Уравнения Навье-Стокса

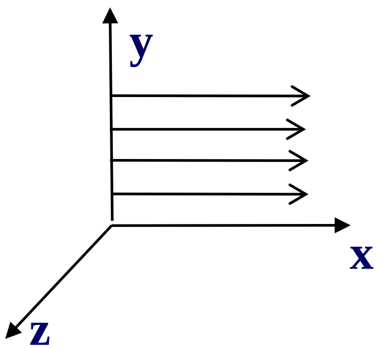
$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\vec{\upsilon})=q_N}$$

$$\boxed{\rho\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t}+\rho\upsilon_k\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}+\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\mu\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial\upsilon_j}{\partial x_j}\right)\right\}=F_{\rho i}}$$

Уравнение энергии

$$\boxed{\rho\frac{di_0}{dt}=\frac{\partial p}{\partial t}+div\mu\left\{\nabla\left(\upsilon^2+\frac{i}{Pr}\right)-\left[\vec{\upsilon}\cdot rot\vec{\upsilon}\right]-\frac{2}{3}\delta_{ik}\vec{\upsilon}div\vec{\upsilon}\right\}+q_N}$$

СЛОИСТЫЕ ТЕЧЕНИЯ



Слоистые течения - это движение жидкой или газовой среды, при котором жидкость или газ движутся слоями параллельными друг другу. При этом сохраняется лишь одна составляющая скорости, а остальные две равны нулю: $\upsilon(u,0,0)$

$$\upsilon_x = u; \quad \upsilon_y = \upsilon_z = 0$$

$$\boxed{u = u(x, y, z, t)}$$

Рассмотрим стационарное течение несжимаемой вязкой жидкости с постоянными свойствами

Стационарное движение: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

Жидкость несжимаемая: $\rho = const \Rightarrow div\vec{\upsilon} = 0$

Жидкость обладает постоянными свойствами: $\mu = const$

Источники энергии отсутствуют: $q_N = 0$

Объемные силы отсутствуют: $F_i = 0$

Динамическая задача

Уравнения Навье-Стокса:

$$\underbrace{\cancel{\rho\frac{\partial u}{\partial t}}}_{0}+\underbrace{\cancel{\rho u\frac{\partial u}{\partial x}}}_{0}+\underbrace{\cancel{\rho v}}_{0}\frac{\partial u}{\partial y}+\underbrace{\cancel{\rho w}}_{0}\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0;\qquad \frac{\partial p}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\underbrace{\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}}_{0}+\underbrace{\cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}}_{0}=0\;\Rightarrow\;\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

Имеем: $p=p(x)$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$ **или так как:** $$\frac{\partial p}{\partial x}=\nabla p\;\Rightarrow\;\boxed{\nabla p=\mu\Delta u}\qquad \mathbf{(1)}$$

уравнение движения для слоистого течения

Тепловая задача

Уравнение энергии в дивергентной форме:

$$div\left\{\rho\vec{\upsilon}\left(i+\frac{\upsilon^2}{2}\right)-\mu\nabla\left(\upsilon^2+\frac{i}{Pr}\right)+\mu\left[\vec{\upsilon}\cdot rot\,\vec{\upsilon}\right]\right\}=0 \qquad \textbf{(2)}$$

Пусть *grad T* невелик $\Rightarrow$ **можно пренебречь изменениями *μ* и *ρ*.**
***μ* = const, *ρ* = const**

Введем обозначение: $\{\ldots\}=\vec{A}\Rightarrow div\vec{A}=\frac{\partial}{\partial x}A_x+\frac{\partial}{\partial y}A_y+\frac{\partial}{\partial z}A_z$

Из уравнения неразрывности $\frac{\partial u}{\partial x}=0$, **тогда** $\frac{\partial}{\partial x}A_x=0$

