t_1,\ v) =$$

$$= w_*(t) + B^*(t)\,\Phi^*(t_0,t)\,W^{-1}(t_0,t_1)a - B^*(t)\ \Phi^*(t_0,t) \times$$

$$\times\ W^{-1}(t_0,t_1)\ \Phi(t_0,t_1)\ \Phi(t_1,t_0)\ \int_{t_0}^{t} \Phi\,(t_0,t)\,B(t)\ w_*(t)dt = w_*(t) +$$

$$+B^*(t)\,\Phi^*(t_0,t)\ W^{-1}(t_0,t_1)\,a - B^*(t)\ \Phi^*(t_0,t)\ W^{-1}(t_0,t_1)a\ \ = w_*(t) \in U.$$

Следовательно, $w_*(\tau) = w(\tau) \in \Lambda$. Отсюда следует, что $W \subset \Lambda$. Из включений $\Lambda \subset W$ и $W \subset \Lambda$ следует, что $\Lambda = W$. Теорема доказана.

Из (2.2.5) – (2.2.9) следует, что все множества управлений, каждый элемент которого переводит траекторию системы (2.1.7) – (2.1.10) из точки $x_0$ в точку $x_1$, определяется по формуле (2.2.9).

Основные свойства решений интегрального уравнения (2.2.2):

1. Функция $w(t) \in \Lambda$ может быть представлена в виде $w(t) = w_1(t) + w_2(t)$, где $w_1(t) = K^*(t)W^{-1}(t_0,t_1)a$ – частное решение интегрального уравнения (2.2.2),

$$w_2(t) = v(t) - K^*(t)W^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1} K\,(\eta)\,v(\eta)\,d\eta,\ \ t \in I$$

решение однородного интегрального уравнения.

$$\int_{t_0}^{t_1} K\,(t)\ w_2(t)dt = 0.$$

В самом деле

$$\int_{t_0}^{t_1} K\,(t)\ w_1(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} K\,(t)\ K^*(t)\ W^{-1}(t_0,t_1)\,a = a,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} K\,(t)\;w_2(t)dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} K\,(t)\;v(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} K\,(t)\;K^*(t)W^{-1}(t_0,t_1)\;\int_{t_0}^{t_1} K\,(\eta)\;v(\eta)d\eta$$

$$= 0.$$

2. Функции $w_1(t) \in L_2(I,\ R^m)$, $w_2(t) \in L_2(I,\ R^m)$ ортогональны в $L_2$, $w_1 \perp w_2$. Действительно,

$$\langle w_1,\ w_2\rangle_{L_2} = \int_{t_0}^{t_1} w_1^*\,(t)\;w_2(t)dt = a^*\,W^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1} K\,(t)\;v(t)dt -$$

$$-a^*\,W^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1} K\,(t)K^*(t)W^{-1}(t_0,t_1)\;\int_{t_0}^{t_1} K\,(\eta)\;v(\eta)d\eta = 0.$$

3. Функция $w_1(t) = K^*(t)W^{-1}(t_0,t_1)a,\ \ t \in I$ – решение интегрального уравнения (2.2.2) с минимальной нормой в $L_2(I,\ R^m)$. В самом деле, $\| w \|^2 \geq \| w_1 \|^2 + \| w_2 \|^2$, в силу $w_1 \perp w_2$. Отсюда следует, что $\| w \|^2 \geq \| w_1 \|^2$. Если функция $(t) \equiv 0,\ t \in I$, то функция $w_2(t) \equiv 0,\ t \in I$. Тогда $\| w \| = \| w_1 \|$, $w(t) = w_1(t),\ t \in I$.

4. Множество решений интегрального уравнения (2.2.2) является выпуклым. Так как $w(t) \in \Lambda$, $\Lambda$ – выпуклое множество.

**Теорема 2.2.3**. *Пусть матрица* $W(t_0,t_1) > 0$. *Тогда решение дифференциального уравнения (2.1.8) соответствующее управлению* $w(t) \in \Lambda$ *определяется по формуле*

$$y(t) = z(t,\ v) + \lambda_2(t,\ x_0,\ x_1) + N_2(t)z(t_1,\ v),\ \ t \in I,\ \ \forall v,\ \ v(t) \in L_2(I,R^m), \qquad (2.2.10)$$

*где*

$$\lambda_2(t,\ x_0,\ x_1) = \Phi(t,t_0)\,W(t,t_1)\,W^{-1}(t_0,t_1)x_0 +$$

$$+\Phi(t,t_0)W(t_0,t)\,W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)x_1$$

$$N_2(t) = -\Phi(t,t_0)\,W(t_0,t)\,W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),\ \ t \in I,$$

$$W(t_0,t)=\int_{t_0}^{t}K\,(\tau)\,K^*(\tau)d\tau,\;\; W(t,t_1)=\int_{t}^{t_1}K\,(\tau)\,K^*(\tau)d\tau,\;\; t\in I. \qquad (2.2.11)$$

**Доказательство**. Пусть управление определяется по формуле (2.2.5). Тогда функция

$$y(t)=\Phi(t,t_0)\;x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi\,(t,\tau)\;B(\tau)[v(\tau)+\lambda_1(\tau,\;x_0,\;x_1)+N_1(\tau)\;z(t_1,\;v)]d\tau=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\Phi\,(t,\tau)\;B(\tau)\;v(\tau)\;d\tau+\Phi(t,t_0)\;x_0+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\Phi\,(t,\tau)\;B(\tau)\;B^*(\tau)\;\Phi^*(t_0,\tau)\,d\tau\;\;W^{-1}(t_0,t_1),$$

$$[\Phi(t_1,t_0)x_1-x_0]-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\Phi\,(t,\tau)\;B(\tau)\;B^*(\tau)\;\Phi^*(t_0,\tau)\,d\tau\;\;W^{-1}(t_0,t_1)\;\Phi(t_1,t_0)\;z(t_1,\;v).$$

Отсюда с учетом того, что

$$W(t_0,t)=\int_{t_0}^{t}K\,(\tau)\,K^*(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t}\Phi\,(t_0,\tau)\,B(\tau)\;B^*(\tau)\;\Phi^*(t_0,\tau)d\tau,$$

$$W(t,t_1)=W(t_0,t_1)-W(t_0,t),$$

получим

$$y(t)=z(t,\;v)+[\Phi(t,t_0)-\Phi(t,t_0)\;W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)]\;x_0+$$

$$+\Phi(t,t_0)\;W(t_0,t)\;W^{-1}(t_0,t_1)\;\Phi(t_1,t_0)\;x_1-$$

$$-\Phi(t,t_0)\;W(t_0,t)\;W^{-1}(t_0,t_1)\;\Phi(t_1,t_0)\;z(t_1,\;v)=$$

$$=z(t,\;v)+\Phi(t,t_0)\;W(t,t_1)\;W^{-1}(t_0,t_1)\;x_0+$$

$$+\Phi(t,t_0)\ W(t_0,t)\ W^{-1}(t_0,t_1)\ \Phi(t_0,t_1)\,x_1 -$$

$$-\Phi(t,t_0)\,W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\ \Phi(t_0,t_1)z(t_1,\ v) =$$

$$= z(t,\ v) + \lambda_2(t,\ x_0,\ x_1) + N_2(t)z(t_1,\ v),$$

где $\lambda_2(t,\ x_0,\ x_1),\ N_2(t),\ t \in I$, из (2.2.11). Теорема доказана.

## 2.3 Управляемость нелинейной системы

Рассмотрим решение задачи 2.1.2.

Сравнивая систем (2.1.1) – (2.1.3) и (2.1.7) – (2.1.9) легко убедиться в том, что она совпадают при замене функции $w(t)$ на $f(x,\ u,\ t)$. Это приводит к рассмотрению следующей оптимизационной задачи: минимизировать функционал

$$J(v,u) = \int_{t_0}^{t_1} |v(t) + \lambda_1(t,\ x_0,\ x_1) + N_1(t)z(t_1,v) - f(y(t),u(t),t)|^2\,dt \to inf, \tag{2.3.1}$$

при ограничениях

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)v(t), \quad z(t_0) = 0, \quad t \in I = [t_0,t_1], \tag{2.3.2}$$

$$v(t) \in L_2(I,R^m),\ u(t) \in U(t) \subset L_2(I,R^{m_1}), \tag{2.3.3}$$

где функция $y(t),\ t \in I$ определяется по формуле (2.2.9).

**Теорема 2.3.1**. *Пусть матрица* $W(t_0,t_1) > 0$. *Тогда система (2.1.1) – (2.1.3) управляема тогда и только тогда, когда значение* $J(v_*,u_*) = 0$, *где пара* $\big(v_*(t),u_*(t)\big) \in L_2(I,R^m) \times U(t)$ *– оптимальное управление в задаче (2.3.1) – (2.3.3).*

**Доказательство. Необходимость**. Пусть система (2.1.1) – (2.1.3) управляема. Покажем, что значение $J(v_*,u_*) = 0$. Из управляемости системы (2.1.1) – (2.1.3) следует существование решения дифференциального уравнение (2.1.1) функцию $x(t) = x(t;\ t_0,x_0,u_*),\ t \in I$, такую, что $x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1$ при $u_* = u_*(t),\ t \in I$. Тогда $f(x(t;\ t_0,\ x_0,\ u_*),\ u_*(t),t) = w_*(t) \in L_2(I,R^m)$ и система (2.1.1) – (2.1.3) запишется в виде $\big(x(t) = x(t;\ t_0,x_0,u_*)\big)$.

$$\dot{x}(t; t_0, x_0, u_*) = A(t)x(t; t_0, x_0, u_*) + B(t)\ w_*(t), \quad t \in I = [t_0, t_1],$$

$$x(t_0; t_0, x_0, u_*) = x_0, \ \ x(t_1; t_0, x_0, u_*) = x_1, \ \ u_*(t) \in L_2(I, R^m).$$

Обозначим через $y(t) = x(t;\ t_0, x_0, u_*), \quad t \in I.$ Функция $y(t), \quad t \in I$ удовлетворяет условиям $\dot{y} = A(t)y + B(t)w_*(t), \quad y(t_0) = x_0, \quad y(t_1) = x_1.$ Следовательно, функция $w_*(t) \in L_2(I, R^m)$ переводит траекторию $y(t), \quad t \in I$ из точки $x_0$ в точку $x_1$. Как следует из теоремы 2.2.1 функция $w_*(t) \in \Lambda$, где $w_*(t) = v_*(t) + \lambda_1(t,\ x_0,\ x_1) + N_1(t)z(t_1, v_*), \quad t \in I$. Тогда значение

$$J(v_*, u_*) = \int_{t_0}^{t_1} |v_*(t) + \lambda_1(t,\ x_0,\ x_1) + N_1(t)z(t_1, v_*) - f(y(t),\ u_*(t), t)|^2\, dt = 0.$$

Необходимость доказана.

**Достаточность.** Пусть значение функционала $J(v_*, u_*) = 0$, для пары $\big(v_*(t),\ u_*(t)\big) \in L_2(I, R^m) \times U(t)$. Покажем, что система (2.1.1) – (2.1.3) управляема. Заметим, значение $J(v, u) \geq 0$. Следовательно, значение $J(v_*, u_*) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$v_*(t) + \lambda_1(t,\ x_0,\ x_1) + N_1(t)\ z(t_1, v_*) = f(y(t,\ v_*),\ u_*(t), t), \quad t \in I,$$

обозначим через

$$w_*(t) = v_*(t) + \lambda_1(t,\ x_0,\ x_1) + N_1(t)\ z(t_1, v_*) = f(y(t,\ v_*),\ u_*(t), t), \quad t \in I,$$

где $(t_0,\ v_*) = x_0, \ \ y(t_1,\ v_*) = x_1$. Теперь система (2.1.7) – (2.1.9) запишется так:

$$\dot{y}(t, v_*) = A(t)y(t, v_*) + B(t)\ w_*(t), \quad y(t_0) = x_0, \ \ y(t_1) = x_1, \ \ w_*(t) \in L_2(I, R^m).$$

Отсюда следует, что $y(t,\ v_*) = x(t;\ t_0, x_0, u_*), \quad x(t_0) = x_0, \ \ x(t_1) = x_1.$ Следовательно, система (2.1.1) – (2.1.3) управляема. Достаточность доказана. Теорема доказана.

Ниже приведены решения оптимизационной задачи (2.3.1) – (2.3.3). Следует отметить, что: 1) в оптимизационной задаче (2.3.1) – (2.3.3), в отличие от исходной краевой задачи (2.1.1) – (2.1.3), отсутствуют краевые условия; 2) Оптимизационная задача (2.3.1) – (2.3.3) является начальной задачей

оптимального управления и она может быть решена известными методами последовательных приближений.

Введем следующие обозначения

$$F_0(q_0,t) = |v + T_1(t)\,x_0 + T_2(t)\,x_1 + N_1(t)\;z(t_1,v) - f(y,u.t)|^2, \tag{2.3.4}$$

где

$$\lambda_1(t,\ x_0,\ x_1) = T_1(t)\,x_0 + T_2(t)\,x_1,$$

$$T_1(t) = -B^*(t)\Phi^*(t_0,t)\,W^{-1}(t_0,t_1),\ T_2(t) = B^*(t)\Phi^*(t_0,t)\,W^{-1}(t_0,t_1)\ \Phi^*(t_0,t_1),$$

$$\lambda_2(t,\ x_0,\ x_1) = C_1(t)\,x_0 + C_2(t)\,x_1,$$

$$C_1(t) = \Phi(t,t_0)\,W(t,t_1),\ W^{-1}(t_0,t_1),\ C_2(t) =$$

$$= \Phi(t,t_0)\,W(t_0,t),\ W^{-1}(t_0,t_1)\ \Phi(t_0,t_1),$$

$$y(t) = z(t,v)\ + C_1(t)\,x_0 + C_2(t)\,x_1 + N_2(t)\,z(t_1,v),\ t \in I,$$

$$q = \big(v,u,z,\ z(t_1)\big) \in R^m \times R^{m_1} \times R^n \times R^n.$$

**Лемма 2.3.1.** *Пусть матрица $W(t_0,t_1) > 0$, функция $f(y,\ u,\ t)$ определена и непрерывна по совокупности переменных $(y,u,t) \in R^n \times R^{m_1} \times I$ вместе с частными производными по $(y,u) \in R^n \times R^{m_1}$. Тогда частные производные*

$$\frac{\partial\ F_0(q,t)}{\partial v} = 2[v + T_1(t)x_0 + T_2(t)x_1 + N_1(t)z(t_1) - f(z + C_1(t) + C_2(t) + N_2(t)z(t_1),\ u,\ t)], \tag{2.3.5}$$

$$\frac{\partial\ F_0(q,t)}{\partial u} = -2f_u(y,u,t)[v + T_1(t)x_0 + T_2(t)x_1 + N_1(t)z(t_1) - f(y,\ u,\ t)], \tag{2.3.6}$$

$$\frac{\partial\ F_0(q,t)}{\partial z} = -2f_x(y,u,t)[v + T_1(t)x_0 + T_2(t)x_1 + N_1(t)z(t_1) - f(y,\ u,\ t)], \tag{2.3.7}$$

$$\frac{\partial\ F_0(q,t)}{\partial z(t_1)} = 2[N_1^*(t) + N_2^*(t)f_x(y,\ u,\ t)][v + T_1(t)x_0 + T_2(t)x_1 + N_1(t)z(t_1) - -f(y,\ u,\ t)]. \tag{2.3.8}$$

*Соотношения (2.3.5) – (2.3.8) следуют из (2.3.4) непосредственным дифференцированием.*

**Лемма 2.3.2.** *Пусть выполнены условия леммы 2.1.1 и выполнено неравенство*

$$\langle F_{0q}(q_1,t) - F_{0q}(q_2,t),\ q_1 - q_2\rangle \geq 0,\ \ \forall q_1,\ q_2 \in R^{m+m_1+2n}, \qquad (2.3.9)$$

*где*

$$F_{0q}(q,t) = \frac{\partial F_0(q,t)}{\partial q} = \left(\frac{\partial F_0}{\partial v},\ \frac{\partial F_0}{\partial u},\ \frac{\partial F_0}{\partial z}, \frac{\partial F_0}{\partial z(t_1)}\right),\ \ t \in I.$$

*Тогда функционал (2.3.1) при условиях (2.3.2), (2.3.3) является выпуклым.*

**Доказательства**. Неравенство (2.3.9) является необходимым и достаточным условием выпуклости функции $F_0(q,t)$ по $q$. Следовательно,

$$F_0(\alpha q_1 + (1-\alpha)q_2)\ \leq \alpha F_0(q_1,t) + (1-\alpha)F_0(q_2,t),\ \ t \in I,$$

$$\forall q_1,\ q_2 \in R^N,\ \ N = m_1 + m + 2n,\ \ \forall \alpha, \alpha \in [0,1].$$

Поскольку для любых $v_1(t),\ v_2(t) \in L_2(I,R^m)$ значение $z(t, \alpha\, v_1 + (1-\alpha)\, v_2) = \alpha\, z(t,\, v_1) + (1-\alpha)\, z\,(t,\, v_2),\ \ \forall \alpha, \alpha \in [0,1],\ \ t \in I$, то

$$J(\alpha\, v_1 + (1-\alpha)\, v_2,\ \alpha\, u_1 + (1-\alpha)\, u_2) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} F_0\,(\alpha\, v_1 + (1-\alpha)\, v_2,\ \alpha\, u_1 + (1-\alpha)\, u_2),$$

$$z(t, \alpha\, v_1 + (1-\alpha)\, v_2),\ z(t_1,\, \alpha v_1 + (1-\alpha)\, v_2))dt \leq$$

$$\leq \alpha \int_{t_0}^{t_1} F_0\,(q_1,t)dt + (1-\alpha)\int_{t_0}^{t_1} F_0\,(q_2,t)dt =$$

$$= \alpha\, J\,(v_1,u_1) + (1-\alpha)J\,(v_2,u_2),\ \ \forall\, v_1,\, v_2 \in L_2(I,R^m),\ \ \forall\, u_1,\, u_2 \in L_2(I,R^{m_1}). \qquad (2.3.10)$$

Отсюда следует утверждение леммы. Лемма доказана.

**Определение.** *Говорят, что частные производные (2.3.5) – (2.3.8) удовлетворяют условию Липшица, если*

$$\left|\frac{\partial F_0(q+\Delta q,t)}{\partial v}-\frac{\partial F_0(q,t)}{\partial v}\right|\le L_1|\Delta q|,\qquad \left|\frac{\partial F_0(q+\Delta q,t)}{\partial u}-\frac{\partial F_0(q,t)}{\partial u}\right|\le L_2|\Delta q|,$$

$$\left|\frac{\partial F_0(q+\Delta q,t)}{\partial z}-\frac{\partial F_0(q,t)}{\partial z}\right|\le L_3|\Delta q|,\qquad \left|\frac{\partial F_0(q+\Delta q,t)}{\partial z(t_1)}-\frac{\partial F_0(q,t)}{\partial z(t_1)}\right|\le L_4|\Delta q|,$$

*где* $L_i = const > 0,\ \ i=\overline{1,4}, \Delta q = \big(\Delta v,\ \Delta u,\ \Delta z,\ \Delta z(t_1)\big)$.

**Теорема 2.3.2**. *Пусть выполнены условия леммы 2.3.1 и неравенства (2.3.10). Тогда функционал (2.3.1) при условиях (2.3.2), (2.3.3) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент*

$$J'(v,u) = (J'_v(v,u),\ \big(J'_u(v,u)\big) \in L_2(I,R^m)\times L_2(I,R^{m_1})$$

*в любой точке* $(v,u)\in L_2(I,R^m)\times L_2(I,R^{m_1})$ *определяется по формуле*

$$J'_v(v,u) = \frac{\partial F_0(q(t),t)}{\partial v} - B^*(t)\psi(t),\quad J'_u(v,u) = \frac{\partial F_0(q(t),t)}{\partial u} \qquad (2.3.11)$$

*где* $q(t) = \big(v(t),\ u(t),\ z(t,v),\ z(t_1,v)\big)$, *функция* $z(t) = z(t,v),\ \ t\in I$ *– решение дифференциального уравнения (2.3.2), а функция* $\psi(t),\ t\in I$ *– решение уравнения*

$$\dot\varphi = \frac{\partial F_0(q(t),t)}{\partial z} - A^*(t)\psi,\quad \psi(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial F_0(q(t),t)}{\partial z(t_1)}dt. \qquad (2.3.12)$$

*Кроме того, градиент* $J'(v,u)$ *удовлетворяют условию Липшица*

$$\|J'(v_1,u_1)-J'(v_2,u_2)\| \le l_1(\|v_1-v_2\|^2+\|u_1-u_2\|^2)^{1/2},$$

$$\forall(v_1,v_2)\in L_2(I,R^m),\ \forall(u_1,u_2)\in L_2(I,R^{m_1}) \qquad (2.3.13)$$

**Доказательства**. Заметим, что для любых $v(t),\ v(t)+h(t)\in L_2(I,R^m),\ \ \Delta z(t) = z(t,v+h)-z(t,v)$ является решением дифференциального уравнения

$$\Delta\dot z(t) = A(t)\Delta z(t) + B(t)h(t),\ \Delta z(t_0) = 0,\ \ t\in I,$$

где

$$\Delta z(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi\,(t,\tau)\ B(\tau)\ h(\tau)d\tau,$$

$$|\Delta z(t)| \le \int_{t_0}^{t_1} \| \Phi(t,\tau) \| \ \| \ l(\tau) \| \ \ |h(\tau)|d\tau \le c_1 \| \ h \ \|_{L_2}.$$

Приращение функционала

$$\Delta J = J(v+h,\ u+\Delta u) - J(v,u) = \int_{t_0}^{t_1} [\ h^*(\tau)F_{ov}(q(t),t) + \Delta u^*(t)F_{ou}(q(t),t) +$$

$$+z^*(t)F_{oz}(q(t),t) + \Delta z^*(t_1)F_{oz(t_1)}(q(t),t)]dt + R,$$

где $|R| \le c_2(\| \ h \ \|^2 + \| \ \Delta u \ \|^2)$, в силу оценки (2.3.9),

$$F_{0v}(q,t) = \frac{\partial\, F_0(q,t)}{\partial v},\ F_{0u}(q,t) = \frac{\partial\, F_0(q,t)}{\partial u},$$

$$F_{0z}(q,t) = \frac{\partial\, F_0(q,t)}{\partial z},\ F_{0z(t_1)}(q,t) = \frac{\partial\, F_0(q,t)}{\partial z(t_1)}.$$

Слагаемое

$$\Delta z^*(t_1) \int_{t_0}^{t_1} F_{oz(t_1)}\,(q(t),t) = -\int_{t_0}^{t_1} \Delta\, z^*(t)\ \psi(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta\, z^*(t)\ \dot{\psi}(t)dt =$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} h^*\,(t)\ B^*(t)\ \psi(t) - \int_{t_0}^{t_1} \Delta\, z^*(t)F_{oz}(q(t),t)dt.$$

Тогда приращение функционала

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} \{\ h^*(t)\ [F_{ov}(q(t),t) - B^*(t)\ \psi(t)] + \Delta u^*(t)\ F_{ou}(q(t),t)\}dt + R.$$

Отсюда следует первое утверждение теоремы (2.3.11). Покажем, что верна оценка (2.3.13), где $\psi(t),\ t \in I$ – решение дифференциального уравнения (2.3.12).

