ТЕМПЕРАТУРНЫЙ ПОГРАНСЛОЙ НА ПЛАСТИНЕ
ТЕПЛОВАЯ ЗАДАЧА БЛАЗИУСА

Найдем распределение температуры в пограничном слое на пластине.

Пусть тонкая пластина, температура которой $\boldsymbol{T_w}$, обтекается в продольном направлении потоком несжимаемой жидкости температуры $\boldsymbol{T_\infty}$.

Жидкость имеет постоянные коэффициенты вязкости и теплопроводности

Пренебрежем диссипацией энергии - $\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$

Это возможно, если $U_\infty << a_{зв}$, т.е. при $\mu_\infty < 1$

Распределение температуры в пограничном слое описывается уравнением:

$$u\frac{\partial \Delta T}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial \Delta T}{\partial y} = a\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial y^2} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\Delta T = T - T_w$$

$a = \dfrac{\lambda}{\rho C_p}$, $\boldsymbol{a, \lambda}$ - коэффициенты теплоотдачи и теплопроводности

Граничные условия:

$y = 0,\ u = 0;\qquad T = T_w,\ \Delta T = 0;$

$y = \infty,\ u = u_\infty;\qquad T = T_\infty,\ \Delta T = \Delta T_\infty$

С помощью автомодельных преобразований:

$$u = Ax^{\alpha} F'(\varphi);\ \Delta T = \Gamma x^{\gamma} \theta(\varphi);\quad \theta = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w}$$

Сведем уравнение (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\theta'' + \frac{A}{2aB^2}\left[(\alpha+1)F\theta' - 2\gamma F'\theta\right] = 0 \qquad (2)$$

.

с граничными условиями: $F'(0)=0;\ \theta(0)=0;\ F'(\infty)=1;\ \theta(\infty)=1$

при $y = \infty$, $T = T_\infty$, то $\quad \Delta T(\infty) = T_\infty - T_w = \Gamma x^{\gamma}\theta(\infty) \Rightarrow \gamma = 0$ и $\Gamma = T_\infty - T_w$

(2) $\Rightarrow \quad \theta'' + \frac{A}{2aB^2}\left[(\alpha+1)F\theta'\right] = 0$

Из динамической задачи $\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta'' + \frac{A}{2aB^2} F\theta' = 0$

$$\frac{A}{2aB^2}\cdot\frac{\nu}{\nu}=\left|\frac{A}{2\nu B^2}=\frac{1}{2}\right|\frac{1}{2}\frac{\nu}{a}=\frac{1}{2}\mathrm{Pr};\qquad \mathrm{Pr}=\frac{C_p\mu}{\lambda}$$

$$\Rightarrow\quad \theta''+\frac{\mathrm{Pr}}{2}\theta' F=0$$

Уравнение движения: $$F'''+\frac{1}{2}FF''=0\Rightarrow F=-\frac{2F'''}{F''}$$

$$\theta''-\frac{Pr}{2}\frac{2F'''}{F''}\theta'=0$$

$$\frac{\theta''}{\theta'}=\mathrm{Pr}\frac{F'''}{F''}$$

Проинтегрируем и получим:

$$\ln\theta'=\ln C_1+\ln\left(F''\right)^{\mathrm{Pr}}$$

$$\theta'=C_1\left(F''\right)^{\mathrm{Pr}}$$

$$\theta=C_1\int_0^{\varphi}\left(F''\right)^{Pr}d\varphi+C_2$$

Подставим граничные условия и определим постоянные:

$$C_2 = 0; \quad \tilde{N}_1 = \frac{1}{\int\limits_0^{\infty} \left(F''\right)^{Pr} d\varphi} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\int\limits_0^{\varphi} \left(F''\right)^{Pr} d\varphi}{\int\limits_0^{\infty} \left(F''\right)^{Pr} d\varphi}$$

! Поле температуры определяется полем скорости и зависит от числа Pr.