Так как течение параллельное, тогда $\frac{\partial}{\partial z}A_z=0$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial x}A_x=0\\ \frac{\partial}{\partial z}A_z=0\end{array}\right\}\ \frac{\partial}{\partial y}A_y=0$$

$$\frac{d}{dy}\left\{\rho\vec{\upsilon}\left(i+\cancel{\frac{\upsilon^2}{2}}_{\,0}\right)-\mu\nabla\left(\upsilon^2+\frac{i}{Pr}\right)+\mu\left[\vec{\upsilon}\,rot\,\vec{\upsilon}\right]\right\}_y=0;$$

$$\vec{\upsilon}(u,0,0)\qquad \upsilon_x=u;\qquad \upsilon_y=\upsilon_z=0$$

$$\upsilon^2=u^2+\underbrace{\cancel{\upsilon^2}}_{0}+\underbrace{\cancel{w^2}}_{0}=u^2$$

$$\frac{d}{dy}\left\{-\mu\frac{d}{dy}\left(\upsilon^2+\frac{i}{Pr}\right)+\mu\left[\vec{\upsilon}\cdot rot\,\vec{\upsilon}\right]\right\}_y=0$$

$$\frac{d}{dy}\left\{-\mu\frac{d}{dy}\left(u^2+\frac{i}{Pr}\right)+\mu\left[\vec{\upsilon}\cdot rot\,\vec{\upsilon}\right]_y\right\}=0 \qquad \mathbf{(3)}$$

$$\left[\vec{\upsilon}\cdot rot\vec{\upsilon}\right]_y=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \upsilon_x & \upsilon_y & \upsilon_z\\ rot_x & rot_y & rot_z\end{vmatrix}=\underbrace{\upsilon_z rot_x\vec{\upsilon}}_{0}-\upsilon_x rot_z\vec{\upsilon}=-\upsilon_x\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \upsilon_x & \upsilon_y & \upsilon_z\end{vmatrix}=$$

$$=-\upsilon_x\left(\underbrace{\frac{\partial\upsilon_y}{\partial x}}_{0}-\frac{\partial\upsilon_x}{\partial y}\right)=\upsilon_x\frac{\partial\upsilon_x}{\partial y}=u\frac{\partial u}{\partial y}=u\frac{du}{dy}$$

(3) $\Rightarrow$ $$\frac{d}{dy}\left\{-\mu\frac{d}{dy}\left(u^2+\frac{i}{Pr}\right)+\mu\, u\frac{du}{dy}\right\}=0; \qquad \mu=const$$

$$-\frac{1}{Pr}\frac{d^2i}{dy^2}-\frac{d}{dy}\frac{d}{dy}u^2+\frac{d}{dy}u\frac{du}{dy}=0$$

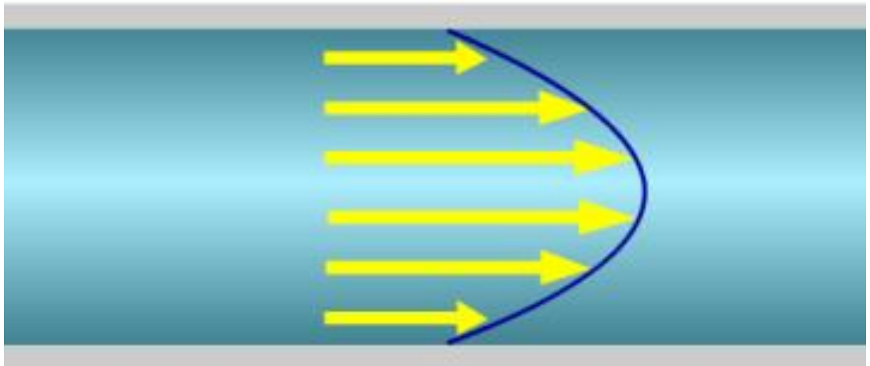
$$-\frac{1}{Pr}\frac{d^2 i}{dy^2}-\frac{d}{dy}2u\frac{du}{dy}+\frac{d}{dy}u\frac{du}{dy}=0$$

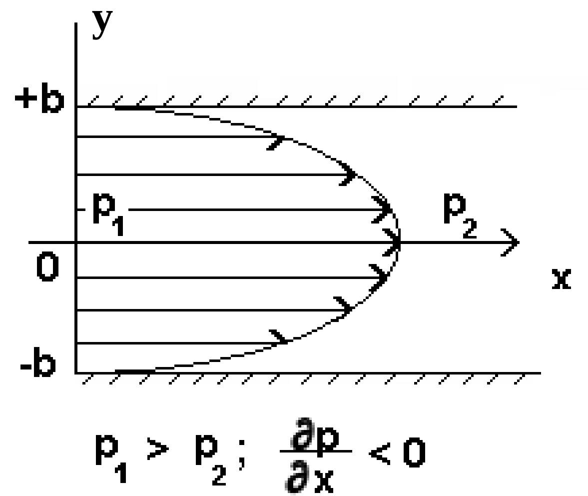
$$-\frac{1}{Pr}\frac{d^2 i}{dy^2}-\frac{d}{dy}\left(2u\frac{du}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)^2+u\frac{d^2 u}{dy}=0$$

