

ЛЕКЦИЯ-7

§4.4. Фредгольм теоремалары

Жоғарыдағы талқылаған мәселелер нәтижесінде келесі теоремаларды тұжырымдауға болады.

1 теорема (Фредгольмнің 1-теоремасы). Егер λ регуляр сан. Ал ядросы үзіліссіз

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds + f(x) \quad (61)$$

біртекті емес интегралдық теңдеудің жалғыз ғана үзіліссіз шешімі бар болады, ол шешім

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds + f(x)$$

формуласымен анықталады.

Бұл теоремадан салдар ретінде мынадай тұжырым шығады.

2 теорема. Егер λ регуляр сан болса, онда біртекті

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds \quad (62)$$

теңдеудің тек нөлдік, яғни $\varphi(x) = 0$ шешуі ғана бар болады. Сондықтан егер біртекті (62) теңдеуінің нөлдік емес шешімі бар болса. Ол жағдай тек λ шектік сан болған жағдайда орындалады.

3 теорема. Егер λ_0 меншікті сан болса, онда біртекті (62) теңдеуінің $\varphi(x) \neq 0$ шешімі бар болады.

Дәлелдеуі. Меншікті λ_0 мән резольвентаның r еселі полюсі болсын, демек, резольвента

$$R(x, s, \lambda) = \frac{a_{-r}(x, s)}{(\lambda - \lambda_0)^r} + \frac{a_{-r+1}(x, s)}{(\lambda - \lambda_0)^{r-1}} + \dots + \frac{a_{-1}(x, s)}{\lambda - \lambda_0} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x, s)(\lambda - \lambda_0)^k$$

Лоран қатарына жіктелсін.

Мұндағы, $a_{-r}(x, s) \neq 0$. Интеграл теңдеуді $R(x, s, \lambda)$ үшін Лоран қатармен ауыстырып, одан кейін оның екі жағын $(\lambda - \lambda_0)^r$ көбейтіп, сонан соң $\lambda = \lambda_0$ деп алып,

$$a_{-r}(x, s) = \lambda \int_a^b K(x, t) a_{-r}(t, s) dt,$$

теңдігін аламыз, яғни теорема орынды.

Егер жоғарыдағы (61) теңдеуіне түйіндес

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(s, x) \psi(s) ds + g(x)$$

теңдеуіне Фредгольм әдісін толығымен қайталасақ, оның да шешімін

$$\psi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b R(s, x; \lambda) g(s) ds$$

түрінде анықтаймыз, мұндағы,

$$R(s, x; \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} D(s, x; \lambda).$$

Бұдан бөлшектің бөлімінде Фредгольм анықтауышы $D(\lambda)$ алымында x пен s -тің орындары ауысқан $D(s, x; \lambda)$ анықтауышы тұрғанын байқаймыз. Сондықтан түйіндес теңдеу мен жоғарыдағы (61) теңдеуінің меншікті сандары ортақ. Демек, мына тұжырым орынды.

4 теорема. Біртекті (62) интегралдық теңдеуі мен оған түйіндес

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(s, x; \lambda) \psi(s) ds \quad (63)$$

теңдеуі пара-пар (олардың бірдей шешімдері бар болады немесе екеуінің де шешімі жоқ болады).

Ескерту. Егер біртекті интегралдық теңдеу нөлдік емес бір $\varphi_0(x)$ шешімі бар болса, онда ол теңдеудің ақырсыз көп нөлдік емес шешімдері бар болады, себебі $c\varphi_0(x)$ сол теңдеудің шешімі болады, мұнда c – кез келген тұрақты шама.

Біртекті интегралдық теңдеудің меншікті мәні λ санына сәйкес сызықты тәуелсіз шешімдерінің саны ол мәнің рангісі деп аталады. λ меншікті мән болсын, ал $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ функциялары сол меншікті мәнге сәйкес сызықты тәуелсіз меншікті функциялар болсын, яғни (62) теңдеуінің λ -ға сәйкес нөлдік емес шешімдері

$$\varphi_j(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi_j(s) ds \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

болып жазылсын.

