§ 9. Тригонометриялық функцияларды интегралдау

$J_{m,n}=\int \sin^m x\cos^n xdx$ түрінде берілген тригонометриялық функцияларды интегралдайық, мұндағы $m,\ n$ - бүтін сандар.

1). Егер $m=2k+1$ - тақ оң сан болса, онда

$$J_{m,n}=-\int \sin^{2k} x\cos^n xd(\cos x)=-\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n xd(\cos x)$$

егер $n=2k+1$ - тақ оң сан болса, онда

$$J_{m,n}=\int \sin^m x\cos^{2k} xd(\sin x)=\int (1-\sin^2 x)^k \sin^m xdx$$

2). Егер $m,\ n$ -жұп оң сандар болса, онда интеграл астындағы өрнектер келесі формулалар арқылы өрнектеледі:

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\qquad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),\quad \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$$

3). Егер $m=-\mu,\quad n=-\nu$ - бірдей ретті бүтін теріс сандар болса, онда

$$J_{m,n}=\int \frac{dx}{\sin^\mu x\cos^\nu x}=\int \cos ec^\mu x\sec^{\nu-2} xd(tgx)=$$

$$=\int \left(1+\frac{1}{tg^2x}\right)^{\frac{\mu}{2}}(1+tg^2x)^{\frac{\nu-2}{2}}d(tgx)=\int \frac{(1+tg^2x)^{\frac{\mu+\nu}{2}-1}}{tg^\mu x}d(tgx)$$

4). $\int tg^m xdx\quad \left(\int ctg^m xdx\right)$ түрінде берілген интеграл

$$tg^2x=\sec^2 x-1\qquad \left(ctg^2x=\cos ec^2x-1\right)$$

формуласының көмегімен табылады, мұндағы m - бүтін оң сан.

5). Жалпы жағдайда рекурренттік формулалардың көмегімен табылады.

Мысал 1. $\int \sin^4 xdx=$

интеграл астында $\sin x$ тің жұп дәрежесі болғандықтан, алдындағы мысалдағы әдіс жарамайды, себебі интеграл астында квадраттық иррационалды интегралдауға әкеп соқтырады:

$$\int (\cos^2 x-1)\sqrt{1-\cos^2 x}d(\cos x)=...,-$$

бұл жағдайда интегралдаудың мынадай қарапайым тәсілін қолданамыз, яғни интеграл астындағы функцияның дәрежесін төмендетеміз және

$2\cos^2\alpha = 1+\cos 2\alpha,\ 2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha$ формулаларды қолданып

$$=\frac{1}{4}\int\left(2\sin^2 x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int(1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx =$$

$$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\int\cos 2x d(2x)+\frac{1}{4}\int\cos^2 2x dx =$$

соңғы интегралда тағы да интеграл астындағы функцияның дәрежесін төмендетіп, аргументті екі еселей отырып, келесі теңдікті аламыз:

$$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\int(1+\cos 4x)dx = \frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Кестедегі 1 және 5 формулаларды қолдандық.

Мысал 2.

$$\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}=$$

Бұл мысал 3)жағдайға келеді, яғни $\sin x,\quad \cos x$ тің дәрежелері бірдей ретті бүтін теріс сандар болғандықтан:

$$\int\frac{d(tgx)}{\sin^2 x\cos^4 x} = \int\left(1+\frac{1}{tg^2 x}\right)\left(1+tg^2 x\right)^2 d(tgx) =$$

$$=\int\frac{\left(1+tg^2 x\right)^3}{tg^2 x}d(tgx) = \int\frac{d(tgx)}{tg^2 x}+3\int\frac{tg^2 x}{tg^2 x}d(tgx)+3\int\frac{tg^4 x}{tg^2 x}d(tgx)+$$

$$+\int\frac{tg^6 x}{tg^2 x}d(tgx) = -\frac{1}{tgx}+3tgx+tg^3 x+\frac{tg^5 x}{5}+C$$

Мысал 3.