$$-\frac{1}{Pr}\frac{d^2 i}{dy^2}-2\left(\frac{du}{dy}\right)^2-2u\frac{d^2 u}{dy^2}+\left(\frac{du}{dy}\right)^2+u\frac{d^2 u}{dy^2}=0$$

$$\boxed{\frac{1}{Pr}\frac{d^2 i}{dy^2}+u\frac{d^2 u}{dy^2}+\left(\frac{du}{dy}\right)^2=0}$$ **- Уравнение энергии для слоистого течения**

ПЛОСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ПУАЗЕЙЛЯ





Расстояние между стенками: ***2b***

$$\frac{\partial p}{\partial x} \neq 0; \qquad p_1 \neq p_2$$

Динамическая задача

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2u}{dy^2}$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dz} = 0$$

Граничные условия:

$$y = +b \longrightarrow u = 0$$

$$y = -b \longrightarrow u = 0$$

Зависимость от различных переменных $\longrightarrow \dfrac{dp}{dx} = const \longrightarrow p = Ax + C$

Проинтегрируем уравнение движения:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}y + C_1$$

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y^2 + C_1 y + C_2$$

Определим C_1 и C_2 из граничных условий:

$y = b;\ u = 0$ $$0 = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{b^2}{2} + C_1 b + C_2 \quad (4)$$

+

$y = -b;\ u = 0$ $$0 = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{b^2}{2} - C_1 b + C_2 \quad (5)$$

$\longrightarrow$ $C_1 = 0;\quad C_2 = -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{b^2}{2}$

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y^2 - \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{b^2}{2} = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}b^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

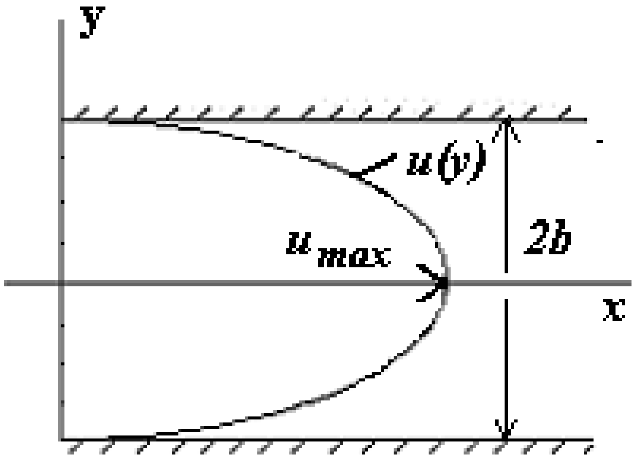
- профиль скорости для слоистого течения Пуазейля

$$\boxed{u = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}b^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}$$

При *y=0*: $u(0) = u_{max}$

$$u_{max} = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}b^2$$

$$u = u_{max}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$$ **- профиль скорости.**



$$\boxed{\frac{u}{u_{max}} = 1-\frac{y^2}{b^2}}$$ **- безразмерный профиль скорости.**

РАСХОД ЖИДКОСТИ Q:

- количество жидкости, протекающей в единицу времени через поперечное сечение канала.

$$Q = \int_{-b}^{+b} u\,dy = u_{max}\int_{-b}^{+b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy = u_{max}\left[\left. y\right|_{-b}^{+b} - \left.\frac{y^3}{3b^2}\right|_{-b}^{+b}\right] = u_{max}\left[2b-\frac{2}{3}\frac{b^3}{b^2}\right] =$$

$$= u_{max}\left(2b-\frac{2}{3}b\right) = \frac{4}{3}bu_{max}$$

Полученное решение справедливо для любого *Re* < *Re*$_{кр}$ **$Re_{кр}$ =2300.**

$$u_{max} = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}b^2 \longrightarrow Q = -\frac{4}{3}b\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}b^2 = -\frac{2}{3}\frac{b^3}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