Пусть $\xi(t) = \big(v(t),\ \ u(t)\big),\ t \in I$. Тогда.

$$J'(\xi_1) - J'(\xi_2) = (F_{ov}(q(t) + \Delta q(t), t) - F_{ov}(q(t), t) - B^*(t)\ \Delta\psi(t),$$

$$F_{ou}(\ q(t) + \Delta q(t), t) - F_{ou}(q(t), t)),\quad \xi_1 = (v_1,\ u_1),\ \ \xi_2 = (v_2,\ u_2).$$

Следовательно,

$$|J'(\xi_1) - J'(\xi_2)| = |F_{ov}(q(t) + \Delta q(t), t) - F_{ov}(q(t), t)| + B^*_{\max}\ |\Delta\psi(t)| +$$

$$+|F_{ou}(\ q(t) + \Delta q(t), t) - F_{ou}(q(t), t)| \le (L_1 + L_2)\ |\Delta q(t), t)| + B^*_{\max}\ |\Delta\psi(t)|,$$

где $B^*_{\max} = \sup\limits_{t_0 \le t \le t_1} \| B^*(t) \|$. Норма

$$\| J'(\xi_1) - J'(\xi_2) \|^2 = \int_{t_0}^{t_1} |J'(\xi_1) - J'(\xi_2)|^2\, dt \le$$

$$\le 2\ (L_1 + L_2)\ \int_{t_0}^{t_1} |\Delta q(t)|^2\, dt + 2(B^*_{\max})^2 \int_{t_0}^{t_1} |\Delta\psi(t)|^2\, dt \le$$

$$\le 2\, c_3^2\, (L_1 + L_2)\ \ \| \Delta\xi \|^2 + 2\, (B^*_{\max})^2 \int_{t_0}^{t_1} |\Delta\psi(t)|^2\, dt,$$

где $\| \Delta q \| \le c_3\ \| \Delta\xi \|^2,\ \| \Delta\xi \|^2 = (\| h \|^2 + \| \Delta u \|^2),\ \Delta\xi = (h,\ \Delta u)$. Можно показать, что где
$|\Delta\psi(t)| \le \left(L_4\, c_3\, \sqrt{t_1 - t_0} + L_3\, c_3\, \sqrt{t_1 - t_0}\right) e^{A^*_{\max}(t_1 - t_0)}\ \| \Delta\xi \|,\ \ t \in I,$ где $A^*_{\max} = \sup\limits_{t_0 \le t \le t_1} \| A^*(t) \|$. Тогда $\| J'(\xi_1) - J'(\xi_2) \|^2 \le l_1^2\ \ \| \Delta\xi \|^2$, где

$$l_1 = [2\, c_3^2\, (L_1 + L_2)^2\ + 2\, (B^*_{\max})^2\, (t_1 + t_0)^2 (L_3 + L_4)^2 c_3^2 e^{A^*_{\max}(t_1 - t_0)}]^{1/2}.$$

Отсюда следует оценка (2.3.13). Теорема доказана.

**Теорема 2.3.3.** *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.2, последовательность* $\{v_n\} \subset L_2(I, R^m),\ \{u_n\} \subset U(t) \subset L_2(I, R^{m_1})$ *определяется отношениями*

$$v_{n+1} = v_n - \alpha_n J'_v(v_n, u_n),\ \ u_{n+1} = P_\Lambda[u_n - \alpha_n J'_u(v_n, u_n)],\quad n = 0, 1, 2, \dots .$$
$$0 < \varepsilon_0 \le \alpha_n \le \frac{2}{l_1 + 2\varepsilon_1},\ \ \varepsilon_1 > 0,\ \ n = 0, 1, 2, \dots ,$$

*(2.3.14)*

*где $P_U[\cdot]$ – проекция точки на множестве $U$.*
*Тогда: 1) числовая последовательность $\{J(v_n, u_n)\}$ строго убывает;*

*2) $\| v_n - v_{n+1} \| \to 0,\quad \| u_n - u_{n+1} \| \to 0$ при $n \to 0$;*

*Если, кроме того, выполнено неравенство (2.3.9), множество $M(v_0, u_0) = \{(v, u) \in L_2(I, R^m) \times U(t) | J(v, u) \le J(v_0, u_0)\}$ ограничено, то*

*3) последовательности $\{v_n\}$, $\{u_n\}$ является минимизирующими,*

$$\lim_{n\to\infty}(v_n, u_n) = J_* = inf J(v, u),\ \ (v, u) \in X \in L_2(I, R^m) \times U(t);$$

*4) последовательности $\{v_n\}$, $\{u_n\}$, слабо сходятся к множеству $U_*$, где*

$$U_* = \{(v_*, u_*) \in X | J(v_*, u_*) = J_* = inf J(v, u) = min J\,(v, u),\ \ (v, u) \in X\};$$

*5) справедлива оценка скорости сходимости*

$$0 \le J(v_n, u_n) - J_* \le \frac{m_0}{n},\ \ n = 1, 2, \dots ,\ \ m_0 = const > 0;$$

*6) задача управляемости (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3) имеет решение тогда и только тогда, когда значение $J(v_*, u_*) = J_* = 0$, при этом функция $x_*(t) = z(t, v_*) + \lambda_2(t, x_0, x_1) + N_2(t)\ z(t_1, v_*),\ \ t \in I$;*

*7) если значение $J(v_*, u_*) > 0$, это $x_*(t),\ \ t \in I$ является наилучшим приближенным решением задачи управляемости (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3).*

**Доказательство**. Из свойства проекции точки на множества (2.3.14) следует

$$\langle v_{n+1} - v_n + \alpha_n J'_v\,(v_n, u_n),\ v - v_{n+1}\rangle_{L_2} = 0,\ \ \forall v,\ \ v \in L_2(I, R^m) \qquad (2.3.15)$$

$$\langle u_{n+1} - u_n + \alpha_n J'_u\,(v_n, u_n),\ u - u_{n+1}\rangle_{L_2} \ge 0,\ \ \forall u,\ u \in \Lambda. \qquad (2.3.16)$$

Тогда $\theta = (v, u),\ \ \theta_n = (v_n, u_n),\ \ J'(v_n, u_n) = \left(J'_v(v_n, u_n),\ J'_u(v_n, u_n)\right)$ (2.3.15), (2.3.16) запишется виде

$$\langle J'(\theta_n),\ \theta - \theta_{n+1}\rangle_{L_2} \ge \frac{1}{\alpha_n}\langle \theta_n - \theta_{n-1},\ \theta - \theta_{n-1}\rangle,\quad \forall\theta,\ \theta \in X. \qquad (2.3.17)$$

Из включения $J(v,u) \in C^{1,1}(X)$ следует неравенство

$$J(\theta^1) - J(\theta^2) \geq \langle J'(\theta^1),\ \theta^1 - \theta^2 \rangle_H - \frac{l_1}{2} \| \theta^1 - \theta^2 \|^2,\ \ \forall \theta^1,\ \theta^2 \in X.$$

Отсюда, в частности, при $\theta^1 = \theta_n,\ \ \theta^2 = \theta_{n+1}$, получим

$$J(\theta_n) - J(\theta_{n-1}) \geq \langle J'(\theta_n),\ \theta_n - \theta_{n+1} \rangle - \frac{l_1}{2}\ \| \theta_n - \theta_{n-1} \|^2. \qquad (2.3.18)$$

Из (2.3.17), (2.3.18), (2.3.14), имеем

$$J(\theta_n) - J(\theta_{n-1}) \geq \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{l_1}{2}\right)\ \| \theta_n - \theta_{n-1} \|^2 \geq \varepsilon_1\ \| \theta_n - \theta_{n-1} \|^2,\ \ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots . \qquad (2.3.19)$$

Отсюда следует утверждения 1), 2) теоремы.

Если выполнено неравенство (2.3.9), то функционал (2.3.1) при условиях (2.3.2), (2.3.3) является выпуклым, множество $M(v_0, u_0)$ – ограничено, замкнуто и выпукло в $H$. Следовательно, множество $M(v_0, u_0)$ – слабо бикомпактно. Функционал $J(v,u)$ – слабо полунепрерывен снизу на множестве $M(v_0, u_0)$ и достигает нижней грани, множество $U_* \neq \emptyset$, $\emptyset$ – пустое множество.

Покажем, что последовательность $\{\xi_n\} = \{v_n,\ u_n\}$ является минимизирующей. В самом деле, из выпуклости функционала $J(\xi) \in C^{1,1}\big(M(v_0, u_0)\big)$ следует, что

$$J(\xi_n) - J(\xi_*) \leq \langle J'(\xi_n),\ \xi_n - \xi_* \rangle_H \leq \| J'(\xi_n) \|\ \| \xi_n - \xi_* \| \leq \| J'(\xi_n) \|\ \ D, \qquad (2.3.20)$$

где $\xi_* = (v_*,\ u_*) \in U_* \subset M(v_0, u_0),\ \ D$ – диаметр множества $M(v_0, u_0)$.

Из (2.3.20) следует, что последовательность $\{\xi_n\} \subset M(\xi_0)$ является минимизирующей и $\xi_n \overset{\text{сл}}{\to} \xi_*$при $n \to \infty$, где $\xi_n \overset{\text{сл}}{\to} \xi_*$ при $n \to \infty$ означает особая сходимость последовательности $\{\xi_n\}$ к элементу $\xi_*$. Итак, доказаны утверждения 3), 4).

Пусть $a_n = J(\xi_n) - J(\xi_*)$. Тогда из (2.3.19), (2.3.20) имеем

$$a_n - a_{n-1} \geq \frac{1}{2l_1} \| J'(\xi_n) \|^2,\ \ a_n \leq D\ \ \| J'(\xi_n) \|. \qquad (2.3.21)$$

Из (2.3.21) следует, оценка скорости сходимости из 5). Теорема доказана.

**Оптимальное быстродействие**. Пусть $t_0$ – фиксировано, $t_1$ – не фиксировано. Необходимо найти наименьшее значение $t_1 = t_*$, для которого

система (2.1.1), (2.1.2), (2.1.4) управляема. Необходимо найти пару $\left(t_*,\ u_*(t)\right),\ u_*(t) \in \Lambda(t) \subset L_2(I, R^{m_1})$.

I. Задаем значение $t_1 > t_*$. По изложенному выше алгоритму находим управление $u_{*t_1}(t)$, где $t_0,\ t_1$ – известные величины.

Далее, выбираем $t_{11} = \frac{t_1}{2}$. Находим пару $(v_{**},\ u_{**}) \in X,\ t \in [t_0,\ t_{11}]$. Если для данной пары значение $J(v_{**},\ u_{**}) = 0$, то выберем значение $t_{12} = \frac{t_1}{4},\ t_{12} < t_{11}$ и решаем оптимизационную задачу (2.3.21).

В случае, когда значение $J(v_{**},\ u_{**}) > 0$, оптимизационная задача (2.3.21) решается для значения $\frac{3t_1}{4}$ и так далее. В результате определяется значение $t_*$ с заданной точностью $\varepsilon = t_{1n} - t_*$.

II. Метод последовательных приближении. Рассмотрим следующую оптимизационную задачу: минимизировать функционал

$$J(v, u, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} |v(t) + \lambda_1(t,\ x_0,\ x_1) + N_1(t) z(t_1, v) - f(y(t),\ u(t), t)|^2\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} F_0\,(q(t),\, t_1,\, t) dt \to \inf$$

при условиях (2.3.22), (2.3.23), $t_1 > t_0$. Находим производные Фреше, $J'_v(v, u, t_1),\ J'_u(v, u, t_1)$

$$J'_{t_1}(v, u, t_1) = F_0(q(t_1),\, t_1,\, t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial\, F_0(q(t), t_1,\, t)}{\partial t_1} dt.$$

Далее, строим последовательности $\{v_n\},\ \{u_n\},\ \{t_{1n}\}$, где

$$t_{1n+1} = t_{1n} - \alpha_n J'_{t_1}(v_n,\ u_n,\ t_{1n}),\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$

## 2.4 Решение модельной задачи. Уравнение Дуффинга

В качестве примера рассмотрим уравнение Дуффинга с управлением.

$$\ddot{x} + x + 2x^3 = u(t),\ t \in I = [0,\ t_1]$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение колебаний.

- $x(t)$ — положение системы (например, груз на жесткой пружине)

- $\ddot{x}$ — ускорение
- $x$ — обычная линейная упругость
- $2x^3$ — нелинейная жесткость пружины
- $u(t)$ — внешнее управление (сила)

То есть система:

- колеблется
- пружина ведет себя нелинейно
- мы можем управлять движением через $u(t)$
- Переход к системе первого порядка. Данное уравнение может быть представлена в виде

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_1^3 + u(t),\ \ t \in [0,\ t_1] = I, \tag{2.4.1}$$

Чтобы удобнее анализировать, вводят переменные.

$$x_1 = x_2,\ x_2 = \dot{x}$$

тогда получаем систему:

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_1^3 + u(t).$$

Что это значит

- $x_1$ — положение
- $x_2$ — скорость
- система описывает движение точки в фазовом пространстве $(x_1, x_2)$

Это стандартный прием в теории управления.

Начальные и конечные условия

Задано:

$$x_1(0) = 1,\ \ x_2(0) = 0,\ \ x_1(t_1) = 0,\ \ x_2(t_1) = 0, \tag{2.4.2}$$

$$u(t) \in \Lambda = \{u(t) \in L_2(I, R^1) | -2 \le u(t) \le +2 \text{ почти всюду } t \in I\}. \tag{2.4.3}$$

Интерпретация

- В начале:
  - груз в точке 1
  - скорость 0
- Нужно:
  - перевести систему в ноль
  - за время $t_1$

Это уже задача управления: найти такое $u(t)$, чтобы система пришла в покой в нуле.

Ограничение на управление

$$u(t) \in \Lambda, \qquad -2 \le u(t) \le +2$$

Это означает:

- сила ограничена по величине
- нельзя толкать систему как угодно сильно
- управление принадлежит пространству $L_2$ — функция должна быть квадратично интегрируема.

Физический смысл модели

В тексте сказано:

математическая модель движения жесткой пружины под действием внешней силы.

То есть:

- обычная пружина: сила ~ $x$
- жесткая пружина: добавляется $x^3$
- получается нелинейный осциллятор Дуффинга.

Суть задачи целиком

Нужно:

Найти управление $\boldsymbol{u(t)}$,

которое:

- удовлетворяет ограничению $| u | \le 2$
- переводит систему
  - из состояния $(1, 0)$
  - в состояние $(0, 0)$
- за время $t_1$

Это классическая задача:

- оптимального управления
- управляемости нелинейной системы

Это модель нелинейной пружины, которую нужно правильной ограниченной силой остановить в нуле за заданное время.

Система (2.4.1) – (2.4.3) математическая модель, описывающая движение жесткой пружины под воздействием внешней силы $u(t) \in U$. Рассмотрим задачу оптимального быстродействия. Для (2.4.1) – (2.4.3) линейная управляемая система имеет вид

$$\dot{y}_1 = y_2,\ \dot{y}_2 = w(t),\ \ t \in [0,\ t_1] = I,\ u(t) \in \Lambda,$$

$$y_1(0) = 1,\ \ y_2(0),\ y_1(t_1) = 0,\ \ y_2(t_1) = 0,$$

Зачем вводят новую систему $y_1,\ y_2$,

$$\dot{y}_1 = y_2,\ \dot{y}_2 = w(t)$$

это уже линейная управляемая система.

Исходная система была:

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_1^3 + u(t),$$

Она нелинейная из-за $x_1^3$.

Чтобы применять теорию оптимального управления, часто рассматривают:

- линейное приближение
- или сравнительную модель

И получают простую систему:

- «двойной интегратор»

$$\ddot{y} = w(t)$$

это классическая модель движения точки под действием силы.

Физический смысл линейной системы. Система

$$\dot{y}_1 = y_2,\ \dot{y}_2 = w(t)$$

означает:

- $y_1$ — положение
- $y_2$ — скорость
- $w(t)$ — управляющее ускорение (сила)
- нет пружины → движение свободной массы

Это самая простая управляемая динамическая система.

Начальные и конечные условия. Записано:

$$y_1(0) = 1, \qquad y_2(0) = 0,$$

$$y_1(t_1) = 0, \qquad y_1(t_1) = 0.$$

То есть задача та же самая:

- старт: точка в положении 1 без скорости
- финиш: остановиться в нуле
- нужно выбрать управление $w(t)$

Связь с задачей быстродействия. Для двойного интегратора известно из теории: оптимальное управление имеет вид:

$$w(t) = \{^{+2}_{-2},$$

То есть:

- сначала максимально разгоняем
- потом максимально тормозим

Это дает минимальное время остановки.

Зачем все это в тексте

Логика такая:

1. Есть сложная нелинейная система Дуффинга
2. Чтобы понять поведение управления, рассматривают простую линейную систему
3. Для нее:
    - решение известно
    - можно применить принцип максимума Понтрягина
    - видно, структуру оптимального управления

А потом результаты переносят на нелинейный случай.

Чтобы решить задачу минимального времени для нелинейной пружины, сначала рассматривают более простую линейную систему «двойного интегратора» с теми же начальными и конечными условиями.

Для данного примера

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_0, \quad y(t_1) = x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{-At} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta(t) = e^{At}, \quad \Phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}.$$

Вычислим следующие векторы и матрицы

$$a = \Phi(\tau, t_1)x_1 - x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$W(0, t_1) = \int_0^{t_1} e^{-At} BB^* e^{-A^*\tau} d\tau = \begin{pmatrix} \frac{t_1^3}{3} & -\frac{t_1^2}{2} \\ -\frac{t_1^2}{2} & t_1 \end{pmatrix} > 0,$$

$$W^{-1}(0,t_1)=\begin{pmatrix}\frac{12}{t_1^3} & \frac{6}{t_1^2}\\ \frac{6}{t_1^2} & \frac{4}{t_1}\end{pmatrix},\quad \lambda_1(t,x_0,x_1)=T_1(t)x_0+T_2(t)x_1=\frac{12}{t_1^3}-\frac{6}{t_1^2},$$

$$N_1(t)=\left(\frac{12}{t_1^3}-\frac{6}{t_1^2},\ -\frac{6t}{t_1^2}-\frac{2}{t_1}\right),\quad \lambda_2(t,x_0,x_1)=\begin{pmatrix}\frac{t_1^3+2t^3-3t_1t^2}{t_1^3}\\ \frac{6t^2-6t\,t_1}{t_1^3}\end{pmatrix},$$

$$N_2(t)=\begin{pmatrix}\frac{2t^3-3t^2t_1}{t_1^3} & \frac{-t^3+t_1t^2}{t_1^2}\\ \frac{6t^3-6t\,t_1}{t_1^3} & \frac{-3t^2+2t\,t_1}{t_1^2}\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$w(t)=v(t)+\left(\frac{12t}{t_1^3}-\frac{6}{t_1^2}\right)+\left(\frac{12t}{t_1^3}-\frac{6}{t_1^2}\right)\ z_1(t_1,v)\left(-\frac{6t}{t_1^2}+\frac{2}{t_1^3}\right)\ z_2(t_1,v),$$

$$y(t)=\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix},$$

$$y_1(t)=z_1(t)+\frac{t_1^3+2t^3-3t_1t^2}{t_1^3}+\left(\frac{2t^3-3t^2t_1}{t_1^3}\right)\ z_1(t_1,v)+\frac{-t^3+t_1t^2}{t_1^2}\ z_2(t_1,v),$$

$$y_2(t)=z_2(t)+\frac{6t^2-6t\,t_1}{t_1^3}+\left(\frac{6t^2-3t^2t_1}{t_1^3}\right)\ z_1(t_1,v)+\left(\frac{-3t^2+2t\,t_1}{t_1^2}\right)\ z_2(t_1,v).$$

(2.4.4)

Запись системы в матричном виде

Линейная система была:

$$\dot{y}_1 = y_2,\ \dot{y}_2 = w(t)$$

Ее записывают как

$$\dot{y} = Ay + Bw(t), \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Начальное и конечное состояние:

$$y(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y(t_1) = x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Почему появляются $e^{At},\ \Phi(t,\tau)$
Для линейной системы решение всегда выражается через переходную матрицу:

$$y(t) = e^{At}y(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t-\tau)}\, Bw(\tau)d\tau$$

Здесь:

- $e^{At}$ — матричная экспонента,
- $\Phi(t,\tau) = e^{A(t-\tau)}$ — переходная матрица от $\tau$ к $t$.

Для данного $A$ легко считается:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{-At} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор $a$. В тексте:

$$a = \Phi(\tau, t_1)x_1 - x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Смысл простой: это “вектор требования”, который кодирует разницу между тем:

- где мы должны оказаться в $t_1$,
- и где мы находимся в $0$,

в терминах формулы для управления через граммиан (см. дальше).

Так как $\Phi(\tau, t_1)x_1 = 0$, значит $a = -x_0 = (-1,0)^T$.

Граммиан управляемости $W(0, t_1)$. Это ключевой объект.

$$W(0, t_1) = \int_0^{t_1} e^{-At} BB^* e^{-A^*\tau} d\tau$$

- Он показывает, можно ли управлением перевести систему из $x_0$ в $x_1$.
- Если $W > 0$ (положительно определен), система управляемая на $[0,\ t_1]$.

Для двойного интегратора получается:

$$W(0, t_1) = \begin{pmatrix} \frac{t_1^3}{3} & -\frac{t_1^2}{2} \\ -\frac{t_1^2}{2} & t_1 \end{pmatrix} > 0$$

Дальше автор выписывает обратную матрицу:

$$W^{-1}(0, t_1) = \begin{pmatrix} \frac{12}{t_1^3} & \frac{6}{t_1^2} \\ \frac{6}{t_1^2} & \frac{4}{t_1} \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2,\ N_1(t), N_2(t)$ то уже “заготовки” для параметризации решения (чтобы красиво записать управление и траекторию).

Типичная идея такая:

1. берут некоторую “свободную” функцию $v(t)$ (в тексте она появляется как часть управления),
2. строят по ней промежуточное движение $z(t)$,
3. затем добавляют специальные корректирующие члены, чтобы гарантировать условия:

$$y(0) = x_0, y(t_1) = x_1$$

То есть $\lambda_1, \lambda_2,\ N_1, N_2$ — это коэффициенты/матрицы, которые получаются из $e^{At}$ и $W^{-1}$, и обеспечивают “пришивание” концов траектории.

По смыслу:

- $N_1(t), N_2(t)$ — вектор, который участвует в формуле корректировки управления,
- $\lambda_2(t, x_0, x_1), N_2(t)$ — коэффициенты, которые участвуют в формуле корректировки траектории $y(t)$.

$z_1(t), z_2(t)$

- $w(t) = v(t) + \cdots$
- $y_1(t) = z_1(t) + \cdots$
- $y_2(t) = z_2(t) + \cdots$

Обычно $z(t) = (z_1, z_2)^T$ — это решение той же системы, но с “свободным” управлением $v(t)$ и нулевыми/простыми начальными условиями.

Интуитивно:

- $v(t)$ — “что мы хотим делать”
- добавки с $t_1, z(t_1, v)$ — “что нужно добавить, чтобы точно попасть в конечную точку”.

Итог формул (2.4.4): утверждают

Формулы вида:

$$w(t) = v(t) + (\text{коррекция})$$

и

$$y(t) = z(t) + (\text{полиномы по } t, t_1) + (\text{члены с } z(t_1, v))$$

— это общий вид решения краевой задачи для двойного интегратора:

- можно выбрать почти любой $v(t)$,
- затем вычислить $z(t)$ и $z(t_1)$,
- подставить в формулы,
- и получится траектория $y(t)$, которая автоматически удовлетворяет:

$$y(0) = x_0, y(t_1) = x_1$$

То есть (2.4.4) — это конструктор допустимых управлений и траекторий.

Почему там много “кубов” $t^3,\ t_1^3$

Потому что двойной интегратор — это:

$$\ddot{y} = w(t)$$

а интегрирование дважды приводит к полиномам до степени $2$; когда ты “пришиваешь” два конца (и позицию, и скорость), появляются выражения с $t^3$ и $t_1^3$ (это стандартно для задач с двумя интегрированиями и краевыми условиями).

Мини-резюме одним предложением

Этот блок вычисляет для линейной системы $\dot{y} = Ay + Bw$ матричную экспоненту и граммиан $W$, чтобы записать явные формулы для управления $w(t)$ и траектории $y(t)$, которые гарантированно переводят состояние из $(1,0)$ в $(0,0)$ за время $t_1$.