Меншікті функциялардан тұрақты коэффициенттер арқылы түзілген сызықты комбинация да меншікті функция болғандықтан, бұл функцияларға

ортогональдау үдерісін қолдануға болады. Демек, меншікті функцияларды ортогональ және нормаланған деп айтуға болады.

Соңғы теңдікті

$$\frac{1}{\lambda} \varphi_j(x) = \int_a^b K(x,s) \varphi_j(s) ds \quad (j=1,2,\dots,m).$$

түрінде көшіріп жазайық. Міне, бұл өрнектің сол жағы $K(x,s)$ -тің ортонормаланған меншікті функциялар жүйесі бойынша түзілген Фурье коэффициенті екенін көреміз. Бессель теңсіздігі бойынша

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda^2} |\varphi_j(x)|^2 \leq \int_a^b |K(x,s)|^2 ds,$$

ал бұл өрнектің екі жағын x бойынша a -дан b -ға дейін интегралдап,

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda^2} \leq \int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 dx ds$$

теңсіздігінен, одан кейін

$$m \leq \lambda \int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 dx ds$$

өрнегін аламыз. Бұл теңсіздік λ меншікті санына сәйкес сызықты тәуелсіз функциялар саны m соңғы теңсіздіктің оң жағынан (ақырлы саннан) аспайтынын көрсетеді. Нәтижеде мына тұжырым орынды.

5 теорема. Кез келген меншікті мәнге сәйкес сызықты тәуелсіз функциялар саны ақырлы, яғни кез келген меншікті санның рангісі шектелген.

6 теорема. Фредгольмнің 2 теоремасы біртекті (62) интегралдық теңдеуімен оған түйіндес теңдеулердің сандары бірдей сызықты тәуелсіз шешімдері бар болады; яғни ортақ меншікті сандардың рангілері бірдей.

Дәлелдеуі. Теореманы қарсы жорып дәлелдейік. (62) теңдеуінің меншікті мәні λ -нің рангі m , ал (63) теңдеуіндегі меншікті мәнінің рангі n ($m < n$) болсын. $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ және $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$ функциялары сәйкес түрде (62) және (63) теңдеулерінің сызықты тәуелсіз шешімдері делік. Жоғарыда айтқандай, бұл жерде де ол шешімдерді ортонормаланған деп аламыз.

Жаңадан ядро түзейік:

$$L(x,s) = K(x,s) - \sum_{j=1}^m \varphi_j(s) \psi_j(x) \quad (64)$$

және мына екі өзара түйіндес теңдеулерді жазайық:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b L(x,s) \varphi(s) ds, \quad \psi(x) = \lambda \int_a^b L(s,x) \psi(s) ds,$$

(64) ядросына байланысты бұл теңдеулерді

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi(s) ds - \lambda \sum_{j=1}^m \int_a^b \varphi_j(s) \psi_j(x) \varphi(s) ds, \quad (65)$$

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(s,x) \psi(s) ds - \lambda \sum_{j=1}^m \varphi_j(x) \int_a^b \psi_j(s) \psi(s) ds \quad (66)$$

түрінде жазайық. $\varphi(x)$ функциясы (65) теңдеуінің шешімі болсын. Теңдеудің екі жағын да $\psi_k(x)$ ($k=1,2,\dots,m$) функциясына көбейтіп, нәтижелерді x бойынша a -дан b -ға дейін интегралдап,

$$\int_a^b \varphi(x) \psi_k(x) dx = \int_a^b \left[\lambda \int_a^b K(x,s) \varphi(s) ds \right] \psi_k(x) dx - \lambda \sum_{j=1}^m \int_a^b \varphi_j(s) \varphi(s) ds \int_a^b \psi_j(x) \psi_k(x) dx$$

теңдеуін аламыз.