$$\boxed{Q = -\frac{2}{3}\frac{b^3}{\mu}\frac{dp}{dx}}$$

СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ u_{cp}

$$u_{cp}=\frac{\int_0^b u\,dy}{b}=\left|\begin{array}{l} u=u_{max}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right) \\ y=b \quad \frac{y^2}{b^2}=1 \\ y=0 \quad \frac{y^2}{b^2}=0 \end{array}\right|=\int_0^1 u\,d\left(\frac{y}{b}\right)=u_{max}\int_0^1\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)d\,\frac{y}{b}=\frac{2}{3}u_{max}$$

$$\int_0^1\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)d\,\frac{y}{b}=\left.\frac{y}{b}\right|_0^1-\left.\frac{1}{3}\frac{y^3}{b^3}\right|_0^1=1-0-\frac{1}{3}-0=\frac{2}{3}$$

$$\boxed{u_{cp}=\frac{2}{3}u_{max}}$$

$$\boxed{u=u_{max}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}$$

Вычислим градиент давления вдоль канала:

$$\frac{dp}{dx}=\mu\frac{d^2u}{dy^2} \longrightarrow \frac{d^2u}{dy^2}=\frac{d^2}{dy^2}\left(u_{max}-u_{max}\frac{y^2}{b^2}\right)=-\frac{u_{max}}{b^2}\frac{d^2}{dy^2}(y^2)=-\frac{2u_{max}}{b^2}$$

$$\frac{dp}{dx}=-2\mu\frac{u_{max}}{b^2}$$

Найдем изменение давления на участке конечной длины *dx = l*

$$dp = -2\mu\frac{u_{max}}{b^2}dx; \qquad u_{max} = \frac{3}{2}u_{cp} \longrightarrow dp = \nabla p = -2\mu\frac{u_{max}}{b^2}l$$

$$h = 2b \longrightarrow b = \frac{h}{2} \longrightarrow b^2 = \frac{h^2}{4}$$

$$\nabla p = -2\mu\frac{3}{2}\frac{u_{cp}l\cdot 4}{h^2} = -12\mu\frac{u_{cp}l}{h^2} = \left|Re = \frac{\rho u_{cp}h}{\mu}\right| = -12\mu\frac{u_{cp}l}{h\cdot h}\cdot\frac{\rho}{\rho}\cdot\frac{u_{cp}}{u_{cp}} =$$

$$= -12\frac{u_{cp}^2\cdot\rho}{Re}\cdot\frac{l}{h}\cdot\frac{2}{2} = -\frac{24}{Re}u_{cp}^2\cdot\frac{l}{h}\cdot\frac{\rho}{2} = \left|\lambda = \frac{24}{Re}\right| = -\lambda\frac{\rho}{2}u_{cp}^2\cdot\frac{l}{h}$$

λ ***- коэффициент сопротивления движению жидкости или коэффициент потерь на трение.***

$$\boxed{\nabla p = -\lambda\frac{\rho}{2}u_{cp}^2\cdot\frac{l}{h}}$$ **- формула Дарси**

Вычислим трение τ_w на стенке канала:

$$u = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}b^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$\tau_w\Big|_{y=-b} = \mu\frac{du}{dy}\Big|_{y=-b} = \mu\frac{d}{dy}\left(\underbrace{-\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}b^2}_{0}+\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}b^2\frac{y^2}{b^2}\right)\Bigg|_{y=-b} = \frac{1}{\ }\frac{dp}{dx}\quad\frac{y}{\ }\Big|_{y=-b} =$$

$$= -\frac{dp}{dx}b = \left|\begin{array}{l}\dfrac{dp}{dx} = -2\mu\dfrac{u_{max}}{b^2} \\ u_{max} = \dfrac{3}{2}u_{cp}\end{array}\right| = \mu\frac{3u_{cp}}{b} = \left|b = \frac{h}{2}\right| = 3\mu u_{cp}\frac{2}{h} = 6\frac{\mu u_{cp}}{h}$$

Найдем коэффициент поверхностного трения C_f:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho\frac{u_{cp}^2}{2}} = \frac{6\mu}{h}\cdot\frac{2}{\rho u_{cp}} = \frac{12\mu}{\rho u_{cp} h} = \frac{12}{Re}$$

или

$$\boxed{C_f = \frac{\lambda}{2}}$$

Динамическая задача решена