Задача оптимального управления (2.3.1) – (2.3.3) для данного примера имеет вид

$$J(v,u) = \int_{t_0}^{t_1} \left| v(t) + \lambda_1(t,\ x_0,\ x_1) + N_1(t) z(t_1, v) - \left(-y_1 - 2y_1^3 + u(t)\right) \right|^2 dt \to \inf \tag{2.4.5}$$

Смысл

Мы подбираем функции:

- $v(t)$ — вспомогательное управление линейной системы
- $u(t)$ — настоящее управление Дуффинга так, чтобы выражение в модуле было как можно меньше.

Что стоит внутри модуля

Там разность:

$$\underbrace{w(t)}_{\text{линейная модель}} - \underbrace{(-y1 - 2y13 + u(t))}_{\text{нелинейная система Дуффинга}}$$

То есть: идея функционала, заставить линейную и нелинейную системы совпасть. Если разность = 0 ⇒ линейная траектория = траектория Дуффинга.

$$\dot{z}_1 = z_2,\ \dot{z}_2 = v(t),\ \ z_1(0) = 0,\ \ z_2(0) = 0,\ \ v(t) \in L_2(I, R^1),\ \ u \in \Lambda, \tag{2.4.6}$$

где $f(y,\ u,\ t) = -y_1 - 2y_1^3 + u(t),\ F_0 = |w(t) - (-y_1 - 2y_1^3 + u)|^2$.

- $z(t)$ — движение двойного интегратора
- $v(t)$ — свободная управляющая функция
- $u(t)$ ограничено: $|\ u\ | \leq 2$

То есть мы оптимизируем по двум функциям сразу.

Частные производные:

$$\frac{\partial F_0}{\partial v} = 2[v(t) - (-y_1 - 2y_1^3 + u(t)], \quad \frac{\partial F_0}{\partial u} = -2[w(t) - (-y_1 - 2y_1^3 + u(t)],$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial z_1} = -2(-1 - 6y_1^2)[w(t) - (-y_1 - 2y_1^3 + u], \quad \frac{\partial F_0}{\partial z_2} = 0,$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial z_1(t_1)} = 2[N_1^*(t) + N_2^*(t) f_x(y,u,t)[w(t) - (-y_1 - y_1^3 + u],$$

где $f_x(y,u,t) = \begin{pmatrix} -1 - 3y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix},\ w(t),\ y_1(t),\ y_2(t),\ t \in I$ определяется по формуле (2.4.4).

Частные производные функционала

Дальше вычисляют:

$$\frac{\partial F_0}{\partial v}, \qquad \frac{\partial F_0}{\partial u}, \qquad \frac{\partial F_0}{\partial z}$$

Зачем это нужно

Чтобы найти градиент функционала → использовать градиентный метод минимизации.

Главная идея: минимум функционала достигается, когда его производная равна нулю.

Появление сопряженной функции $\psi(t)$

Записано:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial F_0}{\partial z} - A^*\psi, \qquad \psi(t_1) = -\int_0^{t_1} \frac{\partial F_0}{\partial z(t_1)}\, dt$$

Это сопряженная система (аналог уравнений Понтрягина).

- корректно вычислить производную функционала по функции $v(t)$
- учесть зависимость $z(t)$ от $v(t)$

Это стандартная схема: в оптимальном управлении всегда есть

- прямая система (движение)
- сопряженная система (для градиента)

Производная Фреше функционал (2.4.5) при условии (2.4.6) равна $J'(v,u) = \left(J'_v(v,u),\ J'_u(v,u)\right)$, где $J'_v(v,u) = \frac{\partial F_0}{\partial v} - B^*\psi(t)$, $J'_u(v,u) = \frac{\partial F_0}{\partial u}$, функция $\psi(t)$, $t \in I = [0, t_1]$ – решение дифференциального уравнения

$$\dot{\psi} = \frac{\partial F_0}{\partial z} - A^*\psi, \ \ \psi(t_1) = -\int_0^{t_1} \frac{\partial F_0}{\partial z(t_1)}\, dt.$$

Последовательности $\{v_n\}$, $\{u_n\}$ определяются формулами:

$$v_{n+1} = v_n - \alpha_n J'_v(v_n, u_n), \ \ u_{n+1} = P_U[u_n - \alpha_n J'_u(v_n, u_n)], \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Градиент функционала

$$J'(v,u) = (J'_v, J'_u)$$

где

$$J'_v = \frac{\partial F_0}{\partial z} - B^*\psi(t), \qquad J'_u = \frac{\partial F_0}{\partial u}$$

Смысл:

Это направление наискорейшего роста функционала. Чтобы найти минимум — нужно идти в противоположную сторону. Итерационный метод минимизации

$$v_{n+1} = v_n - \alpha_n J'_v(v_n, u_n)$$

$$u_{n+1} = P_U[u_n - \alpha_n J'_v(v_n, u_n)]$$

Что происходит

Это обычный градиентный спуск:

- делаем шаг против градиента
- $\alpha_n$ — длина шага
- $P_U$ — проекция на допустимое множество (чтобы $|\ u\ | \leq 2$ сохранялось).

Вся конструкция делает следующее:

Шаг 1. Берем простую линейную систему.

Шаг 2. Подбираем $v(t)$ и $u(t)$, чтобы она максимально совпала с нелинейной Дуффинга.

Шаг 3. Минимизируем расхождение через градиентный метод + сопряженную систему.

Этот кусок показывает, как задачу управления нелинейной системой Дуффинга:

- превращают в задачу минимизации функционала
- вычисляют градиент через сопряженное уравнение
- решают итерационным градиентным методом с проекцией.

Решением оптимизационной задачи (2.4.3), (2.4.4) при $t_1 = 4$ является:

$$v_*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < \frac{5}{4}, \\ +1, & \frac{5}{4} \leq t < \frac{13}{4}, \\ -1, & \frac{13}{4} \leq t < 4, \end{cases}$$

$$u_*(t)=\begin{cases} -\dfrac{t^2}{2}+2\left(1-\dfrac{t^2}{2}\right)^3, & \tau\le t<\dfrac{5}{4},\\ \dfrac{t^2}{6}+\dfrac{5t}{2}+\dfrac{57}{16}+2\left(\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{5t}{2}+\dfrac{41}{16}\right)^3, & 0\le t<\dfrac{13}{4},\\ \left(\dfrac{t^2}{2}+4t-9\right)+2\left(-\dfrac{t^2}{2}+4t-8\right)^3, & \dfrac{13}{4}\le t<4. \end{cases}$$

$$-2\le u_*(t)\le +2,\quad t\in I=[0,\ 4],$$

$$x_{1*}(t)=\begin{cases} 1-\dfrac{t^2}{2}, & 0\le t\le\dfrac{5}{4},\\ \dfrac{t^2}{2}-\dfrac{5t}{2}+\dfrac{41}{16}, & \dfrac{5}{4}\le t\le\dfrac{13}{4},\\ -\dfrac{t^2}{2}+4t-8, & \dfrac{13}{4}\le t\le 4, \end{cases}\qquad x_{2*}(t)=\begin{cases} -t, & 0\le t\le\dfrac{5}{4},\\ t-\dfrac{5t}{2}, & \dfrac{5}{4}\le t\le\dfrac{13}{4},\\ -t+4, & \dfrac{13}{4}\le t\le 4. \end{cases}$$

Решением задачи оптимального быстродействия при $t_{1*}=2$ являются:

$$v_*(t)=\begin{cases}-1, & 0\le t<1,\\ 1, & 1\le t<2,\end{cases}$$

$$u_*(t)=\begin{cases} -\dfrac{t^6}{4}+\dfrac{3t^4}{2}-\dfrac{7t^2}{2}+2, & 0\le t<1,\\ \dfrac{t^6}{4}-3t^5+15t^4-40t^3+\dfrac{121t^2}{2}-50t+19, & 1\le t<2, \end{cases}$$

$$-2\le u_*(t)\le 2,\quad t\in I=[0,\ 2].$$

$$x_{1*}(t)=\begin{cases} 1-\dfrac{t^2}{2}, & 0\le t\le 1,\\ \dfrac{t^2}{2}-2t+2, & 1\le t\le 2, \end{cases}\qquad x_{2*}(t)=\begin{cases}-t, & 0\le t\le 1,\\ t-2, & 1\le t\le 2.\end{cases}$$

Оптимальное управление для линейной модели. $v^*(t)$ имеет вид управление (только значения $-1$ и $+1$ с переключениями).

Интегрируя $v^*(t)$, получают кусочно-квадратичные траектории:

- положение $x_{1*}(t)$.
- скорость $x_{2*}(t)$, которые переводят систему из $(1,0)$ в $(0,0)$.

Управление для системы Дуффинга находится подстановкой:

$$u^*(t) = \ddot{x}_1{}^*(t) + x_1^*(t) + 2x_{1*}^3(t),$$

поэтому оно получается кусочно-полиномиальным (до 6-й степени).

- При фиксированном времени $t_1 = 4$ — несколько переключений.
- При минимальном времени $t_{1*} = 2$ — одно переключение (разгон → торможение).

Главная идея: сначала решают простую линейную задачу быстродействия, потом по найденной траектории вычисляют управление для нелинейной системы Дуффинга.

## 2.5 Программная реализация численного алгоритма

Поскольку часть аналитических выражений исходной системы представлена в виде графических формул, для демонстрации работы численного алгоритма использована стандартная модель осциллятора Дуффинга. Разработанный программный алгоритм сохраняет универсальность и может быть адаптирован к исходной системе после подстановки точных аналитических выражений.

1.1. Подключаются библиотеки

- `numpy` — работа с векторами и сетками.
- `solve_ivp` — численное решение ОДУ (траектория системы).
- `interp1d` — непрерывное управление из дискретных значений.
- `matplotlib` — построение графиков результатов.

1.2. Задается модель системы (Duffing)

Параметры `alpha, beta, delta` определяют:

- нелинейную пружину,
- демпфирование,
- форму потенциала.

То есть полностью задают динамику:

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -\delta x_2 - \alpha x_1 - \beta x_1^3 + u.$$

1.3. Ограничивается управление

`u ∈ [-1, 1]`

Это физическое ограничение на силу управления.

1.4. Задаются начальная и целевая точки

`x(0) = [1,1],  x(T) → [0,0]`

Цель — привести систему в ноль.

1.5. Вводится терминальный штраф

rho_terminal = 200

Заставляет алгоритм сильнее «тянуть» конечное состояние к цели.

1.6. Дискретизация управления

N = 500

Управление представляется как набор значений на сетке по времени.

1.7. Параметры итерационного метода

- step_u = 0.5 — шаг обновления управления (скорость градиентного метода).
- max_iters = 80 — максимум итераций оптимизации.

2. Динамика системы (прямая задача)

def f(t, x, u_fun):

Описывает правую часть ОДУ Дуффинга:

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -\delta x_2 - \alpha x_1 - \beta x_1^3 + u(t).$$

- u_fun(t) — управление как непрерывная функция времени
- возвращается вектор скорости состояния $\dot{x}$

Чтобы:

- численно интегрировать траекторию $x(t)$ через solve_ivp;
- получить состояние системы при текущем управлении;
- далее посчитать функционал и градиент.

Это прямая система**.**

3. Линеаризация по состоянию

def dfdx(t, x, u_fun):

Матрица Якоби:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + 3\beta x_1^2) & -\delta \end{pmatrix}.$$

Это линеаризация динамики около текущей траектории. Используется для:

- построения сопряженной системы;

- вычисления градиента функционала;
- методов оптимального управления (Понтрягин, градиентный спуск).

Сопряженная система (adjoint)

`def adjoint_rhs(t, p, x_fun, u_fun):`

Реализует уравнение:

$$\dot{p} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T p.$$

где:

- $p(t)$ — сопряженная переменная (costate),
- зависит от траектории $x(t)$.

Сопряженная система — ключевой элемент:

- принципа максимума Понтрягина
- градиентных методов оптимального управления

Через $p(t)$ вычисляется:

$$\frac{\partial J}{\partial u}(t),$$

то есть как менять управление, чтобы уменьшить функционал.

4. Решение прямой и сопряженной задачи

`solve_forward(...)`

Что делает:

- по заданному управлению $u(t)$ интегрирует прямую систему Дуффинга;
- возвращает:
  - траекторию состояния $x(t)$,
  - интерполятор $x(t)$ для непрерывного времени.
- без прямой траектории нельзя посчитать функционал и градиент.

Это шаг «прогон системы при текущем управлении».

`solve_adjoint(...)`

- решает сопряженную систему Понтрягина назад по времени;
- начальное условие:

$$p(T) = \rho(x(T) - x_T)$$

идет из терминального штрафа.

- через $p(t)$ вычисляется градиент функционала по управлению.

Это шаг «как менять управление, чтобы уменьшить ошибку».

5. Функционал и улучшение управления

Функционал

$$J = T + \frac{1}{2}\rho \parallel x(T) - x_T \parallel^2$$

Смысл:

- минимизируем время
- и одновременно штрафуем недостижение цели.

improve_u_for_fixed_T(...)

Что происходит внутри итераций:

1. Решается прямая система → получаем $x(t)$.
2. Решается сопряженная система → получаем $p(t)$.
3. Градиент:

$$\frac{dJ}{du}(t) = p_2(t)$$

4. Обновление управления:

$$u^{k+1} = clip(u^k - step \cdot p_2)$$

5. Проверка сходимости.

- это градиентный метод оптимального управления при фиксированном $T$.

Итог: находим лучшее управление для данного времени.

6) Поиск лучшего времени $T$

solve_min_time(...)

Что делает:

- перебирает несколько кандидатов времени $T$;
- для каждого:
  - оптимизирует управление,
  - считает функционал;
- выбирает минимальный $J$.

Плюс:

- используется warm start (передаем предыдущее управление), что ускоряет сходимость.

Это простой способ решить задачу минимального времени.

7. Графики

Строятся три графика:

1. Траектория состояния $x_1(t), x_2(t)$ показывает, как система приходит к цели.
2. Оптимальное управление $u(t)$ показывает, какое воздействие нужно.
3. Сходимость функционала по итерациям доказывает работоспособность метода.

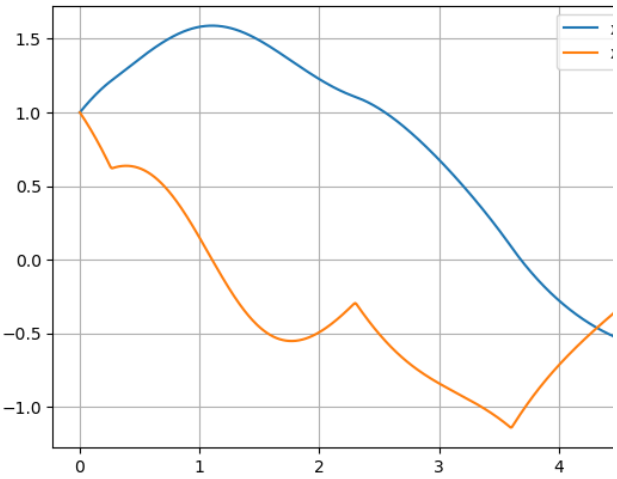



Рисунок 2.1 — Траектории $x_1(t), x_2(t)$. Система приближается к заданному состоянию, но не полностью удовлетворяет условиям $S_1$.

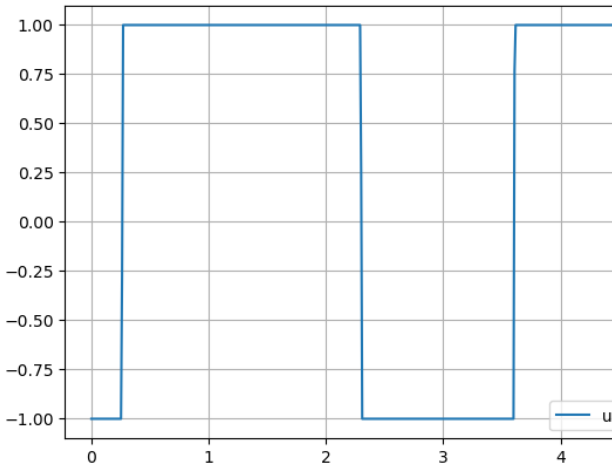



Рисунок 2.2 — Управление $u(t)$. Управление имеет кусочно-постоянный характер.

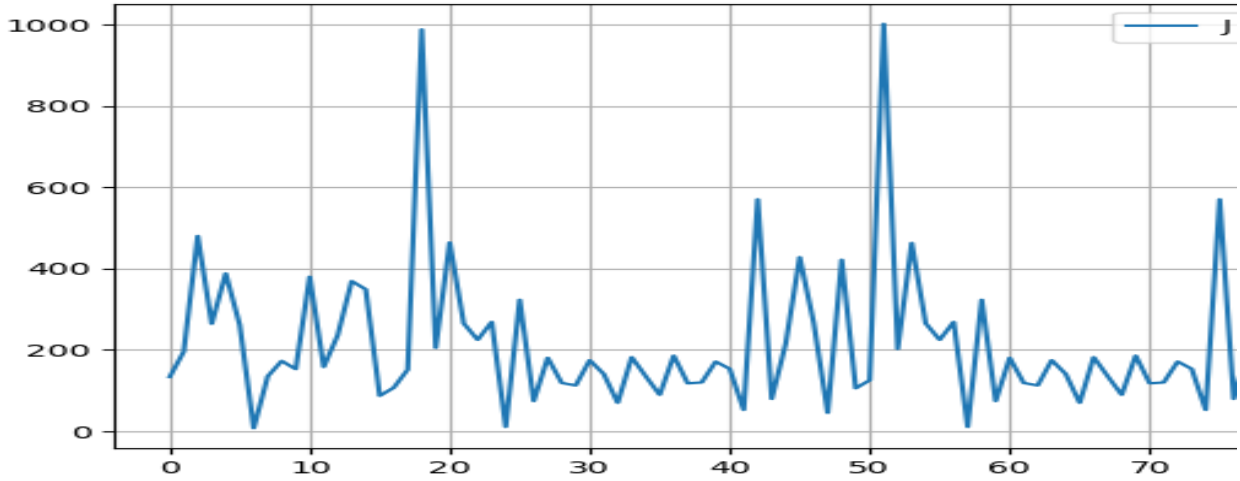


Рисунок 2.3— Изменение функционала $J$ по итерациям. Наблюдаются колебания, сходимость нестабильна.

## Основные выводы по второй части

Во второй части диссертационной работы исследуются задачи управляемости и оптимального быстродействия нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений при наличии ограничений на значения управления. Основное внимание уделено разработке конструктивных методов решения, их теоретическому обоснованию и проверке на модельных динамических системах.

Показано, что задача управляемости нелинейных систем может быть сведена к задаче минимизации функционала, для которой построены градиентные процедуры, доказана сходимость минимизирующих последовательностей и получены условия существования допустимого и оптимального управления. Разработаны два метода решения задачи оптимального быстродействия нелинейных систем, обеспечивающие алгоритмическую реализуемость полученных результатов.

Работоспособность предложенных подходов подтверждена на модельных примерах, включая нелинейное уравнение Дуффинга и задачу управления математическим маятником, где продемонстрировано согласование теоретических результатов с данными численных расчетов. Выполнена программная реализация вычислительных алгоритмов, подтверждающая применимость разработанных методов для анализа и оптимизации динамики нелинейных управляемых систем.

# 3 УПРАВЛЯЕМОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## 3.1 Преобразование

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый линейным обыкновенным дифференциальным уравнением с подынтегральным управлением следующего вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + C(t)\int_a^b K(t,\tau)\,v(\tau)d\tau + \mu(t), t \in I = [t_0, t_1], \quad (3.1.1)$$

$$\tau \in I_2 = [a, b]$$

с кривыми условиями

$$(x(t_0) = x_0) \in S_0, \qquad (x(t_1) = x_1) \in S_1, \qquad S_0 \subset R^n, \quad S_1 \subset R^n, \quad (3.1.2)$$

с ограничениями на значения управления

$$u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I_1, R^m) | u(t) \in U_1(t) \subset L_2(I_1, R^m), \text{п.в. } t \in I_1\}, \quad (3.1.3)$$

$$v(\tau) \in V(\tau) = \{v(\cdot) \in L_2(I_2, R^{n_1}) | v(\tau) \in V_1(\tau) \subset L_2(I_2, R^{n_1}) \text{п.в. } \tau \in I_2\}, \quad (3.1.4)$$

Исходные данные: $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $t \in I_1$ – заданные матрицы порядков $n \times n$, $n \times m$, $n \times m_1$ соответственно, с кусочно-непрерывными элементами; $K(t,\tau)$ – известная матрица порядка $m_1 \times n_1$ с элементами из $L_2$, $\mu(t) \in L_2(I_2, R^n)$ – заданная функция, $S_0 \subset R^n$, $S_1 \subset R^n$ – заданные выпуклые замкнутые множества, определяющие ограничения на начальное и конечное состояние фазовых переменных, $U_1(t) \subset L_2(I_1, R^m)$, $V_1(\tau) \subset L_2(I_2, R^{n_1})$ – заданные выпуклые замкнутые множество. В частности, множества

$$S_0 = \{x_0 \in R^n | |x_0 - x_1| \le r\}, S_0 = \{x_0 \in R^n | c_i \le x_{0i} \le d_i, i = \overline{1,n}\},$$

$$S_1 = \{x_1 \in R^n | |x_1 - x_1| \le R\}, S_1 = \{x_1 \in R^n | \overline{c_i} \le x_{1i} \le d_i, i = \overline{1,n}\},$$

где $\overline{x_0} \in R^n$, $\overline{x_1} \in R^n$ – фиксированные векторы, $r, R$ – заданные числа, $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n}) \in R^n$, $x_1 = (x_{11}, \dots, x_{1n}) \in R^n$, $c_i, d_i, i = \overline{1,n}$ – фиксированные числа.

Множество

$$U_1 = \{u(\cdot) \in L_2(I_1, R^m) | \|u - \bar{u}\| \le r, \text{ п.в. } t \in I_1\},$$

$$U_1 = \{u(\cdot) \in L_2(I_1, R^m) | \alpha_i(t) \le u_i(t) \le \beta_i(t), \ i = \overline{1,n} \ \text{ п.в. } t \in I_1\},$$

$$V_1(\tau) = \{v(\cdot) \in L_2(I_1, R^{n_1}) | \|v - \bar{v}\| \le R, \text{ п.в. } \tau \in I_1\},$$

$$V_1(\tau) = \{v(\cdot) \in L_2(I_1, R^{n_1}) | \overline{\alpha}_i(\tau) \le v_i(\tau) \le \overline{\beta}_i(\tau), i = \overline{1,n} \ \text{ п.в. } \tau \in I_2\},$$

где $r > 0$, $R > 0$ – заданные числа, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$, $v(\tau) = (v_1(\tau), \dots, v_{n_1}(\tau))$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $t \in I_1$, $\alpha_i(\tau)$, $\beta_i(\tau)$, $\tau \in I_2$ – заданные непрерывные функции, п.в. почти всюду.

Рассматривается два случая: 1) Когда моменты времени $t_0, t_1, t_1 > t_0$ – фиксированы; 2) $t_0$ – фиксирован, найти наименьшее значение $t_1, t_1 > 0$ когда краевая задача (3.1.1) – (3.1.4) имеет решение. Во втором случае краевая задача (3.1.1) – (3.1.4) называется задачей оптимального быстродействия.