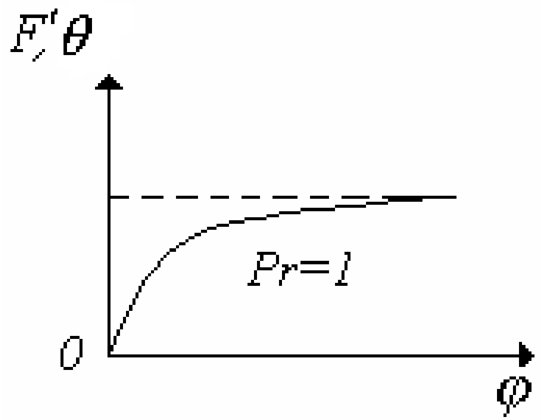
1) Пусть Pr = 1, т.е. $\nu = a$

$$\int\limits_0^{\infty} F'' d\varphi = F'\Big|_0^{\infty} = F'(\infty) - F'(0) = F'(\infty) = 1$$

$$\int\limits_0^{\varphi} F'' d\varphi = F'\Big|_0^{\varphi} = F'(\varphi) - F'(0) = F'(\varphi)$$

$$\theta(\varphi) = F'(\varphi)$$

Профили скорости и температуры подобны.



2) Pr ≠ 1. $\theta = \dfrac{\int_0^{\varphi} (F'')^{Pr}\, d\varphi}{\int_0^{\infty} (F'')^{Pr}\, d\varphi}$ **Используем первое приближение для скорости:**

$$F_1' = erf\,\frac{\varphi}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varphi/2} e^{-\alpha^2} d\alpha \quad \Rightarrow \quad F_1'' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} e^{-\varphi^2/4} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\varphi^2/4}$$

$$\Rightarrow \quad (F_1'')^{Pr} = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{Pr} e^{-Pr\,\varphi^2/4}$$

$$\int_0^{\varphi} (F_1'')^{Pr} d\varphi = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{Pr} \int_0^{\varphi} e^{-Pr\frac{\varphi^2}{4}} d\varphi = \left| \begin{array}{l} Pr\cdot \dfrac{\varphi^2}{4} = \alpha^2 \\ \dfrac{\varphi}{2}\sqrt{Pr} = \alpha; \quad d\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{Pr}} d\alpha \end{array} \right| =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{Pr} \frac{2}{\sqrt{Pr}} \int_0^{\sqrt{Pr}\frac{\varphi}{2}} e^{-\alpha^2} d\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{Pr-1} \frac{1}{\sqrt{Pr}} erf\left(\sqrt{Pr}\,\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\int_0^{\infty} (F_1'')^{Pr} d\varphi = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{Pr-1} \frac{1}{\sqrt{Pr}} erf\,(\infty) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{Pr-1} \frac{1}{\sqrt{Pr}}$$

$$\Rightarrow \quad \theta_1(\varphi) = \frac{\int\limits_0^{\varphi} \left(F_1''\right)^{Pr} d\varphi}{\int\limits_0^{\infty} \left(F_1''\right)^{Pr} d\varphi} = erf\left(\sqrt{Pr}\,\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$F_1' = erf\,\frac{\varphi}{2}$$

Если Pr = 1, то $\theta(\varphi) = F'(\varphi)$.

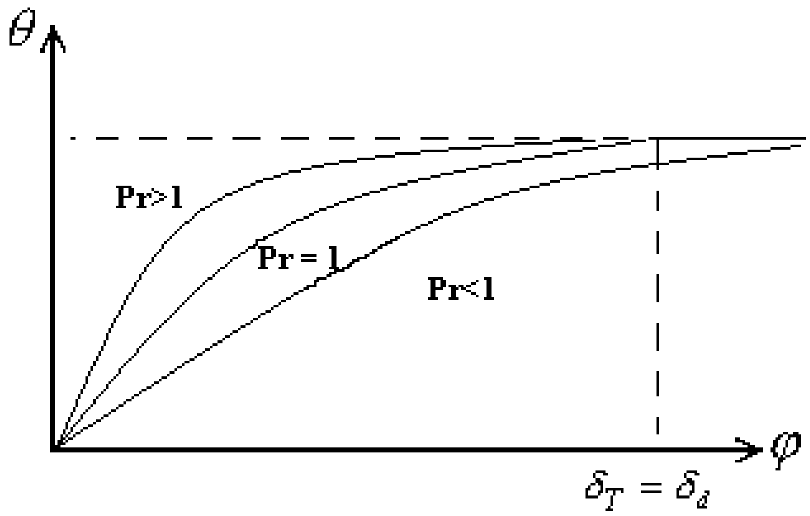
Если Pr ≠ 1, то $0{,}99 = erf\,\dfrac{\varphi_d}{2} \quad \Rightarrow \quad 0{,}99 = erf\left(\sqrt{Pr}\,\dfrac{\varphi_T}{2}\right)$

$$erf\,\frac{\varphi_d}{2} = erf\left(\sqrt{Pr}\,\frac{\varphi_T}{2}\right) \Rightarrow \quad \varphi_d = \sqrt{Pr}\,\varphi_T$$

