Дәріс 10. Шегерімдер. Бірмәнді аналитикалық функцияның шегерімі

Егер z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының n-ші ретті нөлі болса, онда z_0 нүктесі

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$$

функциясы үшін n-ші ретті полюс болады және керісінше.

Тұжырым. *$f(z)$ функциясының z_0 нүктесі полюс болу үшін бұл нүкте $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ функциясы үшін нолі болуы керек ($\varphi(z_0) = 0$).*

Анықтама. *f аналитикалық функциясының $z = a \in C$ оқшауланған нүктесінің маңайында Лоран қатарына жіктелудегі теріс бірінші дәреженің коэффициенті c_{-1} осы f функциясының оқшауланған нүктедегі* **шегерімі** *деп аталады.*

Шегерімді мына түрде

$$c_{-1} = \mathrm{res}_a\, f(z)$$

немесе

$$c_{-1} = \mathrm{res}\, f(a)$$

белгілейді. (Шегерімнің белгіленуі француз сөзі *résidu* деген сөзден алынған).

Лоран қатарының коэффициенттері үшін

$$\underset{a}{\mathrm{res}} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)dz$$

теңдігі орындалады, мұндағы γ-жалғыз ғана $z = a$ оқшауланған нүктесін қамтитын кез келген тұйық контур.

Егер $z = a$ – жөнделетін ерекше нүкте болса, онда $\underset{a}{\mathrm{res}} f(z) = 0$. Егер $z = a$ – бірінші ретті полюс болса, онда $\underset{a}{\mathrm{res}} f(z) \neq 0$. Басқа жағдайларда $\underset{a}{\mathrm{res}} f(z)$ нөлге тең болуы да, болмауы да мүмкін, мысалы

$$\underset{0}{\mathrm{res}}\frac{\sin z}{z} = 0, \quad \underset{2}{\mathrm{res}}\frac{1}{z-2} = 1, \quad \mathrm{res}_0^{\frac{1}{z^2}} = 0$$

Айталық, $z = a$ нүктесі f функциясының p-ретті полюсі болсын. f функциясының Лоран қатарына $z = a$ нүктесінің ойылған маңайында жіктелуі келесі түрде жазылады:

$$f(z) = \frac{c_{-p}}{(z-a)^p} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Осыдан

$$f(z)(z-a)^p = c_{-p} + c_{-p+1}(z-a) + \ldots + c_{-1}(z-a)^{p-1} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+p}$$

өрнегін аламыз.

$$\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\left(f(z)(z-a)^p\right) = c_{-1}(p-1)! + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+p)\cdot \ldots \cdot (n+2)(z-a)^{n+1},$$

$$\lim_{z\to a} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\left(f(z)(z-a)^p\right) = c_{-1}(p-1)!$$

Сонымен f функциясының p-ретті полюстегі шегерімін есептейтін мынадай формула алдық:

$$\operatorname*{res}_a f(z) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\left(f(z)(z-a)^p\right) \tag{3}$$

Егер $p = 1$ болса,

$$\operatorname*{res}_a f(z) = \lim_{z\to a} f(z)(z-a) \tag{4}$$

Практикада (4)-ші формуланы аздап өзгертіп қолданған ыңғайлы. Айталық, f функциясы $z = a$ жай полюстің маңайында

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\phi(z)} \tag{5}$$

түрінде жазылсын, мұндағы φ және ϕ функциялары $z = a$ нүктесінде аналитикалық функциялар болады және $\varphi(a) \neq 0, \phi(a) = 0, \phi'(a) \neq 0$. (4) - формула бойынша

$$\operatorname{res}_a f(z) = \lim_{z\to a} \frac{\varphi(z)(z-a)}{\phi(z)} = \lim_{z\to a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\phi(z)-\phi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\phi'(a)},$$

яғни

$$\operatorname*{res}_a f(z) = \frac{\varphi(a)}{\phi'(a)} \tag{6}$$

Егер f функциясы (5) формуламен анықталса, ал φ және ϕ функцияларының $z = a$ нүктесінде бірден жоғары ретті нөлдері болса, онда шегерімді есептеу үшін φ және ϕ функцияларын Тейлор қатарының бірнеше мүшесімен алмастырған ыңғайлы болады.