**Определение 3.1.** *Пусть моменты времени $t_0, t_1 > t_0$ – фиксированы. Решение дифференциального уравнения с подынтегральным управлением (3.1.1) называется управляемым в моменте времени $t_0$, если существуют управления $u_*(t) \in U(t)$, $v_*(\tau) = V(\tau)$, которые переводят траекторию уравнения (3.1.1) из точки $x_{0_*}(t) = x_*(t_0) \in S_0$ в момент времени $t_0$ в точку $x_{1_*}(t) = x_*(t_1) \in S_1$ в момент времени $t_1$.*

**Определение 3.2.** *Четверка $(u_*(t), v_*(\tau), x_{0_*}, x_{1_*}) \in U(t) \times V(\tau) \times S_0 \times S_1$ называется допустимой, если функция $x_*(t) = x_*(t; t_0, x_{0_*}, u_*, v_*)$, $t \in I_1$ – решение дифференциального уравнения (3.1.1) удовлетворяет условиюю (3.1.2). Множество всей допустимой четверки обозначаем через $\Sigma$.*

**Задача 3.1.1.** *Найти необходимое и достаточное условия управляемости для процесса, описываемого дифференциальным уравнением (3.1.1) с подынтегральным уравнением управлением при условиях (3.1.2) – (3.1.4).*

*Иными словами, найти необходимое и достаточное условия того, чтобы множество $\Sigma$ было не пусто.*

**Задача 3.1.2.** *Пусть множество $\Sigma \neq \emptyset$, $\emptyset$ – пустое множество, $\Sigma = \{(u_*(t) \in U, v_*(\tau) \in V(\tau), x_{0_*} \in S_0, x_{1_*} \in S_1)\}$. Найти все множества допустимой четверки, где управления $(u_*(t) \in U, v_*(\tau) \in V(\tau)$ переводят траекторию уравнения (3.1.2), исходящую из точки $x_{0_*} = x_*(t_0) \in S_0$ в момент времени $t_0$, в точку $x_{1_*} = x_*(t_1) \in S_1$, $t_1 > t_0$, $t_0$, $t_1$ – фиксированы.*

Иными словами, найти множество$\Sigma$.

**Задач 3.1.3.** *Пусть* $x_*(t) = x_*(t;\ t_0, x_{0_*}, u_*, v_*) \in AC(I_1, R^n)$ *– решение дифференциального уравнения (3.1.1) соответствующее допустимой четверке* $(u_*,\ v_*(\tau), x_{0_*},\ x_{1_*} \in \Sigma$. *Найти множество всех решений*

$$\Gamma = \{x_*(t) = x_*(t;\ t_0, x_{0_*}, u_*, v_*) | (u_*, v_*,\ x_{0_*},\ x_{1_*}) \in \Sigma \subset AC(I_1, R^n).$$

**Задач 3.1.4.** *Пусть* $t_0$ *– фиксировано,* $t_1$ *– не фиксировано,* $t_1 > t_0$. *Найти четверку* $(u_*(t), v_*(\tau),\ x_{0_*},\ x_{1_*}) \in \Sigma$ *и наименьшее значение* $t_{1_*}, t_{1_*} > t_0$.

## 3.2 Необходимые и достаточные условия управляемости

Для решения задачи 3.1.1 – 3.1.4, рассмотрим задачу управляемости для линейной системы

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)w_1(t) + C(t)w_2(t) + \mu(t), \qquad t \in I_1, \tag{3.2.1}$$

$$y(t_0) = x_0 = x(t_0) \in S_0, y(t_1) = x_1 = x(t_1) \in S_1, \tag{3.2.2}$$

$$w_1(\cdot) \in L_2(I_2, R^m), w_2(\cdot) \in L_2(I_2, R^{m_1}). \tag{3.2.3}$$

**Теорема 3.2.1.** *Для существования управления* $w_*(\cdot) = w_{1*}(\cdot), w_{2*}(\cdot) \in L_2(I_2, R^m) \times L_2(I_2, R^{m_1})$ *которые переводит траекторию уравнения (3.2.1) из начальной точки* $y(t_0) = x_0 \in S_0$ *в точку* $y(t_1) = x_1 \in S_1$ *необходимо и достаточно, чтобы матрица*

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi\,(t_0, t) B_1(t) B_1^*(t) \Phi^*(t_0, t) dt \tag{3.2.4}$$

*порядка* $n \times n$ *была положительно определенной, где* $B_1(t) = (B(t), \mathrm{C}(t))$.

**Доказательство.** Линейное управления системы (3.2.1) – (3.2.3) отличается от (3.2.2) – (3.2.4) тем, что точка $x_0 \in S_0, x_1 \in S_1$. Теорема 3.1.1 верна для любых точек $x_0 \in R^n, x_1 \in R^n$. Следовательно, утверждение теоремы 3.1.1 остается верным, в частности, когда $x_0 \in S_0, x_1 \in S_1$.

**Теорема 3.2.2.** *Пусть матрица* $W(t_0, t_1)$ *определяемая по формуле (3.2.4) положительно определенная. Тогда управление* $w_*(\cdot) = (w_{1*}(\cdot),\ w_{2*}(\cdot)) \in L_2(I_2, R^{m+m_1})$ *переводит траекторию уравнение (3.2.1) из точки* $y_*(t_0) = x_{0*} \in S_0$ *в точку* $y_*(t_1) = x_{1*} \in S_1$, *тогда и только тогда, когда*

$$w_*(t) \in W_1 = \{w_*(\cdot) \in L_2(I_2, R^{m+m_1}) | w_*(t) = p_*(t) + \lambda_1(t, x_{0*}, x_{1*}) + N_1(t) z(t_1, p_*),$$

$$x_{0*} \in S_0,\ x_{1*} \in S_1, \forall p_*(\cdot) = p_{1*}(\cdot), p_{2*}(\cdot)) \in L_2(I_2, R^{m+m_1}\}, \tag{3.2.5}$$

*где*

$$\lambda_1(t, x_{0*}, x_{1*}) = B_1^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)a,$$

$$a = \Phi(t_0, t_1)x_{1*} - x_{0*} - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\,\mu(t)dt,$$

$$N_1(t) = -B_1^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1),$$

$p_*(\cdot) \in L_2(I_2, R^{m+m_1}\}$ *– любая функция, функция* $z(t) = z(t, p_*),\ t \in I_1$ *– решение дифференциального уравнения*

$$\dot{z}(t) = A(t)z + B_1(t)p_*(t),\ \ z(t_0) = 0, \quad t \in I_1. \qquad (3.2.6)$$

*Решение дифференциального уравнения (3.2.6) соответствующее управлению* $w_*(t) \in W_1$ *определяется по формуле*

$$y_*(t) = z(t, p_*) + \lambda_2(t, x_{0*}, x_{1*}) + N_2(t)z(t_1, p_*), \quad t \in I_1, \qquad (3.2.7)$$

*где*

$$\lambda_2(t, x_{0*}, x_{1*}) = \Phi(t, t_0)W(t, t_1)W^{-1}(t_0, t_1)x_{0*} +$$

$$+\Phi(t, t_0,)W(t, t_1)\,W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t, t_0)x_{1*} +$$

$$+\int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)\,\mu(\tau)d\tau - \Phi(t, t_0)W(t_0, t)\,W^{-1}(t_0, t_1)\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\,\mu(t)dt,\ t \in I_1$$

$$x_{0*} \in S_0, x_{1*} \in S_1;$$

$$N_2(t) = -\Phi(t, t_0)W(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1), \quad t \in I_1.$$

**Доказательство.** Отличия состоят в том, что точки $x_{0*} \in S_0, x_{1*} \in S_1$.

**Лемма 3.1.1.** *Для существования решения уравнения (3.1.1) при условиях (3.1.2) – (3.1.4) необходимо и достаточно выполнения следующих соотношений:*

1. *Матрица* $W(t_0, t_1)$ *определяемая по формуле (3.2.7) была положительно определенной;*
2. *Выполнены тождества*

$$u_*(t) = w_{1*}(t) = p_{1*} + T_0(t)x_{0*} + T_0(t)x_{1*} + \mu_{11}(t) + N_{11}(t)z(t_1, p_*),\ t \in I_1,$$

$$u_*(t) \in U(t), \qquad p_{1*}(\cdot) \in L_2(I_1, R^{m_1}\}, \qquad x_{0*} \in S_0,\ x_{1*} \in S_1 \qquad (3.2.8)$$

$$\int_a^b K(t,\tau)\, v_*(\tau)dt = w_{2*}(t)$$

$$= p_{2*} + T_2(t)x_{0*} + T_3(t)x_{1*} + \mu_{12}(t) + N_{12}(t)z(t_1, p_*),$$

$$v_*(\tau) \in V(\tau), \qquad p_{2*}(\cdot) \in L_2(I_1, R^{m_1}\}, \qquad x_{0*} \in S_0,\ x_{1*} \in S_1 \qquad (3.2.9)$$

**Доказательство.** Необходимым и достаточным условием существования $w_*(t) \in W_1$ является положительная определенность матрицы $W(t_0, t_1) > 0$. Тождества (3.2.8), (3.2.9) является необходимым и достаточным условием. Лемма доказана.

Из леммы следует, что допустимая четверка $(u_*(t), v_*(\tau),\ x_{0_*},\ x_{1_*}) \in \Sigma$ определяется из решения следующей задачи оптимального управления: минимизировать функционал

$$J(u(\cdot), v(\cdot), p_1(\cdot), p_2(\cdot), x_0, x_1) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \{|w_1(t) - u(t)|^2 + |w_2(t) - \textstyle\int_a^b K\,(t,\tau)\, v(\tau)dt|^2\}dt \to \inf \qquad (3.2.10)$$

при условиях

$$u(t) \in U(t), \qquad v(t) \in V(\tau), \qquad x_0 \in S_0,\ x_1 \in S_1 \qquad (3.2.11)$$

$$w_1(t) = p_1 + T_0(t)x_0 + T_1(t)x_1 + \mu_{11}(t) + N_{11}(t)z(t_1, p), \quad t \in I_1, \qquad (3.2.12)$$

$$w_2(t) = p_2 + T_2(t)x_0 + T_3(t)x_1 + \mu_{12}(t) + N_{12}(t)z(t_1, p), \quad t \in I_1, \qquad (3.2.13)$$

где функция $z(t) = z(t, p), \quad t \in I_1$ – решение дифференциального уравнения

$$\dot{z}(t) = A(t)z + B(t)p_1(t) + C(t)p_2(t),\ \ z(t_0) = 0, \quad t \in I_1$$

$$p_1(\cdot) \in L_2(I_2, R^m), p_2(\cdot) \in L_2(I_2, R^m). \qquad (3.2.14)$$

Введем следующие обозначения

$$X = U(t) \times V(\tau) \times L_2^{\rho}(I_1, R^m) \times L_2^{\rho}(I_1, R^{m_1}) \times S_0 \times S_1 \subset H,$$

$$H = L_2(I_1, R^m) \times L_2(I_1, R^{n_1}) \times L_2(I_1, R^{m_1}) \times L_2(I_1, R^{n_1}) \times R^n \times R^n,$$

$$\theta(\cdot) = (u(\cdot), v(\cdot), p_1(\cdot), p_2(\cdot), x_0, x_1) \in X \subset H.$$

**Лемма 3.2.2.** *Пусть матрица* $W(t_0, t_1) > 0$. *Тогда:*

*1) задача управляемости для системы (3.1.1) – (3.1.4) имеет решение тогда и только тогда, когда значение*

$$J(u_*(\cdot), v_*(\cdot), p_{1*}(\cdot), p_{2*}(\cdot), x_{0*}, x_{1*}) = 0,$$

*где* $(u_*(\cdot), v_*(\cdot), p_{1*}(\cdot), p_{2*}(\cdot), x_{0*}, x_{1*}) \in X_* \subset X \subset H$ *– оптимальное управление для задачи (3.2.10) - (3.2.14);*

*2) решением задач управляемости для системы (3.1.1) – (3.1.4) при* $J(\theta_*) = 0,\ \theta_* = (u_*(\cdot), v_*(\cdot), p_{1*}(\cdot), p_{2*}(\cdot), x_{0*}, x_{1*}) \in X_*$ *является функция*

$$x_*(t) = z(t_1, p_*)\lambda_2(t, x_{0*}, x_{1*}) + N_2(t)z(t_1, p_*),\quad t \in I_1,$$

*где* $z(t_1, p_*),\ t \in I_1$ *– решение дифференциального уравнения (3.2.14) при* $p_*(t) = p_{1*}(t), p_{2*}(t)),\quad t \in I_1;$

*3) множество всех допустимых четверок*

$$\Sigma = \{(u_*(\cdot), v_*(\cdot), x_{0*}, x_{1*})) \in U(t) \times V(\tau) \times S_0 \times S_1 | J(\theta_*) = 0,\ \forall \theta_* \in X_*;$$

*4) множество всех решений дифференциального уравнения (3.1.1) при условиях (3.1.2) – (3.1.4) равно*

$$\Gamma = \{x_*(t) = z(t_1, p_*) + \lambda_2(t, x_{0*}, x_{1*}) + N_2(t)z(t_1, p_*) \in AC(I_1, R^n) | J(\theta_*) = 0,$$

$$\forall (\theta_*) \in X_*\} \subset AC(I_1, R^n);$$

*5) если* $J(\theta_*) = 0,\ \theta_* \in X_*$, *то задача управляемости для системы (3.1.1) – (3.1.4) не имеет решения.*

**Доказательство.** Из положительной определенности матрицы $W(t_0, t_1)$ следует существования $w_1(t), w_2(t),\ t \in I_1$ определяемые соотношениями (3.2.12) – (3.2.13) соответствующие управляемости системы (3.2.1) – (3.2.3).

Как следует из оптимизационной задачи (3.2.10) – (3.2.14) значение функционала $J(u, v, p_1, p_2, x_{0*}, x_{1*}) \geq 0$. Значение $J(u_*, v_*, p_{1*}, p_{2*}, x_{0*}, x_{1*}) = J(\theta_*) = 0$ тогда и только тогда, когда выполнены тождества (3.2.8) – (3.2.9). Следовательно первое утверждения леммы следует из леммы 3.2.1.

Второе утверждение леммы следует из теоремы 3.2.2. Третье утверждение следует из первого утверждения леммы. Четвертое утверждение леммы следует

из второго утверждение леммы. Последнее утверждение леммы является следствием первого утверждения. Лемма доказана.

### 3.3 Построение решение задач управляемости

Оптимизационную задачу (3.2.10) – (3.2.14), с учетом введенных выше обозначений, представим в виде

$$J(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_0\,(q(t), t)dt \to inf,\ \ \theta \in X \subset H,$$

где $q(t) = (\theta(t), z(t_1, p)),\ \ p_1(t) \in L_2^{\rho}(I_1, R^{m_1}) = \{p_1(\cdot) \in L_2(I_1, R^{m}) | \|\rho_1\| \le \rho\},$

$$p_2(t) \in L_2^{\rho}(I_1, R^{m_1}) = \{p_2(\cdot) \in L_2(I_1, R^{m_1}) | \|\rho_2\| \le \rho\},$$

$$F_0(q(t), t) = |F_1(q(t), t)|^2 + |F_2(q(t), t)|^2,$$

$$F_1(q(t), t) = w_1 - u, F_2(q(t), t) = w_1 - \int_a^b K(t, \tau)\, v(\tau)d\tau.$$

Заметим, что: 1) есть $U(t), V(t), S_0, S_1$ – ограниченные выпуклые замкнутые множества, то $X$ – ограниченное выпуклое замкнутое множество в рефлексивном банаховом пространстве $H$, где $L_2(I_1, R^m)$, $L_2^{\rho}(I_1, R^{m_1})$ – ограниченные выпуклые замкнутые множества в гильбертовом пространстве $L_2$.

2) функционал $J(\theta),\ \theta \in X$ – ограничен снизу в силу того, что $J(\theta) \ge 0,\ \forall\theta \in X$. Легко убедиться в том, что квадратичный функционал $J(\theta),\ \theta \in X$ – выпуклый в силу того, что $z(t, \alpha\bar{p} + (1-\alpha)\bar{\bar{p}}) = \alpha z(t, \bar{p}) + (1-\alpha)z(t, \bar{\bar{p}}), \forall\bar{p}, \bar{\bar{p}} \in L_2^{\rho}(I_1, R^{m+m_1}),\ \alpha \in [0,1]$.

3) Известно, что ограниченное выпуклое замкнутое множество $X$ в рефлексивном банаховом пространстве $H$ слабо бикомпактно, непрерывный выпуклый функционал $J(\theta),\ \theta \in X$ – слабо полу непрерывен снизу.

4) Слабо полу непрерывный снизу функционал $J(\theta),\ \theta \in X$ на слабо бикомпактным множестве достигает нижней грани на множестве $X$, следовательно, множество

$$X_* = \theta_* \in X | J(\theta_*) = J_* = \inf_{\theta \in X} J(\theta) = \min_{\theta \in X} J(\theta)\} \ne \emptyset,$$

где $\emptyset$ – пустое множество.

Частные производные функции $F_0(q, t)$ равны:

$$F_{0x_0}(q,t) = 2\,T_0^*(t)F_1(q,t) + 2\,T_2^*(t)F_2(q,t),$$

$$F_{0x_1}(q,t) = 2\,T_1^*(t)F_1(q,t) + 2\,T_2^*(t)F_2(q,t),$$

$$F_{0z(t_1)} = 2\,N_{11}^*(t)F_1(q,t) + 2\,N_{12}^*(t)F_2(q,t),$$

$$F_{0p_1}(q,t) = 2\,F_1(q,t),\ \ F_{0p_2}(q,t) = 2\,F_2(q,t),\ \ F_{0u}(q,t) = -2\,F_1(q(t),t).$$

**Теорема 3.3.1.** *Пусть матрица $W(t_0,t_1)$ положительно определенная. Тогда функционал (3.2.10) при условиях (3.2.11) – (3.2.14) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент*

$$J'(\theta) = (J'_u(\theta),\, J'_v(\theta),\, J'_{p_1}(\theta),\, J'_{p_2}(\theta),\, J'_{x_0}(\theta),\, J'_{x_1}(\theta)) \in H$$

*в любой точке $\theta \in X$ определяется по формуле*

$$J'(\theta) = -F_{0u}(q(t),t),$$

$$J'_v(\theta) = 2\int_{t_0}^{t_1} K^*(t,\tau)\,w_2(t)dt + 2\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b K^*(t,\tau)\,K(t,\tau)v(\tau)d\tau dt,$$

$$J'_{p_1}(\theta) = 2F_1(q,t) - B^*(t)\psi(t),\quad J'_{p2}(\theta) = 2F_2(q,t) - C^*(t)\psi(t), \qquad (3.3.1)$$

$$J'_{x_0}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_{0x_0}(q(t),t)dt\,,\quad J'_{x_1}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_{0x1}(q(t),t)dt,$$

*где $\psi(t), t \in I_1$ – решение сопряженной системы*

$$\dot{\psi} = -A^*(t)\psi(t),\ \ \psi(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} F_{0z_{(t_1)}}(q(t),t)dt, \qquad (3.3.2)$$

$$F_{0z(t_2)}(q(t),t) = 2\,N_{11}^*(t)F_1(q(t),t) + 2\,N_{12}^*(t)F_2(q(t),t),\ \ t \in I_1,$$

*функция $z(t) = z(t,p),\ \ t \in I_1$ – решение дифференциального уравнения (3.2.14). Кроме того, градиент удовлетворяет $J'(\theta),\ \theta \in X$ условия Липшица*

$$\|J'(\theta_1) - J'(\theta_2)\| \le K\|\theta_1 - \theta_2\|, \ \ \forall\theta_1, \theta_2 \in X. \qquad (3.3.3)$$

**Доказательство.** Пусть $\theta, \theta + \Delta\theta \in X$, $\Delta\theta = (\Delta u, \Delta v, \Delta p_1, \Delta p_2, \Delta x_{0*}, \Delta x_{1*})$. Можно показать, что приращение функционала

$$\Delta J = J(\theta + \Delta\theta) - J(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} \{\Delta u^*(t) F_{0u}(q(t) + \Delta p_1^*(t)[F_{0p1}(q,t) - B^*(t)\psi(t)] +$$

$$+\Delta p_2^*(t)[F_{0p2}(q,t) - C^*(t)\psi(t)] + \Delta x_0^*(t) F_{0x0}(q,t) + \Delta x_1^*(t) F_{0x_1}(q,t)\}dt +$$

$$+ \int_a^b \Delta v^*(\tau) J'_V d\tau + R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

где

$$R_1 = \int_{t_0}^{t_1} |\Delta w_1 - \Delta v|^2 dt, \ \ R_2 = \int_{t_0}^{t_1} \left| \int_a^b K(t,\tau)\Delta v(\tau) d\tau - \Delta w_2(t) \right|^2 dt,$$

$$R_3 = \int_{t_0}^{t_1} \Delta x_0^* [F_{0x0}(q + \Delta q, t) + F_{0x_0}(q,t)] dt,$$

$$R_4 = \int_{t_0}^{t_1} \Delta x_1^* [F_{0x_1}(q + \Delta q, t) - F_{0x_1}(q,t)] dt,$$

$$|R| \le c_1 \|\Delta\theta\|^2, \quad \Delta q(t) = (\Delta\theta(t), z(t_1, p).$$

Из (3.2.11) – (3.2.14) следует, что производная Фреше функционала (3.2.10) при условиях (3.2.11) (3.2.14) определяется по формуле (3.3.1), где $\phi(t), \ t \in I_1$ решение – дифференциального уравнения (3.3.2).

Пусть $\theta_1 = \theta + \Delta\theta, \ \ \theta_2 = \theta$. Тогда

$$J'(\theta_1) - J'(\theta_2) = F_{0u}(q + \Delta q, t) - F_{0u}(q,t), \quad J'_v(\theta + \Delta\theta) - J'_v(\theta),$$

$$2F_1(q + \Delta q, t) - 2F_1(q,t) - B^*(t)\Delta\psi(t),$$

$$2F_2(q + \Delta q, t) - 2F_2(q,t) - C^*(t)\Delta\psi(t),$$

$$\int_{t_0}^{t_1} [F_{0x0}(q + \Delta q, t) - F_{0x_0}(q,t)] dt \, , \int_{t_0}^{t_1} [F_{0x_1}(q + \Delta q, t) - F_{0x_1}(q,t)] dt.$$

Следовательно

$$|J'(\theta_1) - J'(\theta_2)| \le L_1|\Delta q(t)| + L_2|\Delta\psi(t)| + L_3\|\Delta q\|,$$
$$\|J'(\theta_1) - J'(\theta_2)\|^2 = \int_{t_0}^{t_1}|J'(\theta_1) - J'(\theta_2)|^2 dt \le L_4\|\Delta q\|^2 + L_5\int_{t_0}^{t_1}|\Delta\psi(t)|^2 dt, \quad (3.3.4)$$

Так как

$$\dot{\Delta\psi} = -A^*(t)\Delta\psi(t),\ \ t \in I_1,\ \ \Delta\psi(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1}[F_{0z_{(t_1)}}(q+\Delta q, t) - F_{0z_{(t_1)}}(q,t)]dt,$$

то

$$\Delta\psi(t) = \Delta\psi(t_1) + \int_{t}^{t_1} A^*(t)\Delta\psi(t),\ \ t \in I_1,$$

$$|\Delta\psi(t)| \le |\Delta\psi(t_1)| + A^*_{\max}\int_t^{t_1}|\Delta\psi(\tau)|d\tau \le L_6\int_{t_0}^{t_1}|\Delta q(t)|dt + A^*_{\max}\int_t^{t_1}|\Delta\psi(\tau)|d\tau,$$

$$\|\Delta q(t)\| \le c_2\|\Delta\theta\|,\ \ |\Delta z(t,p)| \le c_3\|\Delta p_1\| + c_4\|\Delta p_2\|.$$

Отсюда, применяя лемму Гронуолла, получим

$$|\Delta\psi(t)| \le L_7 e^{A^*_{\max}(t_1-t_2)}\|\Delta\theta\|. \quad (3.3.5)$$

из (3.3.4), (3.3.5) следует оценка (3.3.3) теорема доказана.