Егер біз $\psi_k(x)$ функциялары

$$\lambda \int_a^b K(x,s) \psi_k(s) ds = \psi_k(x) \quad (k=1,2,\dots,m)$$

теңдеулерінің шешімдері екенін және олардың ортонормаланғанын еске алсақ, алдыңғы теңдеуді

$$\int_a^b \varphi(x) \psi_k(x) dx = \int_a^b \psi_k(s) \varphi(s) ds - \lambda \int_a^b \varphi_k(s) \varphi(s) ds$$

түрінде жазамыз. Бұдан $\lambda \neq 0$ екенін ескеріп,

$$\int_a^b \varphi_k(s) \varphi(s) ds = 0 \quad (k=1,2,\dots,m) \quad (67)$$

өрнегін аламыз. Демек, (67) шарттарын пайдаланып, (65) теңдеуін

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi(s) ds$$

түрінде жазамыз. Бұдан біз (65) теңдеуінің кез келген шешімі (62) теңдеуін де қанағаттандыратынын көреміз. Олай болса, $\varphi(x)$ шешімі сызықты тәуелсіз шешімдердің сызықты комбинациясы ретінде, яғни

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j(x)$$

түрінде өрнектеледі екен.

Енді барлық $c_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) екенін көрсетейік. Ол үшін теңдіктің екі жағында $\varphi_k(x)$ -ке көбейтіп, нәтижені x бойынша a -дан b -ға дейін интегралдап,

$$\int_a^b \varphi(x) \varphi_k(x) dx = \sum_{j=1}^m c_j \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx = c_k \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

катысын аламыз. Бұдан (67) өрнектерін ескеріп, $c_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, m$) екенін шығарамыз. Сонымен $\varphi \equiv 0$, яғни біртекті теңдеудің тек нөлдік шешімі ғана бар болатынын көреміз.

Енді түйіндес теңдеудің нөлге тең емес шешімі бар болатынын көрсетейік. (66) теңдеуінде $\psi(x) = \psi_k(x)$ ($k > m$) деп алып және $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$ ортогональ функциялар жүйесі екенін ескеріп, оның үстіне

$$\psi_k(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \psi_k(s) ds$$

екенін пайдаланып,

$$\psi_k(x) = \lambda \int_a^b L(x, s) \psi_k(s) ds \quad (k > m)$$

теңдігін аламыз, яғни $\psi_k(x) \neq 0$ түйіндес теңдеудің шешімі. Демек, нәтижеде 3-теоремаға қайшы тұжырымға келеміз. Бұл қайшылық $m < n$ болуы мүмкін еместігін көрсетеді. Дәл осылай $m > n$ жағдайының да мүмкін болмайтынын дәлелдей аламыз. Сондықтан $m = n$, демек, Фредгольмнің 2 теоремасы дәлелденді.

Енді, λ ядроның меншікті мәні болған жағдайда, біртекті емес (61) теңдеуін зерттейміз. (61) теңдеуінің шешімі бар, оны $\varphi(x)$ деп қабылдайық. Теңдеудің екі жағын да сәйкес түйіндес теңдеудің меншікті функциялары $\psi_k(x)$ -ке көбейтіп, одан кейін x бойынша a -дан b -ға дейін интегралдап,

$$\int_a^b \varphi(x) \psi_k(x) dx = \int_a^b \varphi(s) \left[\lambda \int_a^b K(s, x) \psi_k(x) dx \right] ds + \int_a^b f(x) \psi_k(x) dx,$$

өрнегін аламыз. Бұл жерде (63) теңдеуін пайдалансақ,

$$\int_a^b \varphi(x) \psi_k(x) dx = \int_a^b \varphi(s) \psi(s) ds + \int_a^b f(x) \psi_k(x) dx,$$

бұдан

$$\int_a^b f(x) \psi_k(x) dx = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (68)$$

шығады. Демек, (61) теңдеуінің шешілуі үшін $f(x)$ функциясы (68) шартын қанағаттандыруы қажет, бұл шарттағы $\psi_k(x)$ түйіндес функцияның λ меншікті мәніне сәйкес функциялар. Енді осы (68) шарттарының жеткілікті де болатынын көрсетейік. (68) шарты орынды деп қабылдайық. $L(x,s)$ ядросын (64) формуласы бойынша түземіз.