$$\int\frac{\sin^3 xdx}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}}dx =$$

$$\int\frac{\sin^3 xdx}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}}dx = \int\sin^3 x\cdot\cos^{-\frac{4}{3}}xdx = \int\left(1-\cos^2 x\right)\cos^{-\frac{4}{3}}x\cdot\sin xdx$$

$\cos x = t$ алмастыруын жасаймыз, сонда $-\sin xdx = dt$

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}} dx = -\int \left(1 - t^2\right) \cdot t^{-\frac{4}{3}} dt =$$

$$= -\int t^{-\frac{4}{3}} dt + \int t^{\frac{2}{3}} dt = 3t^{-\frac{1}{3}} + \frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5} \cos x \cdot \sqrt[3]{\cos^2 x} + C.$$

Мысал 4. $\int ctg^6 x dx$

Бұл мысалда 4)жағдайға келеді:

$$\int ctg^6 x dx = \int ctg^4 x \left(\cos ec^2 x - 1\right) dx = -\int ctg^4 x d\left(ctgx\right) -$$

$$-\int ctg^4 x dx = -\frac{ctg^5 x}{5} - \int ctg^2 x \left(\cos ec^2 x - 1\right) dx =$$

$$= -\frac{ctg^5 x}{5} + \frac{ctg^3 x}{3} + \int \left(\cos ec^2 x - 1\right) dx =$$

$$-\frac{ctg^5 x}{5} + \frac{ctg^3 x}{3} - ctgx - x + C.$$

Мысал 5. $\int tg^3 x dx =$

интеграл астындағы $tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ арқылы өрнектеп, интегралды екі интегралдың айырымына жіктейміз:

$$\int tg^3 x dx = \int tgx \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int tgx d\left(tgx\right) - \int \frac{\sin x dx}{\cos x} =$$

$$= \frac{1}{2} tg^2 x + \ln\left|\cos x\right| + C, \; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Жалпы жағдайда $\int R\left(\cos x, \sin x\right) dx,$ түрде берілген интегралды

мұндағы $R\left(u, v\right)$- екі айнымалыға байланысты рационал функция, $t = tg\frac{x}{2}$ алмастыруы арқылы t -ға байланысты рационал бөлшекті интегралдауға әкелеміз.

Мысал 6. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} =$

келесі формулаларды:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

қолдана отырып интеграл астындағы функцияның бөлімін түрлендіреміз:

$$= \int \frac{dx}{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} + 5\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right)} =$$

ұқсас мүшелерін біріктіріп, жақша сыртына $\cos^2\frac{x}{2}$ шығарамыз:

$$\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}\left(6tg^2\frac{x}{2} + 4tg\frac{x}{2} + 4\right)} =$$

$d\left(tg\frac{x}{2}\right) = \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}$ болғандықтан, $\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$ дифференциал астына кіргізіп:

$$= 2\int \frac{d\left(tg\frac{x}{2}\right)}{6tg^2\frac{x}{2} + 4tg\frac{x}{2} + 4} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(tg\frac{x}{2}\right)}{tg^2\frac{x}{2} + \frac{2}{3}tg\frac{x}{2} + \frac{2}{3}} =$$

бөлімін толық квадратқа келтіріп, таблицалық интегралдағы 10) формулаға келеміз:

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d\left(tg\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right)}{\left(tg\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}} = \frac{1\cdot 3}{3\sqrt{5}}\, arctg\frac{3\left(tg\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\, arctg\frac{3tg\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C.$$

Кейбір дербес жағдайларда тригонометриялық функцияларды интегралдағанда басқа әртүрлі әдістерді қолдануға болады.

Дербес жағдайлар:

А) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ немесе $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ теңдіктерінің бірі орындалсын.