На основе результатов теоремы 3.3.1 строим последовательности $\{\theta_n\} = \{u_n,\ v_k, p_{1n}, p_{2n}, x_{0n}, x_{1n}\} \subset X$ по алгоритму

$$u_{n+1} = P_U\left[u_n - \alpha_n J'_u(\theta_n)\right],\ \ v_{n+1} = P_V\left[v_n - \alpha_n J'_v(v_n)\right],$$
$$p_{1n+1} = P_{L_2^p}[p_{1n} - \alpha_n J'_{p_1}(\theta_n)],\ \ p_{2n+1} = P_{L_2^p}[p_{2n} - \alpha_n J'_{p_2}(\theta_n)],$$
$$x_{0n+1} = P_{S_0}[x_{0n} - \alpha_n J'_{x0}(\theta_n)],\ \ x_{1n+1} = P_{S_1}\left[x_{1n} - \alpha_n J'_{x1}(\theta_n)\right],$$
$$n = 0,1,2,\dots,\ \ 0 < \xi_0 \le \alpha_n \le \frac{2}{K+2\varepsilon_1},\ \varepsilon_1 > 0, \quad (3.3.6)$$

где $K > 0$ – постоянная Липшица из (3.3.3), в частности, в случае $\varepsilon_1 = \frac{K}{2}$ имеем $\varepsilon_0 = \alpha_n = \frac{1}{K}$. Получаем, что $U, V, S_0, S_1$ – ограниченные выпуклые

замкнутые множества, $P_\Omega[\cdot]$ – проекция точки на множестве $\Omega$. Любая точка имеет единственную проекцию на выпуклом замкнутом множестве.

**Теорема 3.3.2.** *Пусть матрица* $W(t_0, t_1) > 0$, *последовательность* $\{\theta_n\}$ *определяется по формуле (*3.3.6*). Тогда:*

*1) числовая последовательность* $\{J(\theta_n)\}$ *строго убывает;*

*2)* $\|\theta_n - \theta_{n+1}\| \to 0$ *при* $n \to \infty$*;*

*3) последовательность* $\{\theta_n\} \subset X$ *является минимизирующей* $\lim\limits_{n\to\infty} J(\theta_n) = J_* = \inf\limits_{\theta\to X} J(\theta)$*;*

*4) множество* $X_* = \{\theta_* \in X | J(\theta_*) = J_* = \inf\limits_{\theta\to X} J(\theta) = \min\limits_{\theta\to X} J(\theta)\}$ *не пусто, нижняя грань функционала* $J(\theta)$, $\theta \in X$ *– достигается на множестве* $X$*;*

*5) последовательно* $\{\theta_n\} \subset X$ *слабо сходится к множеству* $X_*, u_n \overset{\text{сл}}{\to} u_*, v_n \overset{\text{сл}}{\to} v_*, p_{2n} \overset{\text{сл}}{\to} p_{2*}, x_{0n} \overset{\text{сл}}{\to} x_{0*}, x_{1n} \overset{\text{сл}}{\to} x_{1*}$ *при* $n \to \infty$, *где* $(u_*, v_*, p_{1*}, p_{2*}, x_{0*}, x_{1*}) \in X_*$;

*6) справедлива следующая оценка скорости сходимости*

$$0 \le J(\theta_n) - J_* \le \frac{m_0}{n} \quad , \quad n = 1,2, \ \dots, m_0 = const > 0,$$

*где* $J(\theta_*) = J_*$*;*

*7) задача управляемости (3.1.1) – (3.1.4) имеет решение тогда и только тогда, когда значение* $J(\theta_*) = 0$. *При этом решение задачи управляемости (3.1.1) – (3.1.4) функция*

$$x_*(t) = z(t, p_*) + \lambda_*(t, x_{0*}, x_{1*}) + N_2(t) z(t_1, p_*), \ t \in I_1.$$

*Если* $J(\theta_*) > 0$, *то задача управляемости (3.1.1) – (3.1.4) не имеет решения, в этом случае* $x_*(t)$, $t \in I_1$ *является наилучшим необходимым решением задачи управляемости (3.1.1) – (3.1.4).*

**Доказательства.** Из свойства проекции точки на множестве имеем

$$< J'(\theta_n), \ \theta - \theta_{n-1} > \ge \frac{1}{\alpha_n} < \theta_n - \theta_{n-1}, \theta - \theta_{n-1}, \ \ \forall\theta, \ \theta \in X. \qquad (3.3.7)$$

Так как $J'(\theta) \in C^{1,1}(X)$, $X$ – выпуклое множество, то верна оценка

$$J(\theta_1) - J(\theta_2) \ge < J'(\theta_1), \ \theta_1 - \theta_2 > - \frac{K}{2} \|\theta_1 - \theta_2\|^2, \ \ \forall\theta_1, \ \theta_2 \in X. \qquad (3.3.8)$$

Из (3.3.7) и (3.3.8) при $\theta = \theta_n$, $\theta_1 = \theta_n$, $\theta_2 = \theta_{n+1}$, получим

$$J(\theta_n) - J_1(\theta_{n+1}) \ge \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{K}{2}\right) \|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2 \ge \xi_1 \|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2, \ \frac{1}{\alpha_n} - \frac{K + 2\varepsilon_1}{2}. \qquad (3.3.9)$$

Из неравенства (3.3.9) следует, что числовая последовательность $\{J(\theta_n)\}$ строго убывает, а также из-за ограниченности снизу значения функционала $\|\theta_n - \theta_{n+1}\| \to 0$ при $n \to \infty$. Итак, доказаны утверждения 1), 2) теоремы.

Функционал $J(\theta), \theta \in M_0$ – слабо полу непрерывен снизу на слабо бикомпактном множество $X$, то множество пустое множество. Последовательность $\{\theta_n) \subset M_0$. Тогда из-за слабо бикомпактность множества $M_0$ следует $\theta_n \overset{\text{сл}}{\to} \theta_*$ при $n \to \infty$, $\theta_* \in X_*$. Итак, доказаны утверждения 4), 5) теоремы.

Для выпуклого функционала $J(\theta) \in C^{1,1}(M_0)$ верно неравенство

$$J(\theta_n) - J(\theta_*) \leq < J'(\theta_n),\ \theta_n - \theta_* \geq < J'(\theta_n),\ \theta_n - \theta_{n+1} + \theta_{n+1} - \theta_* \geq$$

$$= < J'(\theta_n),\ \theta_n - \theta_{n+1} > - < J'(\theta_n), \theta_* - \theta_{n-1} >.$$

Отсюда, с учетом неравенства при $\theta \in \theta_*$, имеем

$$0 \leq J'(\theta_n) - J_* \leq < J'(\theta_n), \theta_n - \theta_{n+1} > - \frac{1}{\alpha_n} < \theta_n - \theta_{n+1}, \theta_* - \theta_{n+1} > \geq$$

$$\geq < J'(\theta_n) - \frac{1}{\alpha_n}(\theta_* - \theta_{n+1}), \theta_n - \theta_{n+1} > \leq$$

$$\leq \left\| J'(\theta_n) - \frac{1}{\alpha_n}(\theta_* - \theta_{n+1}) \right\| \|\theta_n - \theta_{n+1}\| \leq \left( \|J'(\theta_n)\| + \frac{1}{\alpha_n} \right) \|\theta_* - \theta_{n+1}\| =$$

$$= \|\theta_n - \theta_{n+1}\| c_0 \|\theta_n - \theta_{n+1}\| \qquad (3.3.10)$$

где $\|\theta_* - \theta_{n+1}\| \leq D$, $\frac{1}{\alpha_n} \leq \frac{r}{\xi_0}$, $c_0 = \sup \|J'(\theta_n)\| + \frac{D}{\xi_0}$, $D -$ диаметр множества $M_0$. Так как $\|\theta_n - \theta_{n+1}\| \to 0$ при$n \to \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} J(\theta_n) = J_* = J(\theta_*)$. Это означает, что последовательность $\{\theta_n\} \subset M_0$ является минимизирующий.

Из неравенств (3.3.9), (3.3.10) имеем $J(\theta_n) - J(\theta_{n+1}) = a_n - a_{n+1} \geq \varepsilon_1 \|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2$, $a_n - a_{n+1} \geq c_0 \|\theta_n - \theta_{n+1}\|, a_n = J(\theta_n) - J_* = J(\theta_n) - J(\theta_*)$. Тогда $a_n > 0, a_n - a_{n+1} \geq \frac{\varepsilon_1}{c_0^2} a_n^2, n = 1,2,\ldots, m_0 \geq \frac{c_0^2 \varepsilon_1}{\varepsilon_1}$. Теорема доказана.

Условия последовательность $\{\mathrm{a_n}\}$ такая, что $\mathrm{a_n} > 0$, $\mathrm{a_n} - \mathrm{a_{n+1}} \geq \Lambda \mathrm{a_n^2}, \mathrm{n} = 1,2,\ldots,$ $\Lambda \geq 0$. Тогда $a_n < \frac{1}{\Lambda n}$, $n = 1,2,\ldots$.

Разность

$$\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - a_{k+1}}{a_k a_{k+1}} \geq \frac{\Lambda a_k^2}{a_k a_{k+1}} = \frac{\Lambda a_k}{a_{k+1}}, k = 1,2,\ldots,$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k})=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_0},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Lambda a_k}{a_{k+1}}=(\frac{a_0}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n})>\Lambda n,$$

где $\frac{a_k}{a_{k+1}}>1$. Следовательно $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_0}>\Lambda n, n=1,2,\ \ldots\ .$ Лемма доказана.

В частности, при $\Lambda=\frac{\varepsilon_1}{c_0^2}$, получим $a_n\le\frac{c_0^2}{\varepsilon_1 n}, n=1,2,\ldots.$

### 3.4 Решение модельной задачи

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый дифференциальным уравнением с подынтегральном уравнением следующего вида

$$\dot{x_1}=x_2,\ \dot{x_2}=u+\int_1^2 e^{(t+1)\tau}\,v(\tau)d\tau,\ \ t\in I_1=[0,2],\ \ \tau\in I_2=[1,2], \qquad (3.4.1)$$

$$(x_{10}(0),\ x_{20}(0))\in S_0=\{-1\le x_{10}\le 1,\ \ 1\le x_{20}\le 2\}, \qquad (3.4.2)$$

$$(x_{11}(2),\ x_{21}(2))\in S_1=\{-1\le x_{11}(2)\le 1,\ \ -2\le x_{21}(0)\le -1\}, \qquad (3.4.3)$$

$$u(t)\in U=\{u(\cdot)\in L_2(I_2,R^1)|\ -1\le u(t)\le 1,\ \text{п.в.}\ \ t\in I_1\}, \qquad (3.4.4)$$

$$v(t)\in V=\{v(\cdot)\in L_2(I_2,R^1)|\ \ \tau\le v(\tau)\le 2\tau,\ \ \text{п.в.}\ \ \tau\in I_2\}. \qquad (3.4.5)$$

Необходимые достаточные условия удовлетворяет управляемости определяется соотношениями (см. Лемму 3.2.1):

а) Матрица $W(0,2)=\begin{pmatrix}16/3 & -4\\ -4 & 4\end{pmatrix}>0$;

б) $u_*(t)=w_{1*}(t)=p_{1*}(t)T_0(t)x_{0*}+T_1(t)x_{1*}+\mu_{11}(t)+N_{11}(t)z(t_1,p_*),$
$t\in I_1,$

$$T_0(t)=(\tfrac{3}{4}(t-1),\ \tfrac{3t-4}{4}), T_1(t)=(\tfrac{3t-4}{4},\ \tfrac{(3t-4)}{4}), \mu_{11}(t)\equiv 0,$$

$$N_{11}(t) = (\frac{3(t-1)}{4},\ \frac{(2-3t)}{4}), p_{1*}(\cdot) \in L_2(I_2, R^1), x_{0*} \in (x_{10*},\ x_{20*}) \in S_0,$$

$$(x_{11*},\ x_{21*}) \in S_1,\ u_*(t) \in U,\ v_*(t) \in V;$$

в) $\int_1^2 e^{(t+1)\tau}\, v_*(\tau)d\tau = w_{2*}(t) =$

$$= p_{2*}(t) + T_2(t)x_{0*} + T_3(t)x_{1*} + \mu_{12}(t) + N_{12}(t)z(t_1, p_*),$$

$$T_2(t) = (\frac{3}{4}(t-1),\ \frac{3t-4}{4}),\ T_3(t) = (\frac{3(1-t)}{4},\ \frac{3t-2}{4}),\ N_{12}(t) = (\frac{3(t-1)}{4},\ \frac{(2-3t)}{4}),$$

$$x_{0*} \in (x_{10*},\ x_{20*}) \in S_0,\ x_{1*} = (x_{11*},\ x_{21*}) \in S_1,\ p_{2*}(\cdot) \in L_2(I_2, R^1), \mu_{12}(t) \equiv 0,$$

$$S_0 = S_{10}, S_{20},\ S_{10} = \{x_{10} \in R^1 | -1 \le x_{10} \le 1,\ S_{20} = \{x_{20} \in R^1 | 1 \le x_{20} \le 2\};$$

$$S_1 = S_{11}, S_{21},\ S_{11} = \{x_{11}(2) \in R^1 | -1 \le x_{11}(2) \le 1\},$$

$$S_{21} = \{x_{21}(2) \in R^1 | -2 \le x_{21}(2) \le -1\}.$$

1. Построение решения задачи управляемости. Искомые управления $u_*(t) \in U,\ v_*(\tau) \in V, p_{1*}(t) \in L_2^\rho(I_1, R^1), p_{2*}(t) \in L_2^\rho(I_1, R^1),\ x_{0*} \in S_0,\ x_{1*} \in S_1,$ могут быть найдены из решения задачи оптимального управления: минимизировать функционал

$$J(u,\ v, p_1, p_2, x_{10}, x_{20}, x_{11}, x_{21}) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \{ |w_1(t) - u(t)|^2 + \left| w_2(t) - \int_a^b K\,(t,\tau)v(\tau)d\tau \right|^2 \} dt \to \inf \qquad (3.4.6)$$

при условиях

$$u(t) \in U,\ v(\tau) \in V,\ p_1(t) \in L_2^\rho(I_2, R^1),\ p_2(t) \in L_2(I_1, R^1),$$

$$x_{10} \in S_{10},\ x_{20} \in S_{20},\ x_{11} \in S_{11},\ x_{21} \in S_{21}, \qquad (3.4.7)$$

$$w_1(t) = p_1(t) + T_{10}(t)x_{10} + T_{20}(t)x_{20} + T_{11}(t)x_{11} + T_{21}(t)x_{21} + N_{11}(t)z(t_1, p),$$

$$t \in I_1, \qquad (3.4.8)$$

$$w_2(t) = p_2(t) + T_{20}(t)x_{10} + T_{30}(t)x_{20} + T_{31}(t)x_{11} +$$

$$+T_{41}(t)x_{21} + N_{12}(t)z(t_1,p), \quad t \in I_1, \tag{3.4.9}$$

$$T_{10} = T_{10}(t) = \frac{3}{4}(t-1), \quad T_{20} = T_{20}(t) = \frac{3t-4}{4},$$

$$T_{11} = T_{11}(t) = \frac{3t-4}{4}, \quad T_{21} = T_{21}(t) = \frac{3t-2}{4},$$

$$T_{20} = T_{20}(t) = \frac{3}{4}(t-1), \quad T_{30} = T_{30}(t) = \frac{3t-4}{4},$$

$$T_{31} = T_{31}(t) = \frac{3(t-1)}{4}, \quad T_{41} = T_{41}(t) = \frac{3t-2}{4},$$

где функция $z(t,p),\ t \in I_1$ – решение дифференциального уравнения

$$\dot{z_1} = z_2,\ \dot{z_2} = p_1(t) + p_2(t),\ z_1(0) = 0,\ z_2(0) = 0,\ t \in I_1. \tag{3.4.10}$$

Пусть $\theta = (u,\ v, p_1, p_2, x_{10}, x_{20}, x_{11}, x_{21}),\ q = (\theta, z(21))$. Вычислим градиент функционала (3.4.6) при условиях (3.4.7) – ( 3.4.10):

а) $J'_u(\theta) = F_{0u}(q,t) = -2(w_1 - u),\ F_0(q,t) = |F_1(q,t)|^2 + |F_2(q,t)|^2,$

$$F_1(q,t) = (w_1 - u),\ F_2(q,t) = w_2 - \int_1^2 e^{(t+1)\tau}\, w(\tau)d\tau,$$

$$J'_v(\theta) = -2\int_0^2 e^{(t+1)\tau}\, w_2(t)dt + 2\int_0^2\int_1^2 e^{(t+1)\tau}\, e^{(t+1)\tau} v(\tau)\, d\tau dt,$$

$$J'_{\rho_1}(\theta) = 2F_1(q,t) - B^*(t)\psi(t), \quad J'_{\rho_2}(\theta) = 2F_2(q,t) - C^*(t)\psi(t), \quad t \in I_1,$$

$$J'_{x_{10}}(\theta) = \int_0^2 [2T_{10}(t)F_1(q,t) + 2T_{20}(t)F_2(q,t)]\, dt,$$

$$J'_{x_{20}}(\theta) = \int_0^2 [2T_{20}(t)F_1(q,t) + 2T_{30}(t)F_2(q,t)]\,dt,$$

$$J'_{x_{11}}(\theta) = \int_0^2 [2T_{11}(t)F_1(q,t) + 2T_{31}(t)F_2(q,t)]\,dt,$$

$$J'_{x_{21}}(\theta) = \int_0^2 [2T_{21}(t)F_1(q,t) + 2T_{40}(t)F_2(q,t)]\,dt,$$

б) частная производная

$$F_{0z_{(t_1)}}(q,t) = \begin{pmatrix} \frac{3(t-1)}{4} \\ \frac{2-3t)}{4} \end{pmatrix}, \quad F_1(q,t) = \begin{pmatrix} \frac{3(t-1)}{4} \\ \frac{2-3t)}{4} \end{pmatrix},$$

в) сопряженная система

$$\dot{\psi}_1 = 0,\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1,\ \ \psi(2) = \begin{pmatrix} \psi_1(2) \\ \psi_2(2) \end{pmatrix} = -\int_{t_0}^{t_1} F_{0z(t_1)}\,(q(t),t)dt.$$

г) минимизирующие последовательности равны:

$$u_{n+1} = P_U\left[u_n - \alpha_n J'_u(\theta_n)\right],\ \ p_{n+1} = P_V\left[v_n - \alpha_n J'_v(\theta_n)\right],$$
$$p_{1n+1} = P_{L_2^p}[p_{1n} - \alpha_n J'_{p_1}(\theta_n)],\ \ p_{2n+1} = P_{L_2^p}[p_{2n} - \alpha_n J'_{p_2}(\theta_n)],$$
$$x_{10}^{n+1} = P_{S_{10}}[x_{10}^{(n)} - \alpha_n J'_{x_{10}}(\theta_n)],\ \ x_{20}^{n+1} = P_{S_{20}}[x_{20}^{(n)} - \alpha_n J'_{x_{20}}(\theta_n)],$$
$$x_{11}^{n+1} = P_{S_{11}}[x_{11}^{(n)} - \alpha_n J'_{x_{11}}(\theta_n)],\ \ x_{20}^{n+1} = P_{S_{21}}[x_{21}^{(n)} - \alpha_n J'_{x_{21}}(\theta_n)],$$
$$n = 0,1,2,\ldots,\ \ \alpha_n \le \frac{1}{K}.$$

д) проекции точки на множества

$$P_U[u_n - \alpha_n J'_u(\theta_n)] = \begin{cases} -1, \text{ если } u_n - \alpha_n J'_u(\theta_n) < -1; \\ u_n - \alpha_n J'_u(\theta_n), \text{ если } -1 \le u_n - \alpha_n J'_u(\theta_n) \le 1; \\ 1, \text{ если } \ u_n - \alpha_n J'_u(\theta_n) > 1; \end{cases}$$

$$P_V[v_n - \alpha_n J'_v(\theta_n)] = \begin{cases} \tau, \text{ если } \ v_n - \alpha_n J'_v(\theta_n) < \tau; \\ v_n - \alpha_n J'_v(\theta_n), \text{ если } \ \tau \le v_n - \alpha_n J'_v(\theta_n) \le 2\tau; \\ 2\tau, \text{ если } \ v_n - \alpha_n J'_v(\theta_n) > 2\tau; \end{cases}$$

$$P_{L_2^p}[p_{1n} - \alpha_n J'_{p_1}(\theta_n)] = p_{1n} - \alpha_n J'_{p_1}(\theta_n), \text{ если } \ \left\| p_{1n} - \alpha_n J'_{p_1}(\theta_n) \right\| \le \rho,$$

$$P_{L_2^p}[p_{2n} - \alpha_n J'_{p_2}(\theta_n)] = p_{2n} - \alpha_n J'_{p_2}(\theta_n), \text{ если } \ \left\| p_{2n} - \alpha_n J'_{p_2}(\theta_n) \right\| \le \rho,$$

$\rho > 0$ – достаточно большое число;

$$P_{S_{10}}[x_{10}^{(n)} - \alpha_n J'_{x_{10}}(\theta_n)]$$

$$= \begin{cases} -1, \text{ если } \ x_{10}^{(n)} - \alpha_n J'_{x_{10}}(\theta_n) < -1; \\ x_{10}^{(n)} - \alpha_n J'_{x_{10}}(\theta_n), \text{ если } \ -1 \le x_{10}^{(n)} - \alpha_n J'_{x_{10}}(\theta_n) \le 1; \\ 1, \ \text{ если } \ x_{10}^{(n)} - \alpha_n J'_{x_{10}}(\theta_n) > 1; \end{cases}$$

$$P_{S_{20}}[x_{20}^{(n)} - \alpha_n J'_{x_{20}}(\theta_n) =$$

$$= \begin{cases} 1, \text{ если } \ x_{20}^{(n)} - \alpha_n J'_{x_{20}}(\theta_n) < 1; \\ x_{20}^{(n)} - \alpha_n J'_{x_{20}}(\theta_n), \text{ если } \ 1 \le P_{S_{20}}[x_{20}^{(n)} - \alpha_n J'_{x_{20}}(\theta_n) \le 2; \\ 2, \ \text{ если } \ P_{S_{20}}[x_{20}^{(n)} - \alpha_n J'_{x_{20}}(\theta_n) > 2; \end{cases}$$

$$P_{S_{11}}[x_{11}^{(n)} - \alpha_n J'_{x_{11}}(\theta_n)]$$

$$= \begin{cases} -1, \text{ если } x_{11}^{(n)} - \alpha_n J'_{x_{11}}(\theta_n) < -1; \\ x_{11}^{(n)} - \alpha_n J'_{x_{11}}(\theta_n), \text{ если} -1 \le x_{11}^{(n)} - \alpha_n J'_{x_{11}}(\theta_n) \le 1; \\ \text{-2, если } \ x_{11}^{(n)} - \alpha_n J'_{x_{11}}(\theta_n) > -2; \end{cases}$$

$$P_{S_{21}}\left[x_{21}^{(n)} - \alpha_n J'_{x_{21}}(\theta_n)\right] =$$

$$= \begin{cases} -2, \text{ если } x_{21}^{(n)} - \alpha_n J'_{x_{21}}(\theta_n) < -2; \\ x_{21}^{(n)} - \alpha_n J'_{x_{21}}(\theta_n), \text{ если} -2 \le xx_{21}^{(n)} - \alpha_n J'_{x_{21}}(\theta_n) \le -1; \\ \text{-1, если } \ x_{21}^{(n)} - \alpha_n J'_{x_{21}}(\theta_n) > -1; \end{cases}$$

Алгоритм построения минимизирующей последовательности.