Біз жоғарыда λ саны бұл ядроның меншікті мәні емес екенін көрдік, демек,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b L(x,s) \varphi(s) ds \quad (69)$$

теңдеуінің шешуі бар. Бұл теңдеуді мына

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi(s) ds - \lambda \sum_{j=1}^m \psi_j(x) \int_a^b \varphi(s) \varphi_j(s) ds$$

түрінде жазып, оның екі жағын да $\psi_k(x)$ функциясына көбейтіп, одан кейін x бойынша a -дан b -ға дейін интегралдап,

$$\int_a^b \varphi(x) \psi_k(x) dx = \int_a^b f(x) \psi_k(x) dx + \lambda \int_a^b \varphi(s) \psi_k(s) ds - \lambda \int_a^b \varphi(s) \varphi_k(s) ds$$

өрнегін аламыз. Бұдан (68) шартын пайдаланып,

$$\int_a^b \varphi(s) \varphi_k(s) ds = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

екенін көреміз.

Сонымен (61) теңдеуге келтірілді, яғни (69) теңдеудің шешімі $\varphi(x)$ (61) теңдеудің шешімі екен. Демек, (68) шарттары жеткілікті екенін дәлелдедік. Егер осы шарттар орындалса, онда біртекті емес (61) теңдеудің жалпы шешімі қандай да бір дербес $\varphi_0(x)$ шешімі мен біртекті теңдеудің жалпы шешімінің қосындысынан тұрады:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j(x),$$

мұндағы, c_j – тұрақты шамалар. Сөйтіп, бұл жағдайда (61) теңдеуінің ақырсыз көп шешімдері бар болады. Дербес $\varphi_0(x)$ шешімін $L(x,s)$ ядросының резольвентасы арқылы анықтайды.

Міне, бұл талқылаулар нәтижесінде мына тұжырымды дәлелдедік.

7 теорема. (*Фредгольмның теоремасы*). Егер λ параметр (61) теңдеуінің меншікті мәні болса, онда ол теңдеудің шешілуі үшін сол теңдеудегі $f(x)$ бос мүшесі (68) шартын қанағаттандыруы қажетті де, жеткілікті. (68)

өрнектеріндегі $\psi_k(x)$ функциялары (61) теңдеуіне түйіндес біртекті теңдеудің меншікті функциялары. Егер (68) шарттар орындалса, онда (61) теңдеуінің ақырсыз көп жиынды шешімі бар болады да олар соңғы формуламен өрнектеледі.

Сонымен дәлелденген теоремаларды былай қорытындылауға болады.

1. Егер Фредгольмның біртекті интегралдық теңдеуінің тек нольдік шешімі ғана бар болса, онда оған сәйкес біртекті емес интегралдық теңдеудің кез келген бос мүше $f(x)$ үшін жалғыз ғана шешімі бар болады.

2. Берілген біртекті интегралдық теңдеу мен оның түйіндес интегралдық теңдеуінің шешімдері бірдей нөлге тең немесе нөлге тең емес болады. Бұған қоса олардың меншікті мәндерінің рангтері бірдей болады.

3. Біртекті интегралдық теңдеудің нөлге тең емес шешімдері бар болған жағдайда, біртекті емес интегралдық теңдеудің шешімі бар болуы үшін оның бос мүшесі түйіндес интегралдық меншікті функцияларымен ортогональ болуы қажетті де, жеткілікті.