Мысал 7. $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} =$

интеграл астындағы функцияның бөлімінде $\sin x$ көбейткіші бар, сондықтан алымын да бөлімін де $\sin x$ -ке көбейтіп, алымындағы $\sin x$ - ті дифференциал астына кіргізіп және интеграл астындағы функцияны $\cos x$ арқылы өрнектейміз:

$$= \int \frac{\sin x dx}{(2+\cos x)\sin^2 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)} =$$

$\cos x$-ке байланысты дұрыс рационал бөлшек алдық,

$\cos x = t$ белгілеуін жасап

$$= +\int \frac{dt}{(t+2)(t-1)(t+1)} =$$

интеграл астындағы функцияны қарапайым бөлшектерге жіктейміз де, үш рет 2) формуланы қолдана отырып:

$$= \int \left(\frac{a}{t+2} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1} \right) dt =$$

$$a(t^2-1) + b(t+2)(t+1) + c(t+2)(t-1) = 1$$

$$t = -2 \Rightarrow \ 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$t = 1 \ \Rightarrow \ 6b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{6}$$

$$t = -1 \Rightarrow -2c = 1 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+2} + \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} = \frac{1}{3}\ln|t+2| + \frac{1}{6}\ln|t-1| -$$

$$-\frac{1}{2}\ln|t+1| + C = \frac{1}{6}\ln\frac{|t-1|(t+2)^2}{|t+3|^3} + C =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3} + C.$$

Ә). $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ теңдігі орындалсын. Бұл теңдік интеграл астындағы функцияның алымы мен бөліміндегі қосылғыштар $\sin x, \cos x$ функцияларының тек қана жұп немесе тек қана тақ дәрежелерімен берілсе ғана орындалады. Бұл жағдайда интеграл астындағы функцияны $t = tgx$ немесе

$t = ctgx$ алмастыруларын жасау арқылы t -ға байланысты рационал функцияға келтіреміз.

Мысал 8. $\int \frac{\sin xdx}{\sin^3 x + \cos^3 x} =$

интеграл астындағы функцияның алымы мен бөліміндегі қосылғыштар $\sin x, \cos x$ функцияларының тек қана тақ дәрежелерімен берілген; бөлімінен $\sin^3 x$ - ті жақшаның сыртына шығарып, интеграл астындағы функцияны $ctgx$ арқылы өрнектейміз, яғни, $t = ctgx$ алмастыруларын жасаймыз:

$$= \int \frac{\sin xdx}{\sin^3 x\left(ctg^3 x + 1\right)} = -\int \frac{d\left(ctgx\right)}{ctg^3 x + 1} =$$

$$= -\int \frac{dt}{t^3 + 1} = -\int \frac{dt}{(t+1)(t^2 - t + 1)} = -\int \left(\frac{a}{t+1} + \frac{bt + c}{t^2 - t + 1} \right) dt =$$

Алынған бөлшекті интегралдаймыз:

$$a(t^2 - t + 1) + (bt + c)(t + 1) = 1$$

$$\begin{array}{l|l} t^2 & a + b = 0 \\ t & -a + b + c = 0 \\ t^0 & a + c = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \\ c = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{3}\int \frac{t-2}{t^2 - t + 1} dt = -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\int \frac{(2t-1) - 3}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt =$$

$$= -\frac{1}{6}\ln\frac{\left(t+1\right)^2}{t^2 - t + 1} - \frac{1 \cdot 2}{2\sqrt{3}} arctg\frac{2t - 1}{\sqrt{3}} + C =$$

кестедегі 2) формуланы екі рет және 10) формуланы қолданамыз; берілген x айнымалысына ораламыз, яғни $t = ctgx$ орнына қоямыз:

$$= -\ln\frac{(ctgx + 1)^2}{ctg^2 x - ctgx + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\frac{2ctgx - 1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= -\frac{1}{6}\ln\frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 - \sin x \cos x} - \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\frac{2\cos x - \sin x}{\sqrt{3}\sin x} + C$$

Б). Интеграл астындағы функция- синустар мен косинустардың әр түрлі аргументтерінің көбейтіндісі. Бұл жағдайда интегралдар келесі формулалар арқылы есептеледі:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