е) предельные точки минимизирующих последовательностей:

$$u_n(t) \overset{\text{сл}}{\to} u_*(t),\ \ v_n(\tau) \overset{\text{сл}}{\to} v_*(\tau),\ \ \ p_1(t) \overset{\text{сл}}{\to} p_{1*}(t),\ \ p_2(t) \overset{\text{сл}}{\to} p_{2*}(t),\ \ t \in I_1,$$

$$x_{10}^{(n)} \to x_{10}^*,\ \ x_{20}^{(n)} \to x_{20}^*,\ \ x_{11}^{(n)} \to x_{11}^*,\ \ x_{21}^{(n)} \to x_{21}^*.$$

ж) разрешимость задачи управляемости (3.4.1) – (3.4.3):

1) если $J(u_*,\ v_*, p_{1*}, p_{2*}, x_{10}^*, x_{20}^*, x_{11}^*, x_{21}^*) = 0$, то решением задачи (3.4.1) – (3.4.3) является функция

$$x_*(t) = z(t, p_*) + \lambda(t, x_{10}^*, x_{20}^*, x_{11}^*, x_{21}^*) + N_2(t) z(t_1, p_*),\ \ t \in I_1,$$

1) если $J(u_*,\ v_*, p_{1*}, p_{2*}, x_{10}^*, x_{20}^*, x_{11}^*, x_{21}^*) > 0$, то задача управляемости (3.4.1) – (3.4.3) не имеет решения. В этом случае, функция $x_*(t),\ \ t \in I_1,$ – является наилучшим приближенным решением задачи управляемости.

## 3.5 Быстродействие на языке Python.

Для численного исследования поставленной задачи была разработана программная реализация на языке Python.

Программа осуществляет дискретизацию временных интервалов, численное интегрирование системы дифференциальных уравнений и минимизацию функционала с учетом ограничений на управление.

Ниже приведен фрагмент разработанного программного кода.

Импорты

- numpy — массивы, сетки.
- solve_ivp — численное интегрирование ОДУ.
- minimize — численная оптимизация (подбор параметров/управления).
- interp1d — интерполяция управления, заданного на сетке.
- matplotlib — графики результатов.

1) Интервалы времени — зачем

```
t0, t1 = 0.0, 2.0      # I1=[0,2]
tau0, tau1 = 1.0, 2.0  # I2=[1,2]
```

Задают два временных интервала:

- $I_1 = [t_0, t_1] = [0,2]$ — основной интервал для состояния/управления $u(t)$.
- $I_2 = [\tau_0, \tau_1] = [1,2]$ — второй интервал (например, для другого управления $v(\tau)$, измерений или ограничения).

Зачем: в задачах с несколькими управлениями/фазами часто разные переменные определяются на разных интервалах.

2) Ограничения множеств $S_0$ и $S_1$:

Начальное множество $S_0$

```
S0_x1 = (−1.0, 1.0)
S0_x2 = ( 1.0, 2.0)
```

То есть:

$$x_1(0) \in [-1,1], \;\; x_2(0) \in [1,2].$$

Конечное множество $S_1$

```
S1_x1 = (−1.0, 1.0)
S1_x2 = (−2.0, −1.0)
```

То есть:

$$x_1(2) \in [-1,1], \qquad x_2(2) \in [-2,-1].$$

Вместо точных краевых условий задается допустимая область начальных и конечных состояний (коробка/прямоугольник). Это типично для задач достижимости и управления с неопределенностью.

Ограничение на управление $U$ — зачем

```
u_min, u_max = −1.0, 1.0
```

$$u(t) \in [-1,1].$$

Физическое ограничение мощности управления и обязательное условие корректной оптимизации.

Ограничения на $v(\tau)$ — зачем

```
def v_bounds(tau_grid):
    lo = tau_grid
    hi = 2.0 * tau_grid
    return lo, hi
```

Задает времязависимые границы:

$$\tau \le v(\tau) \le 2\tau, \qquad \tau \in [1,2].$$

- допустимый диапазон $v$ меняется со временем;
- это важно при оптимизации: на каждом узле сетки будут свои bounds для minimize.

Итого: этот блок не решает систему, он формулирует задачу: где рассматриваем динамику и какие ограничения должны соблюдать $x(0),\ x(2),\ u(t),\ v(\tau)$

3) Дискретизация

```
Nt=250, Ntau=250
t_grid = linspace(0,2)
tau_grid = linspace(1,2)
dt, dtau
```

Управления $u(t)$ и $v(\tau)$ будут храниться как массивы на сетках времени. dt, dtau нужны для численного интегрирования.

4) Интегральный член от $v(\tau)$

```
K = exp((t+ 1)*tau)   # матрица ядра
w_tau = ...           # веса трапеций
integral_term_from_v(v_tau) = 0.5 * K @ (v_tau*w_tau)
```

Это реализует функцию:

$$I(t) = \frac{1}{2}\int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{(t+1)\tau}\, v(\tau)d\tau$$

численно методом трапеций.

Чтобы не интегрировать заново внутри ODE на каждом шаге — интеграл считается быстро через матричное умножение.

5) Симуляция ODE

```
simulate(x0, u_t, v_tau)
```

Что делает:

1. строит интерполятор управления u_fun(t) по массиву u_t;
2. вычисляет $I(t_i)$ из v_tau, строит интерполятор I_fun(t);
3. решает систему:

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u(t) + I(t)$$

возвращает траекторию и конечное состояние.

Это “прямая задача” — по данным $u$ и $v$ получить $x(t)$ и $x(t_1)$ для проверки ограничений/оптимизации.

6) Штраф за выход из интервала

```
interval_penalty(val,a,b)
```

Возвращает:

- 0, если val внутри $[a, b]$,
- иначе квадрат расстояния до ближайшей границы.

Превращает жесткие ограничения вида $x \in [a, b]$ в мягкий штраф в целевой функции оптимизации (удобно для minimize).

7) Что оптимизируется

Переменная оптимизации

```
z = [x10, x20, u(t_grid), v(tau_grid)]
```

То есть оптимизатор одновременно подбирает:

- $x(0) = (x_{10}, x_{20})$ внутри $S_0$,
- управление $u(t)$ на сетке $t$,
- управление $v(\tau)$ на сетке $\tau$.

Зачем: начальное состояние не фиксировано точкой, а выбирается из множества $S_0$.

Ограничения (bounds) — зачем

```
bnds = [(S0_x1), (S0_x2)] + u_bounds + v_bounds
```

- $x_1(0), x_2(0)$ ограничены $S_0$,
- $u(t) \in [-1,1]$,
- $v(\tau) \in [\tau, 2\tau]$ (времязависимые границы).

L-BFGS-B умеет работать именно с такими “коробочными” ограничениями.

Целевая функция objective(z) — что в ней и зачем

1. Прогон системы

```
x_traj, xT = simulate([x10,x20], u_t, v_tau)
```

Зачем: чтобы получить конечное состояние $x(T)$.

2. Штраф за непопадание в $S_1$

```
pen = penalty(xT[0] in S1_x1) + penalty(xT[1] in S1_x2)
```

Заставляет решение попадать в допустимую конечную область $S_1$. Большой вес:

```
W_terminal = 5000
```

делает это требование “почти жестким”.

3. Регуляризация энергий управлений

Ju = 0.5∫ u^2 dt
Jv = 0.5∫ v^2 dτ

Чтобы управление не было излишне большим (типичный энергетический критерий).

4. Сглаживание

smooth = sum(diff(u)^2)+ sum(diff(v)^2)

Убирает “пилу” (резкие скачки) в дискретных управлениях.
Итого минимизируется:

$$J = \frac{1}{2}\int u^2\,dt + \frac{1}{2}\int v^2\,d\tau + W_{terminal}\cdot pen(x(T) \notin S_1) + W_{smooth}\cdot smoothness.$$

Почему minimize(..., method="L-BFGS-B")

- это эффективный квазиньютоновский метод,
- поддерживает box bounds (границы на каждую переменную),
- подходит для задач большой размерности (тут сотни переменных).

После оптимизации

Код:

- вытаскивает оптимальные $x(0), u(t), v(\tau)$,
- снова симулирует систему,
- печатает, попали ли в $S_1$.

8) Графики — зачем

1. Траектория состояния $x_1(t),\ x_2(t)$. Проверка, как система эволюционирует и что происходит к $t = 2$.
2. Оптимальное управление $u(t)$. Показывает, какое воздействие на систему найдено.
3. Оптимальное $v(\tau)$ + его границы. Проверяет, что $v(\tau)$ действительно лежит между $\tau$ и $2\tau$ (визуальный контроль выполнения ограничений).

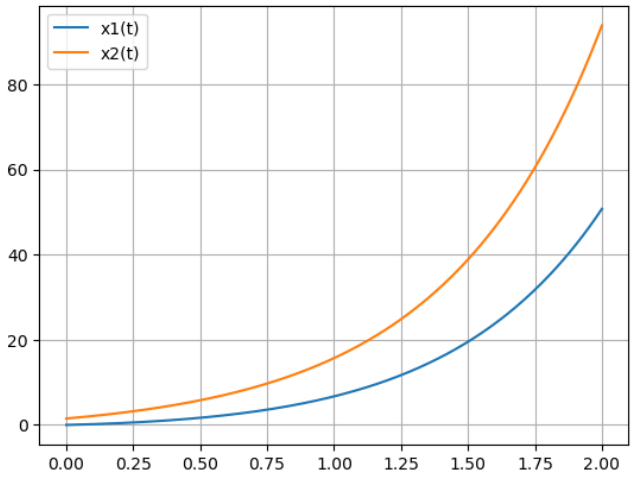



Рисунок 3.1 — Траектории состояния $x_1(t)$ и $x_2(t$ ). Конечное состояние не удовлетворяет ограниче ниям $S_1$.

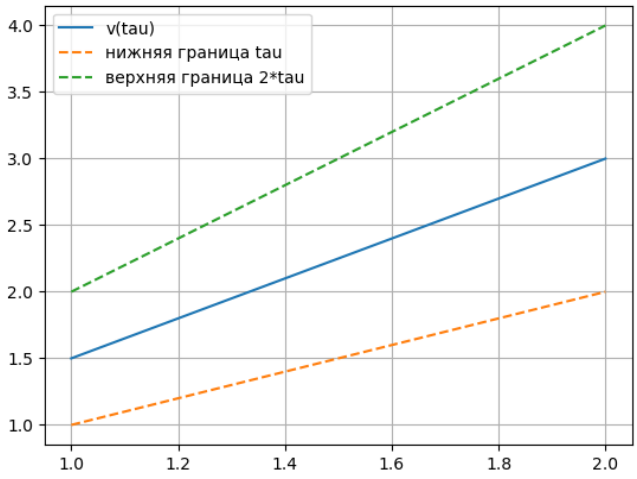



Рисунок 3.2 — Функция $v(\tau)$ и ее допустимые гра ницы. Ограничения $\tau \leq v(\tau) \leq 2\tau$ выполняются.

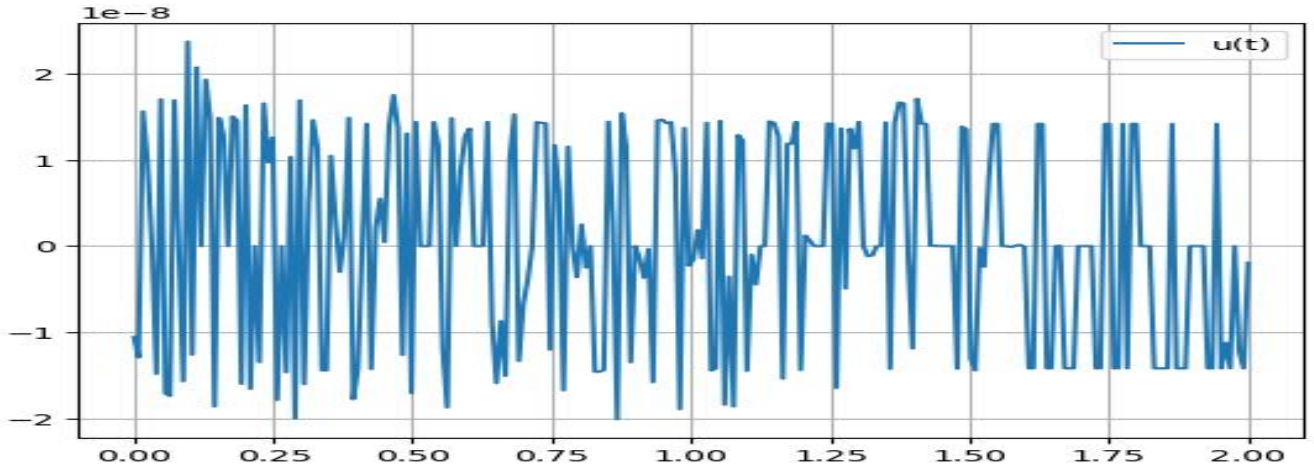



Рисунок 3.3 — Оптимальное управление $u(t)$. Наблюдается колебательный характер управления, что при водит к неустойчивому поведению системы.

## Основные выводы по третьей части

В третьей части диссертационной работы исследуются задачи управляемости и оптимального быстродействия линейных интегро-дифференциальных уравнений с краевыми условиями из заданных множеств и ограничениями на значения управления. Основное внимание уделено получению строгих условий управляемости, построению допустимых решений и разработке конструктивных методов их вычисления.

Получены необходимые и достаточные условия управляемости для процессов, описываемых линейными интегро-дифференциальными уравнениями с подынтегральным управлением. Показано, что исходная краевая задача может быть сведена к задаче оптимального управления и минимизации функционала, что обеспечивает возможность применения методов

функционального анализа и оптимизации для исследования разрешимости и построения решений.

Разработаны алгоритмы нахождения допустимого управления, граничных точек траекторий и оптимального времени управления, основанные на исследовании предельных свойств минимизирующих последовательностей. Теоретические результаты подтверждены на модельных примерах и вычислительных экспериментах, а их программная реализация демонстрирует применимость предложенных методов к анализу и оптимизации динамики систем, описываемых интегро-дифференциальными моделями.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе исследованы задачи управляемости и оптимального быстродействия линейных, нелинейных и линейных интегро-дифференциальных динамических систем с фазовыми, интегральными и управляющими ограничениями. Основное внимание сосредоточено на разработке конструктивных алгоритмических методов, их численной реализации и подтверждении полученных результатов на модельных примерах.

Для линейных систем установлены достаточные условия управляемости, разработаны вычислительные алгоритмы построения допустимых управлений и определения оптимального времени управления, реализованные программно. Для нелинейных систем задача сведена к минимизации функционала, построены градиентные численные методы и выполнено моделирование на примерах уравнения Дуффинга и математического маятника, подтвердившее согласование теоретических и вычислительных результатов. Для линейных интегро-дифференциальных систем разработаны алгоритмы вычисления управлений и граничных состояний, основанные на использовании минимизирующих последовательностей и подтвержденные вычислительным экспериментом.

В работе обоснована логическая последовательность исследования задач оптимального управления, включающая установление существования допустимых управлений, их конструктивное построение и последующее нахождение оптимального управления, в том числе в задаче оптимального быстродействия как частном случае общей задачи оптимального управления.

Существенным результатом диссертации является создание программного комплекса на языке Python, обеспечивающего численное построение допустимых и оптимальных управлений, вычисление оптимального быстродействия, моделирование динамики систем и визуализацию результатов. Проведенные вычислительные эксперименты подтвердили корректность разработанных алгоритмов, их эффективность и применимость к прикладным задачам управления.

Научная новизна работы заключается в разработке конструктивного алгоритмического подхода к решению задач управляемости и оптимального быстродействия для различных классов динамических систем с ограничениями, объединяющего теоретическое обоснование существования решений, их алгоритмическое построение и программно-ориентированную численную реализацию.

Практическая значимость определяется возможностью применения разработанных алгоритмов и программных средств при моделировании и оптимальном управлении техническими, энергетическими, робототехническими и другими динамическими объектами.

Полученные результаты представляют собой завершенное научное исследование, развивающее конструктивное вычислительное направление современной теории оптимального управления, ориентированное на алгоритмы, программную реализацию и модельный эксперимент.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Базовые источники по оптимальному управлению

1. Айсагалиев С. А. Лекции по оптимальному управлению. — Алматы: Қазақ университеті, 2007. — 278 с.

2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1969. — 384 с.

3. Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: ИЛ, 1960. — 301 с.

4. Bryson A. E., Ho Y. C. Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control. — New York: Hemisphere, 1975. — 481 p.

5. Kirk D. E. Optimal Control Theory: An Introduction. — New York: Dover, 2004. — 452 p.

6. Lee E. B., Markus L. Foundations of Optimal Control Theory. — New York: Wiley, 1967. — 576 p.

7. Sontag E. D. Mathematical Control Theory. — New York: Springer, 1998. — 515 p.

8. Liberzon D. Calculus of Variations and Optimal Control Theory. — Princeton: Princeton Univ. Press, 2012. — 312 p.

9. Lewis F. L., Vrabie D., Syrmos V. Optimal Control. — Hoboken: Wiley, 2012. — 560 p.

10. Zabczyk J. Mathematical Control Theory: An Introduction. — Boston: Birkhäuser, 1995. — 260 p.

II. Работы школы Айсагалиева

11. Айсагалиев С. А. Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1991. — Т. 27, № 9. — С. 1037–1047.

12. Айсагалиев С. А., Айсагалиева С. С. Конструктивный метод решения задачи управляемости для ОДУ // Дифференциальные уравнения. — 1993. — Т. 29, № 4. — С. 555–567.

13. Айсагалиев С. А. Оптимальное управление линейными системами с закрепленными концами траекторий // Дифференциальные уравнения. — 1996. — Т. 32, № 8. — С. 1011–1018.

14. Айсагалиев С. А., Белогуров А. П. Управляемость и быстродействие процесса, описываемого параболическим уравнением // Сибирский математический журнал. — 2012. — Т. 53, № 1. — С. 20–37.

15. Айсагалиев С. А. Проблемы качественной теории дифференциальных уравнений. — Алматы: Қазақ университеті, 2016. — 246 с.

16. Айсагалиев С. А. Теория краевых задач динамических систем: избранные труды. — Алматы: КазНУ им. аль-Фараби, 2021. — 564 с.

17. Aisagaliev S. A., Zhunussova Z. K. Constructive method for solvability of Fredholm equation of the first kind // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. — 2017. — № 45. — P. 1–11.

18. Aisagaliev S. A., Zhunussova Z. K. Boundary value problem with a parameter for ordinary differential equations // Ufa Mathematical Journal. — 2016. — Vol. 8, № 2. — P. 3–13.

19. Aisagaliev S.A., Zhunussova, Z.K. To the solution of a boundary value problem with a parameter for an ordinary differential equations // Ufa Mathematical Journal. – 2016. Vol. 8. №2. P. 3-13.

20. Aisagaliev S. A. On periodic solutions of autonomous systems // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 229, № 4. — P. 335–353.

21. Aisagaliev S. A., Kabidoldanova A. A. Optimal control of linear systems with linear performance criterion and constraints // Differential Equations. — 2012. — Vol. 48, № 6. — P. 832–844.

22. Aisagaliev S.A., Kabidoldanova A.A. On the Optimal Control of linear systems with linear performance criterion and constraintsи // Differential equations. – 2012. – Т. 48. №6. – С. 832–844.

23. Aisagaliev S. A., Nurmagambetov D. E., Sevryugin I. V. Solvability and construction of a solution to the Fredholm integral equation of the first kind // Journal of Applied Mathematics and Physics. — 2024. — Vol. 12, № 2. — P. 720–735.

III. Современные исследования по интегро-дифференциальным системам

24. Bensalem A., Salim A., Benchohra M., N’Guerekat G. M. Optimal control and approximate controllability for second-order integro-differential equations // Electronic Journal of Differential Equations. — 2025. — № 54. — P. 1–18.

25. Kumar K., Patel R., Sajid M., Kumar R. Boundary control for nonlinear integro-differential evolution systems // AIMS Mathematics. — 2025. — Vol. 10, № 6. — P. 14347–14371.

26. Anikushyn A., Hranishak K. Point control of linear hyperbolic integro-differential systems // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. — 2024. — Vol. 79, № 2. — P. 20–28.

27. Anikushyn A., Lyashko V., Samosonok O. Optimal control of hyperbolic integro-differential systems // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. — 2024. — Vol. 78, № 1. — P. 111–118.

28. Huang H., Fu X. Optimal control problems for neutral integro-differential systems // Evolution Equations and Control Theory. — 2022. — Vol. 11, № 1. — P. 177–197.

29. Kumar V., Malik M. Controllability of fractional integro-differential equations // IMA Journal of Mathematical Control and Information. — 2021. — Vol. 38, № 1. — P. 211–231.

30. Mardanov M. J., Mansimov K. B., Abdullayeva N. H. Second-order optimality conditions for integro-differential systems // Journal of Samara State Technical University. — 2018. — Vol. 22, № 2. — P. 254–268.

31. Shen L., Shi J., Sun J. Complete controllability of stochastic integro-differential systems // Automatica. — 2010. — Vol. 46. — P. 1068–1073.

32. Wang H., Yong J. Time-inconsistent stochastic optimal control problems // ESAIM: Control Optimisation and Calculus of Variations. — 2021. — Vol. 27. — P. 21.

IV. Публикации автора диссертации и соавторов

33. Aisagaliev S., Korpebay G. T. Controllability and optimal speed-in-action of linear systems with boundary conditions // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. — 2023. — Vol. 110, № 2. — P. 21–34.

34. Aisagaliev S., Korpebay G. T. Controllability and optimal fast operation of nonlinear systems // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. — 2024. — № 3. — P. 77–92.

35. Aisagaliev S., Korpebay G. T. Integral equation in the theory of optimal speed of linear systems with constraints // KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics, Computer Science Series. — 2020. — Vol. 105, № 1. — P. 59–78.

36. Айсагалиев С., Көрпебай Г. Т. Краевая задача динамической системы с фазовыми и интегральными ограничениями, оптимальная по быстродействию // The Scientific Journal of World Researches. — 2025. — № 3 (25). — С. 62–72.

37. Көрпебай Г. Т. Управляемость и оптимальное быстродействие линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с фазовыми и интегральными ограничениями // Материалы Международной научно-практической конференции «Цифровые технологии и междисциплинарные подходы к решению прикладных задач науки». — Атырау, 2025. — С. 154–155.

38. Aisagaliev S., Nurmagambetov D., Korpebay G. Boundary value problems of linear control systems with phase and integral constraints // Proceedings of the XIV International Scientific and Practical Conference. «The Modern Vector of the Development of Science». — Philadelphia, 2024. — P. 41–43.

39. Көрпебай Г. Т. Бірінші текті Фредгольм интегралдық теңдеуінің шешімділігі және жуық шешімін құру әдісі // International Scientific Conference of Students and Young Scientists «Farabi Alemi». — Алматы, 2023. — С. 19.

V. Интегральные уравнения и операторная теория

40. Tricomi F. G. Integral Equations. — New York: Dover, 1985. — 238 p.

41. Burton T. A. Volterra Integral and Differential Equations. — New York: Academic Press, 1983. — 312 p.

42. Gripenberg G., Londen S., Staffans O. Volterra Integral and Functional Equations. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. — 523 p.

43. Polyanin A. D., Manzhirov A. V. Handbook of Integral Equations. — Boca Raton: CRC Press, 2008. — 1144 p.

44. Corduneanu C. Integral Equations and Applications. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991. — 416 p.

45. Miller R. K. Nonlinear Volterra Integral Equations. — Menlo Park: Benjamin, 1971. — 256 p.

46. Krasnosel’skii M. A. Integral Operators in Spaces of Summable Functions. — Groningen: Noordhoff, 1976. — 368 p.

47. Zabreyko P. P., Koshelev A. I., Krasnosel’skii M. A., Mikhlin S. G., Rakovshchik L. S., Stetsenko V. Ya. Integral Equations. — Groningen: Noordhoff, 1975. — 400 p.

VI. Функциональный анализ и вариационные методы

48. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. — New York: Dover, 1999. — 288 p.

49. Luenberger D. G. Optimization by Vector Space Methods. — New York: Wiley, 1969. — 326 p.

50. Ekeland I., Temam R. Convex Analysis and Variational Problems. — Philadelphia: SIAM, 1999. — 365 p.

51. Rockafellar R. T. Convex Analysis. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1970. — 451 p.

52. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-Valued Analysis. — Boston: Birkhäuser, 1990. — 461 p.