Так как $\varphi = Bx^{\beta} y = Bx^{\beta}\delta \quad \Rightarrow \quad \delta_d = \sqrt{Pr}\,\delta_T$

$$\boxed{\frac{\delta_T}{\delta_d} = \frac{1}{\sqrt{Pr}}}$$ - в первом приближении

Из точного решения: $\dfrac{\delta_T}{\delta_d} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{Pr}}$



Для чисел Pr > 1 температурный пограничный слой тоньше динамического пограничного слоя. Так, например, для масла (Pr = 100), толщина $\delta_T = \dfrac{1}{10}\delta_d$

Определим местный коэффициент теплопередачи $\alpha(x)$. Вблизи пластины теплоотдача происходит только путем теплопроводности:

$$q_w = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0} = \alpha\left(T_w - T_\infty\right)$$ - закон охлаждения Ньютона

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0} = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}\left(T_\infty - T_w\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big|_{y=0} = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\left(T_\infty - T_w\right)$$

$$\alpha(x)=\frac{q_w}{T_w-T_\infty}=-\lambda\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\Big|_w\frac{T_\infty-T_w}{T_w-T_\infty}=\lambda\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right)_w$$

$$\theta(\varphi)=erf\left(\sqrt{\Pr}\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}=\frac{2}{2}\frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{\pi}}e^{-Pr\,\varphi^2/4};\qquad \frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\Big|_0=\sqrt{\frac{Pr}{\pi}}$$

$$\alpha(x)=\lambda\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\frac{1}{T_w-T_\infty}\sqrt{\frac{Pr}{\pi}}$$

Введем безразмерный коэффициент теплопередачи **– число Нуссельта:**

$$Nu_x=\frac{\alpha x}{\lambda}=\lambda\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\sqrt{\frac{Pr}{\pi}}\frac{x}{\lambda}$$

$$Nu_x=\frac{1}{\pi}\sqrt{Re_x}\sqrt{Pr}=0.6\sqrt{Re_x}\sqrt{Pr}$$

$$\boxed{Nu_x=0.6\sqrt{\mathrm{Re}_x}\sqrt{\Pr}}$$ - для первого приближения

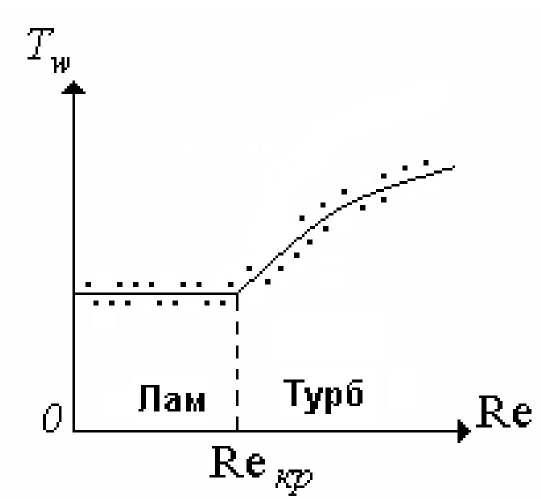
Точное решения, получено Э.Польгаузеном для $0,6 < Pr < 15$

$$Nu_x = 0.332\sqrt{Re_x}\sqrt{Pr}$$

Nu_x - характеризует теплоотдачу в данной точке.

Если пластина имеет длину *l*, толщину *b*, число Nu для пластины:

$$Nu = \frac{b\int_0^l q_w dx}{\lambda(T_w - T_\infty)} = 0.664\sqrt{Re_l}\sqrt[3]{Pr}$$



Результаты измерения собственной температуры плоской пластины при её обтекании в продольном направлении для разных чисел Re.
При переходе ламинарного течения в турбулентное собственная температура стенки резко возрастает.