Мысал 9. **2014**. $\int\cos x\cos 2x\cos 3x=$

Жоғарыда көрсетілген 3-ші формуланы екі рет қолданып, келесіні аламыз:

$$=\frac{1}{2}\int(\cos x+\cos 3x)\cos 3x dx=\frac{1}{2}\int\cos x\cos 3x dx+\frac{1}{2}\int\cos^2 3x dx=\frac{1}{4}\int(cos 2x+\cos 4x)dx+$$

$$+\frac{1}{4}\int(1+\cos 6x)dx=$$

$=$ екінші интегралда интеграл астындағы функцияның жұп дәрежесін төмендеттік және 1, 5 формулалары бойынша:

$$=\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{24}\sin 6x+C.$$

В). Әр түрлі аргументті синустар мен косинустардың көбейтіндісі интеграл астындағы функцияның бөлімінде болады. Сондай-ақ сол аргументтердің айырымы тұрақты:

$$(x+a)-(x+b)=a-b=const\neq 0.$$

Бұл жағдайда интеграл астындағы функцияны 1 - ге көбейтейік:

$1=\dfrac{\sin(a-b)}{\sin(a-b)}$ немесе $1=\dfrac{\cos(a-b)}{\cos(a-b)}$

Мысал 10 .**2020**. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\frac{\cos(a-b)}{\sin(x+a)\cos(x+b)}dx=$

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\frac{\cos[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\cos(x+b)}dx=\frac{1}{\cos(a-b)}\left[\int\frac{\cos(x+a)\cos(x+b)}{\sin(x+a)\cos(x+b)}dx+\right.$$

$$\left.+\int\frac{\sin(x+a)\sin(x+b)}{\sin(x+a)\cos(x+b)}dx\right]=\frac{1}{\cos(a-b)}\left[\int\frac{d\sin(x+a)}{\sin(x+a)}-\int\frac{d\cos(x+b)}{\cos(x+b)}\right]=$$

2) формуласы бойынша , егер $\cos(a-b)\neq 0$ болса,

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right|+C.$$

Г). Интеграл астындағы функция – алымы және бөлімі бос мүшесіз сызықтық тригонометриялық көпмүшелік болатын бөлшек:

$$\int \frac{A\sin x + B\cos x}{\alpha\sin x + \beta\cos x}dx =$$

интеграл астындағы функцияның алымы келесі түрде болатындай a мен b алайық:

$$A\sin x + B\cos x \equiv a(\alpha\sin x + \beta\cos x) + b(\alpha\cos x - \beta\sin x),$$

мұндағы $\alpha\cos x - \beta\sin x = (\alpha\sin x + \beta\cos x)'$;

онда бастапқы интеграл келесі өрнекке тең (1,2 формулаларды қараңыз)

$$= \int \frac{a(\alpha\sin x + \beta\cos x)}{\alpha\sin x + \beta\cos x}dx + \int \frac{bd(\alpha\sin x + \beta\cos x)}{\alpha\sin x + \beta\cos x} = ax + b\ln\left|\alpha\sin x + \beta\cos x\right| + C$$

Мысал 11. **2043.1.** $\int \frac{\sin x}{\sin x - 3\cos x}dx =$

алымын келесі түрде аламыз:

$$\sin x = a(\sin x - 3\cos x) + b(\cos x + 3\sin x)$$

$\sin x$ пен $\cos x$ тің коэффициенттерін теңестіріп және алынған екі сызықтық теңдеулер жүйесінен a мен b -ны табамыз:

$$\begin{array}{l|} \sin x \\ \cos x \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} a + 3b = 1 \\ -3a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 0.1 \\ b = 0.3, \end{cases}$$

Сондықтан,

$$= 0.1x + 0.3\ln\left|\sin x - 3\cos x\right| + C.$$

Ғ). Интеграл астындағы функция - алымы мен бөлімі сызықтық тригонометриялық көпмүшелік болатын бөлшек:

$$\int \frac{A\sin x + B\cos x + C}{\alpha\sin x + \beta\cos x + \gamma}dx =$$

a, b, c коэфициенттерін интеграл астындағы функцияның алымы

$$A\sin x + B\cos x + C \equiv a(\alpha\sin x + \beta\cos x + \gamma) + b(\alpha\sin x + \beta\cos x + \gamma)' + C$$

түрде болатындай етіп таңдаймыз:

$$ax + b\ln\left|\alpha\sin x + \beta\cos x + \gamma\right| + c\int \frac{dx}{\alpha\sin x + \beta\cos x + \gamma}.$$

Соңғы интеграл $t = tg\frac{x}{2}$ универсал алмастырудың көмегімен табылады.