53. Brezis H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. — New York: Springer, 2010. — 599 p.

54. Kreyszig E. Introductory Functional Analysis with Applications. — New York: Wiley, 1978. — 688 p.

55. Rudin W. Functional Analysis. — New York: McGraw-Hill, 1991. — 424 p.

56. Conway J. B. A Course in Functional Analysis. — New York: Springer, 1990. — 399 p.

57. Dunford N., Schwartz J. T. Linear Operators. Part I. — New York: Wiley, 1958. — 858 p.

VII. Дифференциальные уравнения и динамические системы

58. Hartman P. Ordinary Differential Equations. — New York: Wiley, 1964. — 612 p.

59. Hale J. K. Ordinary Differential Equations. — Malabar: Krieger, 1980. — 308 p.

60. Coddington E. A., Levinson N. Theory of Ordinary Differential Equations. — New York: McGraw-Hill, 1955. — 429 p.

61. Arnold V. I. Ordinary Differential Equations. — Cambridge: MIT Press, 1973. — 280 p.

62. Perko L. Differential Equations and Dynamical Systems. — New York: Springer, 2001. — 566 p.

63. Evans L. C. Partial Differential Equations. — Providence: AMS, 1998. — 662 p.

64. Ladyzhenskaya O. A. Boundary Value Problems of Mathematical Physics. — New York: Springer, 1985. — 322 p.

65. Tikhonov A. N., Arsenin V. Y. Solutions of Ill-posed Problems. — Washington: Winston, 1977. — 258 p.

66. Samarskii A. A. The Theory of Difference Schemes. — New York: Marcel Dekker, 2001. — 788 p.

67. Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. — New York: Springer, 1988. — 500 p.

VIII. Современные исследования оптимального управления

68. Fleming W. H., Rishel R. W. Deterministic and Stochastic Optimal Control. — New York: Springer, 1975. — 222 p.

69. Yong J., Zhou X. Y. Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations. — New York: Springer, 1999. — 438 p.

70. Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I. Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations. — Boston: Birkhäuser, 1997. — 570 p.

71. Bonnans J. F., Shapiro A. Perturbation Analysis of Optimization Problems. — New York: Springer, 2000. — 601 p.

72. Betts J. T. Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming. — Philadelphia: SIAM, 2010. — 448 p.

73. Rao A. V. A survey of numerical methods for optimal control //Advances in the Astronautical Sciences. — 2009. — Vol. 135. — P. 497–528.

74. Nocedal J., Wright S. Numerical Optimization. — New York: Springer, 2006. — 664 p.

75. Fletcher R. Practical Methods of Optimization. — Chichester: Wiley, 1987. — 436 p.

76. Kelley C. T. Iterative Methods for Optimization. — Philadelphia: SIAM, 1999. — 180 p.

77. Biegler L. T. Nonlinear Programming: Concepts, Algorithms and Applications. — Philadelphia: SIAM, 2010. — 408 p.

IX. Новейшие статьи (2020-2025)

78. Shen L., Shi J., Sun J. Complete controllability of stochastic integro-differential systems // Automatica. — 2010. — Vol. 46. — P. 1068–1073.

79. Wang H., Yong J. Time-inconsistent stochastic optimal control problems // ESAIM: COCV. — 2021. — Vol. 27. — P. 1–21.

80. Huang H., Fu X. Optimal control for neutral integro-differential systems // Evolution Equations and Control Theory. — 2022. — Vol. 11. — P. 177–197.

81. Kumar V., Malik M. Controllability of fractional integro-differential equations // IMA Journal of Mathematical Control and Information. — 2021. — Vol. 38. — P. 211–231.

82. Zhou Y. Approximate controllability of impulsive fractional systems // IMA Journal of Mathematical Control and Information. — 2019. — Vol. 36. — P. 603–622.

XI. Современные исследования оптимального управления интегральных и дробных систем

82. Abdelhamid Bensalem, Abdelkrim Salim, Mouffak Benchohra, Gaston M. N'Guerekat. Optimal control and approximate controllability for second-order integro-differential equations with state-dependent delay and non-instantaneous impulses // Electron. J. Differential Equations, – 2025. –Vol. 2025. № 54. – P. 1–18.

83. Kamalendra Kumar, Rohit Patel, Mohammad Sajid, Rakesh Kumar. An analysis on the boundary control for nonlinear integro-differential evolution systems with impulsive effects and time delays via fixed point theorems // AIMS Mathematics, –2025. – Vol 10. №6. – P. 14347–14371.

84. Bensalem A., Salim A., Benchohra M., N'Guerekat G. M. Optimal control and approximate controllability for second-order integro-differential equations with state-dependent delay and non-instantaneous impulses // Electronic Journal of Differential Equations. — 2025. — № 54. — P. 1–18.

85. Kumar K., Patel R., Sajid M., Kumar R. An analysis on the boundary control for nonlinear integro-differential evolution systems with impulsive effects and time delays via fixed point theorems // AIMS Mathematics. — 2025. — Vol. 10, № 6. — P. 14347–14371.

86. Anikushyn A., Hranishak K. Point control of linear hyperbolic integro-differential systems // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. — 2024. — Vol. 79, № 2. — P. 20–28.

87. Anikushyn A., Lyashko V., Samosonok O. Optimal control of systems governed by linear hyperbolic integro-differential equations // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. — 2024. — Vol. 78, № 1. — P. 111–118.

88. Huang H., Fu X. Optimal control problems for a neutral integro-differential system with infinite delay // Evolution Equations and Control Theory. — 2022. — Vol. 11, № 1. — P. 177–197.

89. Kumar V., Malik M. Controllability results of fractional integro-differential equation with non-instantaneous impulses on time scales // IMA Journal of Mathematical Control and Information. — 2021. — Vol. 38, № 1. — P. 211–231.

90. Mardanov M. J., Mansimov K. B., Abdullayeva N. H. Integral necessary condition of optimality of the second order for control problems described by systems of integro-differential equations with delay // Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 22, № 2. — P. 254–268.

91. Shen L., Shi J., Sun J. Complete controllability of impulsive stochastic integro-differential systems // Automatica. — 2010. — Vol. 46. — P. 1068–1073.

92. Wang H., Yong J. Time-inconsistent stochastic optimal control problems and backward stochastic Volterra integral equations // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. — 2021. — Vol. 27. — P. 1–21.

93. Shen W., Yang D., Liu W. Optimal control problem governed by a linear hyperbolic integro-differential equation and its finite-element analysis // Boundary Value Problems. — 2014. — № 173. — P. 1–17.

94. Zhou Y., Suganya S., Arjunan M. M., Ahmad B. Approximate controllability of impulsive fractional integro-differential equations with state-dependent delay in Hilbert spaces // IMA Journal of Mathematical Control and Information. — 2019. — Vol. 36, № 2. — P. 603–622.

95. Mesgarani H., Safdari H., Ghasemian A. Solving optimal control problems for integral and integro-differential equations using cubic B-spline scaling functions and wavelets // Applied Mathematics and Computation. — 2020. — Vol. 376. — 125147.

96. Negarchi N., Nouri K. Solving optimal control problems with constraints of integral equations via Müntz polynomials // Jordan Journal of Mathematics and Statistics. — 2019. — Vol. 12, № 2. — P. 145–160.

97. Negarchi N., Zolfegharifar S. Y. Optimal control of Volterra–Fredholm integro-differential equations via Müntz polynomials // Jordan Journal of Mathematics and Statistics. — 2021. — Vol. 14, № 1. — P. 1–15.

98. Sanchooli M., Solaymani Fard O. Numerical scheme for optimal control problems governed by Fredholm integral equations // Applied Mechanics and Materials. — 2011. — Vol. 110–116. — P. 4284–4289.

XII. Дополнительные фундаментальные и обзорные источники

99. Pontryagin L. S. Ordinary Differential Equations. — Reading: Addison-Wesley, 1962. — 298 p.

100. Smirnov V. I. A Course of Higher Mathematics. Vol. 4. — Oxford: Pergamon Press, 1964. — 372 p.

101. Kalman R. E. Contributions to the theory of optimal control // Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. — 1960. — Vol. 5. — P. 102–119.

102. Wonham W. M. Linear Multivariable Control: A Geometric Approach. — New York: Springer, 1979. — 330 p.

103. Coron J.-M. Control and Nonlinearity. — Providence: AMS, 2007. — 426 p.

104. Bressan A., Piccoli B. Introduction to the Mathematical Theory of Control. — Springfield: AIMS, 2007. — 250 p.

105. Curtain R. F., Zwart H. An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory. — New York: Springer, 1995. — 640 p.

106. Cesari L. Optimization: Theory and Applications. — New York: Springer, 1983. — 542 p.

107. Vinter R. Optimal Control. — Boston: Birkhäuser, 2000. — 507 p.

108. Arrow K. J., Hurwicz L., Uzawa H. Studies in Linear Programming. — Stanford: Stanford Univ. Press, 1958. — 404 p.

109. Bellman R. Adaptive Control Processes. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1961. — 255 p.

110. Isidori A. Nonlinear Control Systems II. — London: Springer, 1999. — 549 p.

111. Andrii Anikushyn, Khrystyna Hranishak. Point control of linear hyperbolic integro-differential systems // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv: Phys. & Math. Sci. –2024 – Vol 79, №2, – P. 20–28.

112. Andrii Anikushyn, Viktor Lyashko, Oleksandr Samosonok. Optimal control of the systems governed by linear hyperbolic integro-differential equations // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv: Phys. & Math. Sci. – 2024. – Vol 78. №1. – P. 111–118.

113. Hai Huang, Xianlong Fu. Optimal control problems for a neutral integro-differential system with infinite delay // Evolution Equations and Control Theory. – 2022. – Vol 11. №1. – P. 177–197.

114. Vipin Kumar, Muslim Malik. Controllability results of fractional integro-differential equation with non-instantaneous impulses on time scales // IMA Journal of Mathematical Control and Information. – 2021. – Vol. 38. №1. – P. 211–231.

115. Lijuan Shen, Junping Shi, Jitao Sun. Complete controllability of impulsive stochastic integro-differential systems // Automatica. –2010. – Vol. 46. – P. 1068-1073.

116. Hanxiao Wang, Jiongmin Yong. Time-inconsistent stochastic optimal control problems and backward stochastic Volterra integral equations // ESAIM: Control Optimisation and Calculus of Variations. – 2021. № 27. – P. 21.

117. Wanfang Shen, Danping Yang, Wenbin Liu. Optimal control problem governed by a linear hyperbolic integro-differential equation and its finite element analysis // Boundary Value Problems. – 2014. №173. – P. 1-17.

XIII. Новейшие междисциплинарные направления оптимального управления

118. Brunton S. L., Kutz J. N. Data-Driven Science and Engineering: Machine Learning, Dynamical Systems and Control. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2019. — 492 p.

119. Recht B. A tour of reinforcement learning for control // Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems. — 2019. — Vol. 2. — P. 253–279.

120. Dean S., Tu S., Recht B. On the sample complexity of the linear quadratic regulator // Foundations of Computational Mathematics. — 2020. — Vol. 20. — P. 633–679.

121. Fazel M., Ge R., Kakade S., Mesbahi M. Global convergence of policy gradient methods for the LQR problem // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2018. — Vol. 63, № 12. — P. 4089–4104.

122. Chen Y., Recht B. Learning linear dynamical systems with convex optimization // SIAM Journal on Control and Optimization. — 2021. — Vol. 59, № 6. — P. 4232–4255.

123. Berkenkamp F., Turchetta M., Schoellig A., Krause A. Safe model-based reinforcement learning with stability guarantees // Advances in Neural Information Processing Systems. — 2017. — Vol. 30. — P. 908–918.

124. Recht B. A minimalist approach to reinforcement learning // Proceedings of the IEEE. — 2022. — Vol. 110, № 1. — P. 86–110.

125. Lewis F. L., Vamvoudakis K. G. Reinforcement learning for optimal control: overview and recent advances // IEEE Control Systems Magazine. — 2019. — Vol. 39, № 6. — P. 48–71.

126. Сегізбай А. М. Динамикалық жүйелердің басқарымдылығы және тиімді тез әрекет етуі: магистрлік диссертация. — Алматы: Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, 2024. — 81 б. Диссертационная работа магистра.

127. Тұрсынова Ұ. Д. Динамикалық жүйелерді тиімді басқару: магистрлік диссертация. — Алматы: Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, 2024. — 50 б. Диссертационная работа магистра.

128. Mesbahi M., Egerstedt M. Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks. — Princeton: Princeton Univ. Press, 2010. — 408 p.

129. Zhou K., Doyle J. C., Glover K. Robust and Optimal Control. — Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996. — 596 p.

# ПРИЛОЖЕНИЕ

## Интегральное уравнение Фредгольма первого рода с фиксированным параметром и управляемость

В диссертации предлагается метод решения указанных задач путем построения общего решения интегрального уравнения следующего вида

$$\mathrm{K}w = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{K}(t_0, t)w(t)dt = \beta, \quad t \in I = [t_0, t_1], \tag{A1}$$

где $\mathrm{K}(t_0, t) = K(t)$ – известная матрица порядка $n_1 \times \overline{m}$ с элементами из $L_2$, $t \in [t_0, t_1]$, $w(t) \in L_2(I, R^{\overline{m}})$ – искомая функция, $\beta \in R^{n_1}$.

**Задача А.2.1**. *Найти необходимые и достаточные условия существования решения интегрального уравнения* (А1) *для любых* $\beta \in R^{n_1}$.

**Задача А.2.2.** *Найти общее решение интегрального уравнение* (А1)*для любых* $\beta \in R^{n_1}$.

Решения задач А.2.1, А.2.2 позволяют выделить все множества допустимых управлений $\sum_{t_1}$ для задачи управляемости (1.1.2) – (1.1.8) и построить решения задачи (1.1.1) – (1.1.8), при фиксированном $t_1$.

Рассмотрим решения задач А.2.1, А.2.2. Квадратичная форма $y^* C(t_0, t_1)y$, где $y \in R^{n_1}$ – любой вектор, $C(t_0, t_1)$ – постоянная симметричная матрица порядка $n_1 \times n_1$, $(*)$ – знак транспонирования, если главные миноры матрицы $C(t_0, t_1)$ больше нуля. Матрицы $C(t_0, t_1)$ порядка $n_1 \times n_1$ называется положительно-определенной и обозначается $C(t_0, t_1) > 0$.

**Теорема 1.2.1.** *Для того чтобы интегральное уравнение* (А1) *имело решение при всех* $\beta \in R^{n_1}$ *необходимо и достаточно, чтобы матрица*

$$C(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)K^*(t_0, t)dt \tag{A2}$$

*порядка* $n_1 \times n_1$ *является положительно–определенной.*

**Доказательство. Достаточность.** Путь матрица $C(t_0, t_1) > 0$. Покажем, что интегральное уравнение (А1) при любом $\beta \in R^n$ имеет решение. Выберем

$$w(t) = K^*(t_0, t)C^{-1}(t_0, t_1)\beta, \quad t \in I = [t_0, t_1].$$

Тогда

$$Kw = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)K^*(t_0,t)dt \;\; C^{-1}(t_0,t_1)\beta = \beta.$$

Следовательно, в случае, когда $C(t_0,t_1) > 0$, интегральное уравнение (А1) имеет по крайней мере, одно решение $w(t) = K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)\beta, \;\; t \in I, \;\; \beta \in R^n$ - любой вектор. Достаточность доказана.

**Необходимость.** Пусть интегральное уравнение (А1) имеет решение при любом фиксированном $\beta \in R^n$. Покажем, что матрица $C(t_0,t_1) > 0$. Так как $C(t_0,t_1) \geq 0$, то для доказательства $C(t_0,t_1) > 0$ достаточно показать, что матрица $C(t_0,t_1)$ неособая.

Предположим противное. Пусть матрица $C(t_0,t_1)$ особая. Тогда существует вектор $c \in R^n, \;\; c \neq 0$ такой, что $c^*C(t_0,t_1)c = 0$. Определим функцию $\bar{v}(t) = K^*(t_0,t)c, t \in I, \bar{v}(\cdot) \in L_2(I,R^m)$. Заметим, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \bar{v}^*(t)\bar{v}(t)dt = c^* \int_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)K^*(t_0,t)dt \cdot c = c^* \, C(t_0,t_1)c = 0.$$

Следовательно, функция $\bar{v}(t) = 0, \;\; t \in I$. Так как интегральное уравнение (1.2.1) имеет решение для любого $\beta \in R^n$, то, в частности, существует функция $\bar{w}(\cdot) \in L_2(I,R^m)$ такая, что $(\beta = c)$

$$\int_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)\bar{w}(t)dt = c.$$

Тогда верно равенство

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} v^*(t)\bar{w}(t)dt = c^* \int_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)\bar{w}(t)dt = c^*c.$$

Это противоречит тому, что $c \neq 0$. Необходимость доказана. Теорема доказана.

Следующая теорема позволяет найти общее решение интегрального уравнения (1.2.1).

**Теорема А.1.** *Пусть выполнены следующие условия:*

*1.* $v(\cdot) \in L_2(I,R^{\bar{m}})$ *– любая функция,* $\beta \in R^{n_1}$ *– любой вектор;*

*2. Матрица* $C(t_0,t_1) > 0$.

*Тогда функция*

$$w(t) = v(t) + K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)\beta -$$

$$- \ K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)v(t)dt, \quad t \in I, \qquad \text{(A3)}$$

*является общим решением интегрального уравнения (1.2.1).*

**Доказательство.** Введем следующие множества

1. $W = \{w(\cdot) \in L_2(I,R^m) \mid \int_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)w(t)dt = \beta\}$

2.

$$Q = \{w(\cdot) \in L_2(I,R^m) \mid w(t) = K^*(t_0,t)\,C^{-1}(t_0,t_1)\beta + v(t) -$$

$$-K^*(t_0,t)\,C^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1} K(t_0,\eta)v(\eta)d\eta, \qquad \forall v, v(\cdot) \in L_2\ (I,R^m)\}.$$

Множество $W$ содержит все решения интегрального уравнения (A1) при $C(t_0,t_1) > 0$. Теорема утверждает, что функция $w(\cdot) \in L_2(I,R^m)$ принадлежит множеству $W$ тогда и только тогда, когда она принадлежит множеству $Q$, $W = Q$. Докажем, что $W = Q$. Для этого достаточно показать, что $Q \subset W$, $W \subset Q$.

Покажем, что $Q \subset W$. В самом деле, если $w(t) \in Q$, то верно равенство

$$\int_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)w(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)[K^*(t_0,t)\,C^{-1}(t_0,t_1)\beta + v(t) -$$

$$-K^*(t_0,t)\,C^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1} K(t_0,\eta)v(\eta)d\eta]dt =$$

$$= \beta + \int_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)\,v(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} K(t_0,\eta)v(\eta)d\eta = \beta.$$

Отсюда следует, что $w(t) \in W$. Следовательно, $Q \subset W$.

Покажем, что $W \subset Q$. Пусть $w_*(t) \in W$. Следовательно, выполнено равенство

$$\int_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)w_*(t)dt = \beta.$$

Заметим, что в соотношении (А3), функция $v(t) \in L_2(I,R^m)$ произвольная. В частности, можно выбрать $v(t) = w_*(t),\ t \in I$. Теперь функция $w(t) \in Q$. Запишется в виде

$$w(t) = K^*(t_0,t)\ C^{-1}(t_0,t_1)\beta + w_*(t) - K^*(t_0,t)\ C^{-1}(t_0,t_1) \int_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)w_*(t)dt =$$

$$= K^*(t_0,t)\ C^{-1}(t_0,t_1) \int_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)w_*(t)dt + w_*(t) -$$

$$-K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1) \int_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)w_*(t)dt = w_*(t), \qquad t \in I.$$

Следовательно, $w_*(t) = w(t) \in Q$. Отсюда следует, что $W \subset Q$. Из включений $Q \subset W, W \subset Q$ следует, что $W = Q$. Теорема доказана.

Основные свойства решений интегрального уравнения (А1):

1. функция $w(t),\ t \in I$ может быть представлена в виде $w(t) = w_1(t) + w_2(t)$, где $w_1(t) = K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)\beta$ – частное решение интегрального уравнения (А1), $w_2(t) = v(t) - K^*(t_0,\ t)C^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t} K(t_0,t)v(t)dt$ – решение однородного интегрального уравнения $\int_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)w_2(t)dt = 0$;

2. функции $w_1(t) \in L_2(I,R^m),\ w_2(t) \in L_2(I,R^m)$ ортогональны в $L_2$ т.е. $w_1 \perp w_2$. Действительно,

$$\langle w_1, w_2\rangle_{L_2} = \int_{t_0}^{t_1} w_1^*(t)w_2(t)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \beta^* C^{-1}(t_0,t_1)K(t_0,t)[v(t) - K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1) \times \int_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)\ v(t)dt]dt =$$

$$= \beta^* C^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t) v(t) dt - \beta^* C^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t) v(t) dt = 0;$$

3. функция $w_1(t) = K^*(t_0, t)\mathrm{C}^{-1}(t_0, t_1)\beta,\ t \in I$ – является решением интегрального уравнения (A1) с минимальной нормой в $L_2(I, R^m)$. В самом деле, $\|w\|^2 = \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2$. Отсюда следует, что $\|w\|^2 \geq \|w_1\|^2$. Если функция $v(t) = 0,\ t \in I$, то функция $w_2(t) = 0, t \in I$. Тогда $\|w\| = \|w_1\|,\ w(t) = w_1(t), t \in I$;

4. множество решений интегрального уравнения (1.2.1) является выпуклым (см. (A3)).