Егер $z = a$ елеулі ерекше нүкте болса, онда шегерімді табу үшін функцияның Лоран қатарына жіктелуін қарастырамыз. Сол жіктелудегі c_{-1} коэффициенті $f(z)$ функциясының $z = a$ нүктесіндегі шегерімі болады.

Коши теоремасы. *Егер $f(z)$ функциясы D аймағының Γ шекарасында аналитикалық және D аймағының ішінде $z_1, z_2, \dots, z_n$ ерекше нүктелерінен басқа нүктелерде аналитикалық болса, онда*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f\left(z_k\right).$$

Анықтама. $a = \infty$ *нүктесі $f(z)$ аналитикалық функциясының оқшауланған ерекше нүктесі болсын. Онда $a = \infty$ нүктесіндегі $f(z)$ функциясының шегерімі деп $f(z)$ функциясының шексіздіктің маңайында жіктелуіндегі теріс бірінші дәрежені (-1)-ге көбейткен коэффициент алынады.*

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} f(z)dz,$$

мұндағы Γ^+ контурды сағат тілі бағыты бойынша айналуды білдіреді.

Мысал 1

$f(z) = \frac{z^3}{1+z-e^z}$ функциясы үшін $z_0 = 0$ нөлдік нүктесінің ретін табу керек.

Шешуі:

$$f(z) = \frac{z^3}{1+z-e^z} = \frac{z^3}{1+z-\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots\right)} =$$

$= \frac{z^3}{-\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}-\dots} = \frac{1}{-\frac{1}{2!}-\frac{z}{3!}-\dots}$. Ендеше, анықтама бойынша,
$z_0 = 0$ - бірінші ретті нөл немесе жай нөл.

Мысал 2

$f(z) = 6\sin z^3 + z^3\left(z^6 - 6\right)$ функциясы үшін $z_0 = 0$ нөлдік нүктесінің ретін табу керек.

Шешуі:

$$f(z)=6\left(z^3-\frac{z^9}{3!}+\frac{z^{15}}{5!}-\frac{z^{21}}{7!}+\ldots\right)+z^9-6z^3=$$
$$=6z^3-z^9+\frac{6z^{15}}{5!}-\frac{6z^{21}}{7!}+\ldots+z^9-6z^3=$$
$$=z^{15}\left(\frac{6}{5!}-\frac{6z^5}{7!}+\ldots\right)$$

Сонымен $z_0=0$ нүктесі 15 - ретті нөл.

Мысал 3

$f(z)=\frac{1}{z-\sin z}$ функциясының $z_0=0$ ерекше нүктесінің түрін анықтау керек.

Шешуі:

$$f(z)=\frac{1}{z-\sin z}=\frac{1}{z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots\right)}=$$
$$=\frac{1}{z^3\left(\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}-\ldots\right)}$$

Сонымен $z_0=0$ нүктесі 3-ші ретті полюс.

Мысал 4

$f(z)=\frac{\sin z}{e^{-z}+z-1}$ функциясының $z_0=0$ ерекше нүктесінің түрін анықтау керек.

Шешуі:

$$\frac{\sin z}{e^{-z}+z-1}=\frac{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots}{1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\ldots+z-1}=$$
$$=\frac{z\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\ldots\right)}{z^2\left(\frac{1}{2!}-\frac{z}{3!}+\ldots\right)}=\frac{\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\ldots\right)}{z\left(\frac{1}{2!}-\frac{z}{3!}+\ldots\right)}$$

$z_0=0$ нүктесі жай полюс.

Мысал 5

$f(z) = \cos\frac{1}{z+\pi}$ функциясының $z_0 = -\pi$ ерекше нүктесінің түрін анықтау керек.

Шешуі:

$f(z) = \cos\frac{1}{z+\pi} = 1 - \frac{1}{2!(z+\pi)^2} + \frac{1}{4!(z+\pi)^4} - \frac{1}{6!(z+\pi)^6} + \dots$
$z_0 = -\pi$ нүктесі елеулі ерекше нүкте, себебі Лоран қатарының басты бөлігінің шексіз көп мүшелері бар.

Мысал 6

$f(z) = \frac{1+\cos z}{z-\pi}$ функциясының $z_0 = \pi$ ерекше нүктесінің түрін анықтау керек.