Мысал 12. **2047.** $\int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3}dx =$

алымын келесі түрде алайық:

$$\sin x + 2\cos x - 3 = a(\sin x - 2\cos x + 3) + b(\cos x + 2\sin x) + c,$$

$$\begin{array}{l|l} \sin x & a + 2b = 1 \\ \cos x & -2a + b = 2 \\ x^0 & 3a + c = -3 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\end{array}}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{5} \\ b = \frac{4}{5} \\ c = -\frac{6}{5} \end{cases}$$

Сондықтан,

$$= -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\ln\left|\sin x - 2\cos x + 3\right| - \frac{6}{5}\int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x + 3}.$$

Алынған интегралды универсал алмастыру арқылы табамыз. Ол үшін интеграл астындағы функцияны жарты аргумент арқылы өрнектейік:

$$\int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x + 3} = 2\int \frac{d\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) + 3\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)} =$$

Бөлімінде ұқсас мүшелерін топтастырып және $\cos^2\frac{x}{2}$ көбейткішін жақшаның сыртына шығарып, содан кейін дифференциал астына кіргіземіз:

$$= 2\int \frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}\left(5tg^2\frac{x}{2} + 2tg\frac{x}{2} + 1\right)} =$$

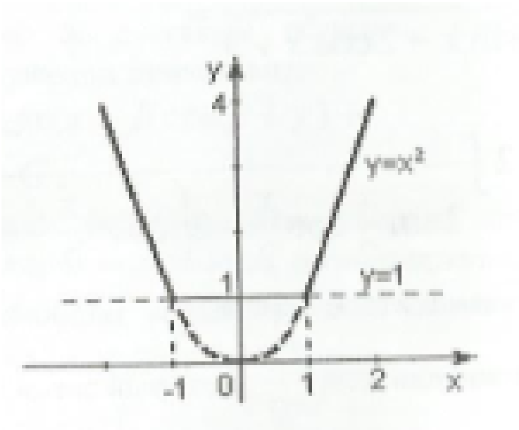
Тұрақтыны интеграл алдына шығарып, бөлімін толық квадратқа келтірсек, кестедегі 10-формуланы аламыз:

$$= \frac{2}{5}\int \frac{dtg\frac{x}{2}}{\left(tg\frac{x}{2} + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{25}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}arctg\frac{5\left(tg\frac{x}{2} + \frac{1}{5}\right)}{2} + C = arctg\frac{1 + 5tg\frac{x}{2}}{2} + C.$$

*Мысал 13.***2171.** $\int \max(1, x^2)dx$.

Интеграл астындағы функция $f(x)=\max(1,x^2)$ барлық $R=(-\infty;+\infty)$ сан өсінде анықталған және үзіліссіз (5-сурет):

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ x^2, & |x|\ge 1.\end{cases}$$

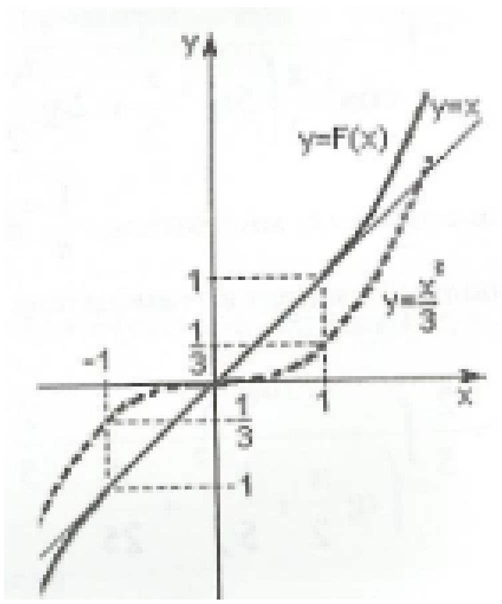


5-сурет

$y=1$ және $y=x^2$ функцияларының алғашқы бейнесі келесі түрде болады: $F(x)=x+C$ және $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+C.$