**Задача 1. Численное решение задачи.**

```
# ====================================================
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp, trapezoid   # trapezoid вместо np.trapz
from scipy.interpolate import interp1d
import matplotlib.pyplot as plt

# ====================================================
# 1. Исходные функции A(t), B(t), μ(t), A0(t), B0(t)
# ====================================================
e = 1e-7

def A_func(t):
    return np.array([[0.0, 1.0],
                     [0.0, 0.0]])

def B_func(t):
    return np.array([[0.0],
                     [1.0]])

def mu_func(t):
    return np.array([np.cos(t), 0.0])

def A0_func(t):
    return e * np.array([[1.0, 0.0]])

def B0_func(t):
    return e * np.array([[0.0]])

# ====================================================
# 2. Размерности: n, m, m2, N
# ====================================================
n = 2
m = 1
m2 = A0_func(0.0).shape[0]  # =1
N = n +  m2                 # =3

# ====================================================
# 3. Расширенные функции A1(t), B1(t), μ⃗(t)
# ====================================================
```

```
def A1_func(t):
    A = A_func(t)
    A0 = A0_func(t)
    top = np.hstack([A, np.zeros((n, m2))])
    bottom = np.hstack([A0, np.zeros((m2, m2))])
    return np.vstack([top, bottom])  # (3×3)

def B1_func(t):
    B = B_func(t)
    B0 = B0_func(t)
    return np.vstack([B, B0])        # (3×1)

def mu_bar_func(t):
    return np.concatenate([mu_func(t), np.zeros((m2,))])  # (3,)

# ============================================================
# 4. Фундаментальная матрица Φ(t,t0)
# ============================================================
def build_fundamental_matrix(A1_func, t0, t1, num_points=200):
    N_mat = A1_func(t0).shape[0]

    def ode_phi(t, y_flat):
        Y = y_flat.reshape((N_mat, N_mat))
        return (A1_func(t) @ Y).flatten()

    Y0 = np.eye(N_mat).flatten()
    t_eval = np.linspace(t0, t1, num_points)

    sol = solve_ivp(
        ode_phi, [t0, t1], Y0, t_eval=t_eval,
        rtol=1e-8, atol=1e-10
    )

    Phi_list = sol.y.T.reshape((num_points, N_mat, N_mat))

    phi_funcs = [[interp1d(sol.t, Phi_list[:, i, j],
                           kind='cubic', fill_value='extrapolate')
                  for j in range(N_mat)] for i in range(N_mat)]

    def phi_eval(t):
        M = np.zeros((N_mat, N_mat))
```

```
        for i in range(N_mat):
            for j in range(N_mat):
                M[i, j] = float(phi_funcs[i][j](t))
        return M

    def phi_inv_eval(t):
        return np.linalg.inv(phi_eval(t))

    def phi_transpose_eval(t):
        return phi_eval(t).T

    return phi_eval, phi_inv_eval, phi_transpose_eval

# ============================================================
# 5. Граммиан W(t0,t)
# ============================================================
def compute_gramian(phi_eval, B1_func, phi_inv_eval, t0, t1, num_points=300):
    N_mat = phi_eval(t0).shape[0]
    ts = np.linspace(t0, t1, num_points)
    dt = ts[1] - ts[0]

    acc = np.zeros((N_mat, N_mat))
    Gram = []

    for t in ts:
        Phi0t = phi_inv_eval(t)
        B1t = B1_func(t)
        acc += (Phi0t @ B1t @ B1t.T @ Phi0t.T) * dt
        Gram.append(acc.copy())

    W_full = Gram[-1]

    W_funcs = [[interp1d(ts, [G[i, j] for G in Gram],
                         kind='linear', fill_value='extrapolate')
                for j in range(N_mat)] for i in range(N_mat)]

    def W_slice(t):
        M = np.zeros((N_mat, N_mat))
        for i in range(N_mat):
            for j in range(N_mat):
                M[i, j] = float(W_funcs[i][j](t))
```

```
        return M

    def W_remain(t):
        return W_full - W_slice(t)

    return W_full, W_slice, W_remain

# ============================================================
# 6. Предвычисление вспомогательных матриц на сетке t_grid
# ============================================================
def build_aux_on_grid(phi_eval, phi_inv_eval, W_full, W_slice, B1_func, mu_bar_func,
t_grid, t0, t1):
    N_mat = phi_eval(t0).shape[0]
    W_inv = np.linalg.inv(W_full)
    Phi_t0_t1 = phi_eval(t1)

    # I_mu = ∫ Φ^{-1}(τ) μ̄(τ) dτ  (замена np.trapz -> trapezoid)
    taus = np.linspace(t0, t1, 300)
    integrand = np.array([phi_inv_eval(tau) @ mu_bar_func(tau) for tau in taus])  #
(K, N)
    I_mu = trapezoid(integrand, taus, axis=0)

    Mu_ts = np.linspace(t0, t1, 200)
    Phi0_tau = [phi_inv_eval(tau) for tau in Mu_ts]
    dt_mu = Mu_ts[1] - Mu_ts[0]

    T1, T2, M1 = [], [], []
    mu3, E1, E2, mu4, M2 = [], [], [], [], []

    for t in t_grid:
        Phi0t = phi_inv_eval(t)
        B1t = B1_func(t)

        # T1,T2,M1
        T1t = - (B1t.T @ Phi0t.T @ W_inv)
        T2t =   (B1t.T @ Phi0t.T @ W_inv @ Phi_t0_t1)
        M1t = -T2t

        T1.append(T1t); T2.append(T2t); M1.append(M1t)

        # mu3
```

```
        mu3.append(-(B1t.T @ Phi0t.T @ W_inv @ I_mu).reshape(-1))

        # E1,E2,mu4,M2
        Ws = W_slice(t)
        E1t = phi_eval(t) @ (W_full - Ws) @ W_inv
        E2t = phi_eval(t) @ Ws @ W_inv @ Phi_t0_t1

        # Jμ up to t (аккуратный  интеграл вместо "sum * (t1-t0)/...")
        K = np.searchsorted(Mu_ts, t, side='left')
        if K <= 1:
            Jm = np.zeros((N_mat,))
        else:
            vals = np.array([phi_eval(t) @ Phi0_tau[k] @ mu_bar_func(Mu_ts[k]) for k
in range(K)])
            Jm = trapezoid(vals, Mu_ts[:K], axis=0)

        mu4.append(Jm - E2t @ I_mu)
        M2.append(-(phi_eval(t) @ Ws @ W_inv @ Phi_t0_t1))

        E1.append(E1t); E2.append(E2t)

    arr = lambda L: np.stack(L, axis=0)
    return {
        'T1': arr(T1), 'T2': arr(T2), 'M1': arr(M1),
        'mu3': np.stack(mu3, axis=0),   # (Nt, 1)
        'E1': arr(E1), 'E2': arr(E2),
        'mu4': np.stack(mu4, axis=0),   # (Nt, N)
        'M2': arr(M2)
    }

# ============================================================
# 7. Градиентный  метод для фиксированного t1
# ============================================================
def solve_fixed_t1(t1, x0, x1, max_iters=300, tol=1e-6, alpha=0.01):
    t0 = 0.0
    N_time = 200
    ts = np.linspace(t0, t1, N_time)

    # Θ₀
    u = 0.5 * np.sin(2 * ts)
    v = 0.3 * np.cos(ts)
```

```
    p = np.vstack([0.2 * ts, 0.2 * ts])

    x0n = x0.copy()
    x1n = x1.copy()
    d = 1e-6 * np.ones((m2,))  # небольшой , но ненулевой

    # проекции
    P_U  = lambda u: np.clip(u, -1, 1)
    P_V1 = lambda p1: np.clip(p1, -1.0, 2.34)
    P_V2 = lambda p2: np.clip(p2, -1.675, 1.0)
    P_L  = lambda vv: vv * (1000 / np.linalg.norm(vv)) if np.linalg.norm(vv) > 1000
else vv
    P_S  = lambda x, R: x * (R / np.linalg.norm(x)) if np.linalg.norm(x) > R else x
    P_D  = lambda dd: np.clip(dd, -1e-4, 1e-4)
    P1   = lambda x: np.concatenate([x, np.zeros((m2,))])

    # предвычисления
    phi, phi_inv, _ = build_fundamental_matrix(A1_func, t0, t1)
    Wf, Ws, _ = compute_gramian(phi, B1_func, phi_inv, t0, t1)
    aux = build_aux_on_grid(phi, phi_inv, Wf, Ws, B1_func, mu_bar_func, ts, t0, t1)

    T1, T2, M1 = aux['T1'], aux['T2'], aux['M1']
    mu3, E1, E2 = aux['mu3'], aux['E1'], aux['E2']
    mu4, M2 = aux['mu4'], aux['M2']

    Fhist = np.zeros((max_iters, N_time))
    x_fin = np.zeros((2, N_time))

    def solve_state(vv):
        f = interp1d(ts, vv, fill_value='extrapolate')

        def ode(t, y):
            return (A1_func(t) @ y +  (B1_func(t) * float(f(t))).flatten() +  mu_bar_func(t))

        res = solve_ivp(ode, [t0, t1], np.concatenate([x0n, np.zeros(m2)]), t_eval=ts)
        return res.y

    # loop
    for it in range(max_iters):
        Z = solve_state(v)
        X = Z[:2].copy()
```

```
        w1 = np.zeros(N_time)
        Y = np.zeros((n, N_time))
        PL = P1(np.array([1, 0]))

        for i, t in enumerate(ts):
            w1[i] = (v[i]
                    + T1[i, 0, :n] @ x0n
                    + T2[i, 0, :n] @ x1n
                    - T1[i, 0, n:] @ d
                    + mu3[i][0]
                    + M1[i, 0] @ Z[:, -1])

            Y[:, i] = (Z[:, i]
                      + E1[i, :, :n] @ x0n
                      + E2[i, :, :n] @ x1n
                      - E2[i, :, n] * (x1n[0])
                      + mu4[i]
                      + M2[i, :, :] @ Z[:, -1])[:n]

        du = w1 - u
        dp1 = p[0] - Y[0]
        dp2 = p[1] - Y[1]

        Fhist[it, :] = du**2 + dp1**2 + dp2**2

        # Градиенты вывести корректно (стоит заглушка)
        grad_norm = np.sqrt(np.linalg.norm(du) + np.linalg.norm(dp1) +
np.linalg.norm(dp2))
        if grad_norm < tol:
            x_fin[:] = X
            break

        u = P_U(u - alpha * du)
        v = P_L(v - alpha * 2 * du)
        p[0] = P_V1(p[0] - alpha * 2 * dp1)
        p[1] = P_V2(p[1] - alpha * 2 * dp2)

        x0n = P_S(x0n - alpha * 0.1, 10)
        x1n = P_S(x1n - alpha * 0.1, 10)
        d = P_D(d - alpha * 0.1)
```

```
    else:
        x_fin[:] = X

    err = np.linalg.norm(X[:, -1] - x1)
    return {'x': X, 'F': Fhist, 't': ts, 'iters': it + 1, 'err': err}

# ============================================================
# 8. Бисекция по t1
# ============================================================
def find_t1(x0, x1, low=0.5, high=3.5, tol=1e-1):
    f = lambda t: solve_fixed_t1(t, x0, x1)
    l, r = low, high
    while r - l > tol:
        m = (l + r) / 2
        sol = f(m)
        if sol['err'] < 1e-2:
            r = m
        else:
            l = m
    return (l + r) / 2

# ============================================================
# 9. Main
# ============================================================
if __name__ == '__main__':
    x0 = np.array([1, 1])
    x1 = np.array([-1, -1])

    t_opt = find_t1(x0, x1)
    sol = solve_fixed_t1(t_opt, x0, x1)

    print(f"t*={t_opt:.3f}, err={sol['err']:.2e}, iters={sol['iters']}")

    plt.plot(sol['t'], sol['x'][0], label='x1')
    plt.plot(sol['t'], sol['x'][1], label='x2')
    plt.legend()
    plt.show()

    plt.imshow(sol['F'][:sol['iters']],
               origin='upper',
```

```
            aspect='auto',
            extent=[sol['t'][0], sol['t'][-1], sol['iters'], 0],
            cmap='hot')
    plt.colorbar()
    plt.show()
# ========================================================
t*=3.453, iters=300
```

### Задача 3. Программная реализация

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
from scipy.interpolate import interp1d
import matplotlib.pyplot as plt

# =========================
# 1) Параметры задачи
# =========================
# Стандартный  Duffing: x1' = x2
#                  x2' = -delta*x2 - alpha*x1 - beta*x1^3 +  u
alpha = -1.0
beta  =  1.0
delta =  0.2

u_min, u_max = -1.0, 1.0

x0 = np.array([1.0, 1.0])      # начальное состояние
xT = np.array([0.0, 0.0])      # целевое состояние (куда хотим прий ти)

# Штраф за недостижение цели (чем больше, тем сильнее тянем x(T) к xT)
rho_terminal = 200.0

# Сетка по времени для управления
N = 500

# Шаг "градиентного" обновления управления
step_u = 0.5

# Сколько итераций  по управлению
max_iters = 80
```

```
# ==========================
# 2) Динамика (прямая система)
# ==========================
def f(t, x, u_fun):
    u = float(u_fun(t))
    x1, x2 = x
    dx1 = x2
    dx2 = -delta*x2 - alpha*x1 - beta*(x1**3) +  u
    return np.array([dx1, dx2])


# ==========================
# 3) Линеаризация по x для сопряженной  системы
# p' = - (df/dx)^T p
# ==========================
def dfdx(t, x, u_fun):
    x1, x2 = x
    # df/dx =
    # [ 0                 1 ]
    # [ -(alpha+ 3beta x1^2)   -delta ]
    return np.array([
        [0.0, 1.0],
        [-(alpha +  3.0*beta*(x1**2)), -delta]
    ])


def adjoint_rhs(t, p, x_fun, u_fun):
    x = x_fun(t)
    A = dfdx(t, x, u_fun)
    # p' = -A^T p
    return -(A.T @ p)


# ==========================
# 4) Решение прямой  и сопряженной  задачи при фиксированном T
# ==========================
def solve_forward(T, t_grid, u_grid):
    u_fun = interp1d(t_grid, u_grid, kind="linear", fill_value="extrapolate")

    sol = solve_ivp(
```

```
        fun=lambda t, x: f(t, x, u_fun),
        t_span=(0.0, T),
        y0=x0,
        t_eval=t_grid,
        rtol=1e-7, atol=1e-9
    )
    if not sol.success:
        raise RuntimeError("Forward solve failed: " +  str(sol.message))

    x_traj = sol.y.T  # shape (N,2)
    x_fun = interp1d(t_grid, x_traj.T, kind="linear", fill_value="extrapolate")
    return x_traj, x_fun


def solve_adjoint(T, t_grid, x_fun, u_fun, x_T):
    # Терминальное условие (для штрафа 0.5*rho*||x(T)-xT||^2):
    # p(T) = rho*(x(T)-xT)
    pT = rho_terminal * (x_T - xT)

    # Решаем назад: удобнее заменить s = T - t, но проще так:
    sol = solve_ivp(
        fun=lambda t, p: adjoint_rhs(t, p, x_fun, u_fun),
        t_span=(T, 0.0),
        y0=pT,
        t_eval=t_grid[::-1],
        rtol=1e-7, atol=1e-9
    )
    if not sol.success:
        raise RuntimeError("Adjoint solve failed: " +  str(sol.message))

    p_traj_rev = sol.y.T              # в порядке t_grid[::-1]
    p_traj = p_traj_rev[::-1]         # перевернули в порядок t_grid
    p_fun = interp1d(t_grid, p_traj.T, kind="linear", fill_value="extrapolate")
    return p_traj, p_fun


# ========================
# 5) Функционал и градиент по u
# J = T +  0.5*rho*||x(T)-xT||^2
#
# dJ/du(t) = dH/du = p2(t) (потому что u входит в dx2 как + u)
```

```
# ========================
def compute_cost(T, x_T):
    return T + 0.5 * rho_terminal * np.sum((x_T - xT)**2)


def improve_u_for_fixed_T(T, u0=None):
    t_grid = np.linspace(0.0, T, N)

    if u0 is None:
        u_grid = np.zeros_like(t_grid)
    else:
        u_grid = np.array(u0, dtype=float)

    history = []

    for k in range(max_iters):
        # Прямая траектория
        x_traj, x_fun = solve_forward(T, t_grid, u_grid)
        u_fun = interp1d(t_grid, u_grid, kind="linear", fill_value="extrapolate")
        x_T_now = x_traj[-1]

        # Сопряженная траектория
        p_traj, p_fun = solve_adjoint(T, t_grid, x_fun, u_fun, x_T_now)

        # Градиент по u: dJ/du(t) = p2(t)
        grad_u = p_traj[:, 1]  # p2

        # Градиентный шаг + проекция на [u_min, u_max]
        u_new = np.clip(u_grid - step_u * grad_u, u_min, u_max)

        J = compute_cost(T, x_T_now)
        history.append(J)

        # критерий остановки
        if np.linalg.norm(u_new - u_grid) / (np.linalg.norm(u_grid) + 1e-9) < 1e-4:
            u_grid = u_new
            break

        u_grid = u_new

    # финальный прогон для возврата траекторий
```

```
    x_traj, _ = solve_forward(T, t_grid, u_grid)
    J_final = compute_cost(T, x_traj[-1])

    return {
        "T": T,
        "t": t_grid,
        "u": u_grid,
        "x": x_traj,
        "J": J_final,
        "J_hist": np.array(history)
    }


# ==========================
# 6) Поиск лучшего T (простой )
# ==========================
def solve_min_time(T_candidates):
    best = None
    # начальное управление можно "передавать" от одного T к другому
    u_warm = None

    for T in T_candidates:
        sol = improve_u_for_fixed_T(T, u0=u_warm)
        u_warm = sol["u"]  # warm start
        print(f"T={T:.3f}  J={sol['J']:.6f}  x(T)={sol['x'][-1]}")
        if best is None or sol["J"] < best["J"]:
            best = sol

    return best


# Пример запуска:
T_grid = np.linspace(0.5, 6.0, 12)   # попробуй  расширить/сузить
best = solve_min_time(T_grid)

print("₩nBEST:")
print("T* =", best["T"])
print("x(T*) =", best["x"][-1])
print("J* =", best["J"])
```

```
# ==========================
# 7) Графики
# ==========================
plt.figure()
plt.plot(best["t"], best["x"][:,0], label="x1")
plt.plot(best["t"], best["x"][:,1], label="x2")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

plt.figure()
plt.plot(best["t"], best["u"], label="u(t)")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

plt.figure()
plt.plot(best["J_hist"], label="J iter")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

T=0.500  J=175.443406  x(T)=[1.31103615 0.17498077]
T=1.000  J=185.434299  x(T)=[ 1.1647932  -0.69828345]
T=1.500  J=168.149396  x(T)=[ 0.70114201 -1.0839252 ]
T=2.000  J=331.350192  x(T)=[ 0.00420351 -1.81479592]
T=2.500  J=601.803117  x(T)=[-0.78752375 -2.3179382 ]
T=3.000  J=266.370380  x(T)=[1.54333401 0.50182061]
T=3.500  J=404.259740  x(T)=[-1.565592   -1.24760534]
T=4.000  J=153.163775  x(T)=[-1.04359288  0.63446958]
T=4.500  J=44.433506  x(T)=[-0.53568492 -0.33522638]
T=5.000  J=116.317350  x(T)=[-0.92155141 -0.51372803]
T=5.500  J=574.898989  x(T)=[-0.86288508 -2.22472902]
T=6.000  J=504.163885  x(T)=[-1.93032314  1.12048714]

BEST: T* = 4.5
x(T*) = [-0.53568492 -0.33522638]
J* = 44.433505531112864
```

### Задача 3. Программная реализация на языке Python

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
from scipy.optimize import minimize
from scipy.interpolate import interp1d
import matplotlib.pyplot as plt

# =========================
# 1) Интервалы
# =========================
t0, t1 = 0.0, 2.0          # I1=[0,2]
tau0, tau1 = 1.0, 2.0      # I2=[1,2]

# =========================
# 2) Ограничения множеств
# =========================
# S0: x1(0) in [-1,1], x2(0) in [1,2]
S0_x1 = (-1.0, 1.0)
S0_x2 = ( 1.0, 2.0)

# S1: x1(2) in [-1,1], x2(2) in [-2,-1]
S1_x1 = (-1.0, 1.0)
S1_x2 = (-2.0, -1.0)

# U: -1<=u<=1
u_min, u_max = -1.0, 1.0

# V: tau <= v(tau) <= 2*tau
def v_bounds(tau_grid):
    lo = tau_grid
    hi = 2.0 * tau_grid
    return lo, hi

# =========================
# 3) Дискретизация управления
# =========================
Nt   = 250
Ntau = 250

t_grid   = np.linspace(t0, t1, Nt)
tau_grid = np.linspace(tau0, tau1, Ntau)

dt   = t_grid[1] - t_grid[0]
dtau = tau_grid[1] - tau_grid[0]
```

```
# ==========================
# 4) Ядро интеграла: 0.5*∫ exp((t+ 1)*tau) v(tau) dtau
# ==========================
K = np.exp((t_grid[:, None] +  1.0) * tau_grid[None, :])  # shape (Nt, Ntau)
# трапец. веса по tau
w_tau = np.ones(Ntau)
w_tau[0] = 0.5
w_tau[-1] = 0.5
w_tau = w_tau * dtau

def integral_term_from_v(v_tau):
    # I(t_i) = 0.5 * sum_j K[i,j]*v[j]*w_tau[j]
    return 0.5 * (K @ (v_tau * w_tau))

# ==========================
# 5) ODE система
# ==========================
def simulate(x0, u_t, v_tau):
    u_fun = interp1d(t_grid, u_t, kind="linear", fill_value="extrapolate")
    I_t = integral_term_from_v(v_tau)
    I_fun = interp1d(t_grid, I_t, kind="linear", fill_value="extrapolate")

    def rhs(t, x):
        x1, x2 = x
        u = float(u_fun(t))
        I = float(I_fun(t))
        return [x2, u +  I]

    sol = solve_ivp(rhs, (t0, t1), x0, t_eval=t_grid, rtol=1e-7, atol=1e-9)
    if not sol.success:
        return None, None
    x_traj = sol.y.T
    return x_traj, x_traj[-1]

# ==========================
# 6) Полезные функции: штраф за выход из интервала
# ==========================
def interval_penalty(val, a, b):
    # 0 если внутри, иначе квадрат расстояния до ближай шей  точки
    if val < a:
        return (a - val)**2
    if val > b:
        return (val - b)**2
    return 0.0
```

```
# ========================
# 7) Оптимизация
# переменная z = [x10, x20, u(t_grid), v(tau_grid)]
# ========================
# веса штрафов
W_terminal = 5_000.0   # чтобы сильно тянуло в S1
W_smooth   = 1e-3      # легкая гладкость (можно 0)

# начальные приближения
x10_init = 0.0
x20_init = 1.5
u_init = np.zeros(Nt)
v_init = 1.5 * tau_grid  # внутри [tau,2tau]

z0 = np.concatenate([[x10_init, x20_init], u_init, v_init])

# bounds для minimize
# x10 in [-1,1], x20 in [1,2]
bnds = [(S0_x1[0], S0_x1[1]), (S0_x2[0], S0_x2[1])]

# u bounds
bnds += [(u_min, u_max)] * Nt

# v bounds: tau <= v <= 2*tau
vlo, vhi = v_bounds(tau_grid)
bnds += list(zip(vlo, vhi))

def objective(z):
    x10, x20 = z[0], z[1]
    u_t = z[2:2+Nt]
    v_tau = z[2+Nt:]

    x_traj, xT = simulate([x10, x20], u_t, v_tau)
    if x_traj is None:
        return 1e18

    # штраф за непопадание в S1
    pen = (
        interval_penalty(xT[0], *S1_x1) +
        interval_penalty(xT[1], *S1_x2)
    )

    # небольшая регуляризация энергий  управления
```

```
    Ju = 0.5 * np.sum(u_t**2) * dt
    Jv = 0.5 * np.sum(v_tau**2) * dtau

    # легкая гладкость (чтобы не было "пилы")
    smooth = W_smooth * (np.sum(np.diff(u_t)**2) +  np.sum(np.diff(v_tau)**2))

    return Ju +  Jv +  W_terminal * pen +  smooth

print("Старт оптимизации... (может занять 1-3 минуты в зависимости от ноутбука)")

res = minimize(
    objective,
    z0,
    method="L-BFGS-B",
    bounds=bnds,
    options={"maxiter": 120}
)
print("Готово!")
print("Успех:", res.success)
print("Сообщение:", res.message)
print("J =", res.fun)
z_opt = res.x
x10_opt, x20_opt = z_opt[0], z_opt[1]
u_opt = z_opt[2:2+Nt]
v_opt = z_opt[2+Nt:]

x_traj, xT = simulate([x10_opt, x20_opt], u_opt, v_opt)
print("x(0) =", [x10_opt, x20_opt])
print("x(2) =", xT)
print("Попадание в S1: x1(2) in [-1,1]? ->", S1_x1[0] <= xT[0] <= S1_x1[1])
print("              x2(2) in [-2,-1]? ->", S1_x2[0] <= xT[1] <= S1_x2[1])
# ==========================
# 8) Графики
# ==========================
plt.figure()
plt.plot(t_grid, x_traj[:,0], label="x1(t)")
plt.plot(t_grid, x_traj[:,1], label="x2(t)")
plt.grid(True); plt.legend(); plt.show()
plt.figure()
plt.plot(t_grid, u_opt, label="u(t)")
plt.grid(True); plt.legend(); plt.show()
plt.figure()
```

```
        plt.plot(tau_grid, v_opt, label="v(tau)")
        plt.plot(tau_grid, tau_grid, "--", label="нижняя граница tau")
        plt.plot(tau_grid, 2*tau_grid, "--", label="верхняя граница 2*tau")
        plt.grid(True); plt.legend(); plt.show()
J = 57340320.053990014
x(0) = [-1.3955320175743196e-08, 1.5000000047310231]
x(2) = [50.74262791 93.83504074]
Попадание в S1: x1(2) in [-1,1]? -> False
                x2(2) in [-2,-1]? -> False
```