Шешуі:

$$\frac{1+\cos z}{z-\pi} = \frac{1-\cos(z-\pi)}{z-\pi} = \frac{1 - 1 + \frac{(z-\pi)^2}{2!} - \frac{(z-\pi)^4}{4!} + \dots}{z-\pi} =$$
$$= \frac{z-\pi}{2!} - \frac{(z-\pi)^3}{4!} + \frac{(z-\pi)^5}{6!} - \dots$$

$z_0 = \pi$ жөнделетін ерекше нүкте, себебі функцияның Лоран қатарына жіктелуінде басты бөлігі жоқ.

Мысал 7

$f(z) = z^3 e^{\bar{z}}$ функциясының ерекше нүктедегі шегерімін есептеу керек.

Шешуі:

Функцияның ерекше нүктесі $z = 0$.

$$f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}} = z^3\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \dots\right) =$$
$$= z^4 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!z} + \frac{1}{5!z^2} + \frac{1}{6!z^3} + \frac{1}{7!z^4} + \dots$$
$$\operatorname{res}_0 f(z) = \frac{1}{4!}$$

Мысал 8

$f(z) = \frac{e^z}{z^3(z-1)}$ функциясының ерекше нүктедегі шегерімін есептеу керек.

Шешуі:

Берілген функцияның ерекше нүктесі екеу: $z_1 = 0$ нүктесі 3 ретті полюс болса, $z_2 = 1$ - жай полюс. $\operatorname{res} f(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{e^z}{z^3(z-1)} = e$.
Енді $z_1 = 0$ нүктесіндегі шегерімді есептейік. (2) формула бойынша

$$\operatorname{res} f(z) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z}{z-1}\right)'' = \left| \begin{array}{l} \left(\frac{e^z}{z-1}\right)' = \frac{e^z(z-1)-e^z}{(z-1)^2}; \\ \left(\frac{e^z}{z-1}\right)'' = \frac{e^z(z-1)^2-2e^z(z-2)}{(z-1)^3} \end{array} \right| =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{e^z(z-1)^2-2e^z(z-2)}{(z-1)^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+4}{-1} = -\frac{5}{2}.$$

Сонымен

$$\operatorname*{res}_{1} f(z) = e$$

$$\operatorname{res}_0 f(z) = -\frac{5}{2}$$

Мысал 9

$f(z) = e^{\frac{z}{z-1}}$ функциясының ерекше нүктедегі шегерімін есептеу керек.

Шешуі:

Функцияның ерекше нүктесі $z = 1$.

$$f(z) = e^{\frac{z}{z-1}} = e^{1+\frac{1}{z-1}} = e\cdot e^{\frac{1}{z-1}} =$$
$$= e\left(1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{3!(z-1)^3} + \dots\right)$$

$z = 1$ нүктесі елеулі ерекше нүкте,

$$\operatorname*{res}_{1} f(z) = c_{-1} = e$$

Мысал 10

$f(z) = \frac{\cos z}{z^3 - \frac{\pi}{2} z^2}$ функциясының ерекше нүктедегі шегерімін есептеу керек.

Шешуі:

Функцияның екі ерекше нүктесі бар: $z_1 = 0, z_2 = \frac{\pi}{2}$. $z_2 = \frac{\pi}{2}$ жөнделетін ерекше нүкте болатындығын көрсету қиын емес. Ендеше жөнделетін ерекше нүктедегі шегерім нөлге тең болғандықтан, $\operatorname{res} f(z) = 0$.
$\frac{\pi}{2}$

$\operatorname{res}_0 f(z) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 0} \left(\frac{\cos z}{z^2 \left(z - \frac{\pi}{2}\right)} \cdot z^2 \right)' = \lim_{z \to 0} \frac{-\sin z \left(z - \frac{\pi}{2}\right) - \cos z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2} =$
$= \lim_{z \to 0} \frac{-1}{\frac{\pi^2}{4}} = -\frac{4}{\pi^2}.$
Сонымен

$$\operatorname*{res}_{0} f(z) = -\frac{4}{\pi^2}, \quad \operatorname*{res}_{\frac{\pi}{2}} f(z) = 0$$