Берілген $f(x)=\max(1,x^2)$ функциясының кез келген $F(x)$ алғашқы функциясы дифференциалдануы керек болғандықтан, ол үзіліссіз болуы керек. Онда C_1, C_2, C_3 тұрақтыларын $F(x)$ функциясы барлық R-де үзіліссіз болатындай таңдау керек:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+C_1, & x\le -1\\ x+C_2, & |x|\le 1\\ \dfrac{x^3}{3}+C_3, & x\ge 1\end{cases}$$



6-сурет

6-суретте $y = x,\ y = \frac{x^3}{3}$ функцияларының графиктері келтірілген. $F(x)$ функциясы барлық R-де үзіліссіз және дифференциалданатын болу үшін $C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{2}{3}, \quad C_3 = \frac{2}{3}$ деп алсақ жеткілікті. Сонымен,

$$F(x) = \begin{cases} x, & |x| \le 1 \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\operatorname{sgn}(x), & |x| \ge 1. \end{cases}$$

Бұл функцияның туындысы $F'(x) = f(x) = \max(1, x^2) \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$; дербес жағдайда $F'_+(-1) = F'_-(-1) = 1 = f(-1), \quad F'_+(1) = F'_-(1) = 1 = f(1)$. Сонымен, $\int \max(1, x^2)dx = F(x) + C.$

§ 10. «Алынбайтын» интегралдар туралы ескертулер

Анықталмаған интегралдың бар болуы туралы теорема бойынша (a, b) интервалында дифференциалданатын кез келген $f(x)$ функциясы осы интервалда интегралданады, яғни, осы интервалдың әр нүктесінде алғашқы бейнесі бар.

Алайда, интеграл астындағы функцияның барлығының дерлік алғашқы бейнесін элементар функциялар арқылы беруге болмайды екен. Осындай функциялардың интегралын «алынбайтын» деп, ал, тұрақтының арнайы таңдалған кейбір мәндерінде анықталған алғашқы бейнелерді *арнайы функциялар* деп атайды. Практикада көп қолданылатын осындай функцияларға атау беріліп, қасиеттері зерттеледі. Мұндай интегралдардың мысалдары:

$Si(x)=\int \frac{\sin x}{x}dx -$ интегралдық синус,

$Ci(x)=\int \frac{\cos x}{x}dx -$ интегралдық косинус,

$li(x)=\int \frac{dx}{\ln x} -$ интегралдық логарифм,

$\Phi(x)=\int e^{-x^2}dx -$ Эйлер-Пуассон интегралы немесе Гаусс функциясы,

$Ei(x)=\int \frac{e^x}{x}dx -$ интегралдық экспонента, т.с.с.

Кей жағдайларда «алынбайтын» интегралдан құтылуға болады.

Мысал 1. 2093. $\int\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x dx=\int\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)e^x dx=$

$$=\int e^x dx-\int\frac{e^x}{x}dx+4\int\frac{e^x}{x^2}dx=$$

Шыққан интегралдардың екеуі - «алынбайтын»; оның біреуін бөліктеп интегралдаймыз:

$$=\left|\begin{array}{ll} u=e^x & dv=\frac{dx}{x^2} \\ du=e^x dx & v=-\frac{1}{x}\end{array}\right|=e^x-4\int\frac{e^x}{x}dx-4\frac{e^x}{x}+4\int\frac{e^x}{x}dx=$$

«алынбайтын» интегралдар өзара жойылады, қорытындысында:

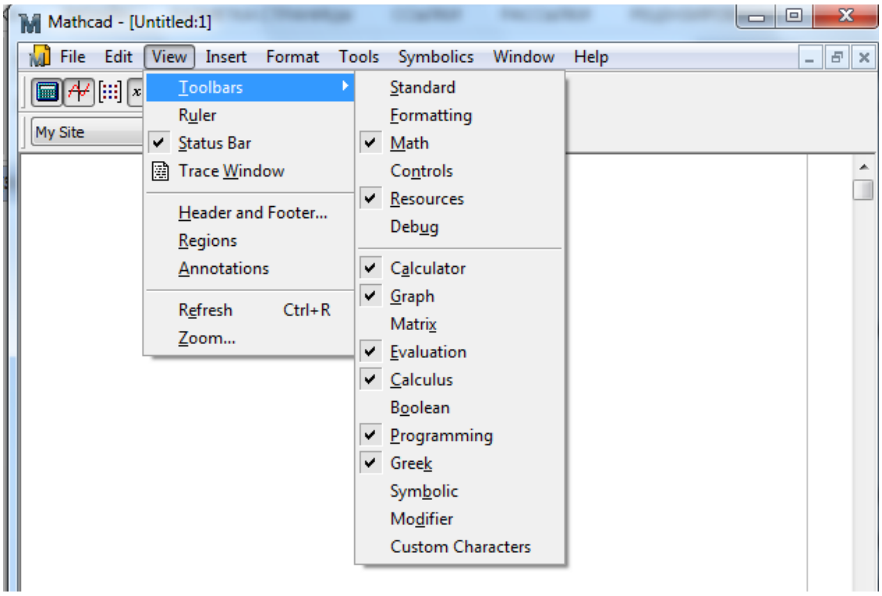
$$= e^{x}\left(1-\frac{4}{x}\right)+C.$$

§ 11. Анықталмаған интегралды Mathcad программасы көмегімен табу

Енді интеграл астындағы функцияның алғашқы бейнесін **Mathcad** компьютерлік үлгілеу программасының көмегімен табу жолын көрсетейік.

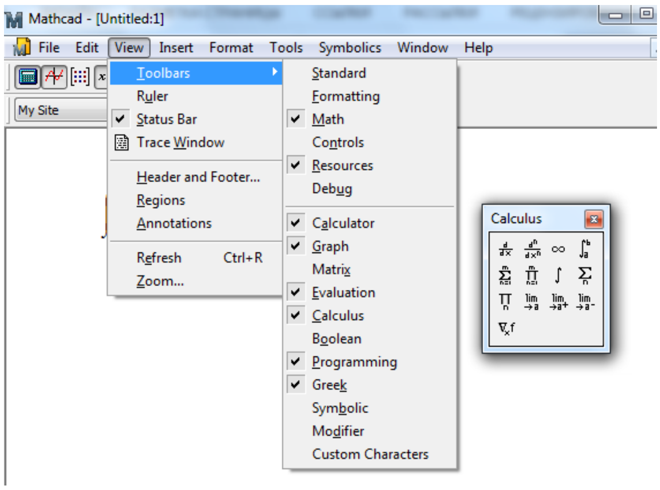
Mathcad программасы қойылған соң, жұмыс тақтасын (терезесін) шақыру қол кілтінің курсорын Mathcad программасының пиктограммасын басу

арқылы орындалады.

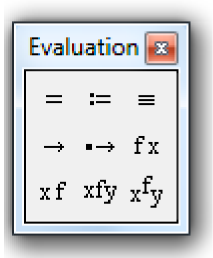


Тапсырма. $\int e^{x}\sin(2x)dx$ табу керек.

Орындалуы: Жұмыс тақтасының жоғарғы жағынан негізгі менюдің **Вид** командасын басып, ішкі менюдің құралдар панелінің математика жолынан Calculus панелін басамыз.



Математикалық өрнектерді дәптерге жазғандай етіп теріп, көк сызықпен әрлеп, теңдік белгісінің «→» символын



панелінен тауып басамыз. Нәтиже: