

АЙНЫМАЛЫЛАР, ФУНКЦИЯЛАР, САНДЫҚ ТІЗБЕКТЕР

Айнымалылар. Нақты және комплекс сандар

Анықтамалар. Математикалық логиканың кейбір белгілеулері

Анықтама

1. Қандай да бір құбылысты меңгеру кезінде тым болмағанда екі мән қабылдайтын шаманы айнымалы деп атаймыз, кері жағдайда тұрақты деп атаймыз.
2. Кез келген құбылыста өз мәнін сақтап қалатын шаманы абсолютті тұрақты деп атаймыз. Мысалы, π саны.
3. Айнымалылардың барлық мәндерінің жиынын осы айнымалының өзгеру облысы деп атаймыз.

Жазуды қысқарту үшін мынадай белгілеулерге тоқтала кетелік: α және β – қандай да бір тұжырым, A және B – жиындар, x – жиынның элементі болсын, сонымен қатар, математикалық логикада мынадай белгілеулер енгізілген:

1. $x \in A$ - x элементі A жиынына тиісті;
2. $A \subset B$ - A жиыны B жиынының ішкі жиыны;
3. $\Rightarrow$ (шығады). $\alpha \Rightarrow \beta$ - α тұжырымынан β тұжырымы шығады;
4. $\Leftrightarrow$ (эквиваленттілік). $\alpha \Leftrightarrow \beta$ - бұл $\alpha \Rightarrow \beta$ және $\beta \Rightarrow \alpha$ дегенді білдіреді.
5. $\forall$ (жалпылық кванторы). $\forall x \in A: \alpha$ - кез келген $x \in A$ үшін α тұжырымы орынды.

$$A \subset B: \forall x \in A \Rightarrow x \in B \quad (1)$$

6. $\neg$ (кері). $\bar{\alpha}$ - α тұжырымының керісі.

7. $\exists x$ (табылу кванторы). $\exists x \in A: \alpha$ - A -дан x элементі табылады, α тұжырымы ақиқат болатындай.

Нақты (заттық) сандар

Рационал сандар деп – $\frac{p}{q}$ түрінде болатын сандарды айтамыз, мұндағы p, q -бүтін сандар ($q \neq 0$).

Сонымен бірге, ол шектеусіз периодты ондық бөлшек түрінде берілуі де мүмкін $\left(\frac{2}{3} = 0,666\ldots\right)$.

Рационал сан болмайтын, шектеусіз периодты емес ондық бөлшек түрінде берілетін $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ сандар да табылады. Бұндай сандар иррационал сандар деп аталады.

Анықтама 4. Барлық рационал сандар мен иррационал сандар жиынын нақты (заттық) сандар жиыны деп атаймыз.

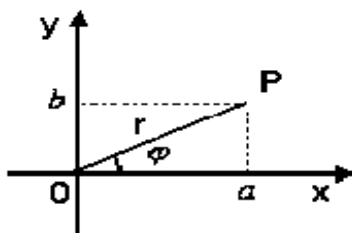
Нақты сандарды сандық осьтегі нүктелер арқылы бейнелеуге болады. Нақты сандар жиыны мен сандық осьтің нүктелерінің жиынының арасында өзара-бірмәнді сәйкестік бар, яғни, барлық нақты сандар бүкіл сан осін толық жабады. Нақты сандарға қолданылатын амалдардың қасиеттері рационал сандарға қолданылатын амалдардың қасиеттерімен бірдей.

Комплекс сандар

Анықтама 5. Комплекс сан деп $z = a + bi$ түріндегі өрнекті айтамыз, мұндағы a және b - нақты сандар, ал i $i^2 = -1$ немесе $i = \sqrt{-1}$ теңдіктерімен анықталатын жорамал бірлік, сонымен қатар, a z комплекс санының нақты бөлігі, ал bi – жорамал бөлігі деп аталады.

Егер $b = 0$ болса, онда $z = a + 0i$ -ның орнына $z = a$ деп жазады және оның a санынан ешбір айырмашылығы жоқ. Ендеше, нақты сандар – комплекс санның дербес жағдайы.

$z = a + bi$ саны Oxy жазықтығында $P(a, b)$ нүктесі болып бейнеленеді.



$OP = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ саны z комплекс санының модулы деп, ал $\varphi = \arg z$ - z комплекс санының аргументі деп аталады.

Комплекс сандар жиыны мен Ox жазықтығының нүктелерінің арасында өзара-бірімәнді сәйкестік бар. $a = r \cos \varphi$ және $b = r \sin \varphi$ болғандықтан, z комплекс санын $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ түрінде жазуға болады, бұл z комплекс санының тригонометриялық формасы деп аталады.

Комплекс сандар арасындағы амалдар $i^2 = -1$ екені ескеріле отырып, жүргізіледі:

1. $(a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + (b \pm d)i$,
2. $(a + ib)(c + id) = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$,
3. $\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd}{c^2 - d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - d^2}i$.

Тригонометриялық формадағы $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ комплекс сандар үшін, яғни, $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ және $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ үшін төмендегі теңдік орынды:

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$,
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$,
3. $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ - Муавр формуласы,
4. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} (\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n})$, $n = \overline{0, n-1}$, яғни, $\sqrt[n]{z}$ -нің әрқашанда әртүрлі n мәні бар.

Анықтама 6. $z = a + bi$ және $\bar{z} = a - bi$ сандары түйіндес деп аталады және $z\bar{z} = a^2 - b^2$.

Теорема 1. Егер нақты коэффициентті көпмүшеліктің $z = a + bi$ саны түбірі болса, онда $\bar{z} = a - bi$ саны да осы көпмүшеліктің түбірі болады.

Мысал 1. $x^2 + x + 1 = 0$ квадрат теңдеуін шеш.

Дискриминант табамыз: $D = 1^2 - 4 = -3 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{-3} = i\sqrt{3}$. Онда

$$x_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

1-ші мысалдан байқайтынымыз, квадрат теңдеудің әрқашанда екі түбірі болады: нақты немесе комплекс. Егер оның түбірі комплекс сан болса, оның екінші түбірі осы комплекс санның түйіндесі болады.

Ары қарай бізге төмендегі көрсеткіштік функция қажет болады:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Егер $x = 0$ болса, кәдімгі көрсеткіштік e^x функциясын аламыз, ал егер $y = 0$ болса, онда Эйлер формуласын аламыз

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

Нақты айнымалы функция

D қандай да бір R_n кеңістігіндегі нүктелер жиыны болсын.

M - ағымдық нүкте, M_0 - таңдап алынған нүкте, ρ_{MM_0} - M және M_0 нүктелерінің ара қашықтығы болсын. $\rho_{MM_0} < r, r > 0$ теңсіздігін қанағаттандыратын M нүктелер жиынын M_0 нүктесінің r - аймағы деп атаймыз.

Келесі жағдайларды қарастырамыз.

1. Бірөлшемді кеңістік (Ox сандық түзуі). Ox -те орналасқан кез келген нүктенің орны бір координата арқылы бізмәнді анықталады, $M(x)$ және $M_0(x)$ нүктелері үшін $\rho_{MM_0} = |x - x_0|$, ал $|x - x_0| < r$ дегеніміз $(x_0 - r; x_0 + r)$ интервалы.

2. Екіөлшемді кеңістік (Oxy жазықтығы). Oxy -те орналасқан кез келген нүктенің орны екі координата арқылы бізмәнді анықталады, $M(x; y)$ және $M_0(x_0; y_0)$ нүктелері үшін $\rho_{MM_0} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, ал $\rho_{MM_0} < r$ - Oxy жазықтығындағы центрі M_0 нүктесі, радиусы r болатын шеңбер.

3. Үшөлшемді кеңістік ($Oxyz$ кеңістігі). $Oxyz$ -те орналасқан кез келген нүктенің орны үш координата арқылы бізмәнді анықталады және $M(x; y; z)$ және $M_0(x_0; y_0; z_0)$ үшін $\rho_{MM_0} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$, ал $\rho_{MM_0} < r$ - $Oxyz$ кеңістігіндегі центрі M_0 нүктесі, радиусы r болатын шар.

Дәл солай осы процессті жалпылайтын болсақ, $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - n -өлшемді кеңістіктегі координаталары $x_1, x_2, \dots, x_n$ болатын нүкте, мұндағы M және $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нүктелері арасындағы ара қашықтық мына формула бойынша анықталады:

$$\rho_{MM_0} = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2},$$

ал $\rho_{MM_0} < r$ - центрі M_0 нүктесі, радиусы r болатын n -өлшемді шар.

Анықтама 7. Егер әрбір $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ нүктесіне (әрбір $x_1, x_2, \dots, x_n$ айнымалыларының жұптары үшін) y айнымалысының анықталған белгілі бір мәні сәйкестікке қойылса, онда y M нүктесінің D жиынындағы функциясы деп аталады ($x_1, x_2, \dots, x_n$) n тәуелсіз айнымалының функциясы) және былай белгіленеді

$$y = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad M \in D, \quad (2)$$

мұндағы D y функциясының анықталу облысы деп аталады.

Егер әрбір M нүктесіне y -тің тек бір ғана мәні сәйкестікке қойылса, онда $y = f(M)$ бізмәнді функция, кері жағдайда – көпмәнді функция болады.

$n = 1$ болғанда бір айнымалы функция аламыз $y = f(M) = f(x)$, мұндағы D -ны көбінде Ox сандық түзуінің кесіндісі немесе интервалы ретінде қарастырамыз. $n = 2$ болса, екі айнымалы функцияны аламыз $y = f(M) = f(x, y)$, мұндағы D -ны көбінде Oxy жазықтығының L сызығымен (шекарасымен) шектелген бөлігі ретінде қарастырамыз. Егер $M \in L$ болса, онда M - D -ның шекаралық нүктесі, ал егер $M \in D$ және $M \notin L$ болса, онда M - D -ның ішкі нүктесі.

Егер D облысының құрамына оның шекаралық нүктелерінің барлығы енетін болса, онда оны тұйық облыс деп атаймыз, кері жағдайда – ашық облыс деп аталады. Егер $\forall M \in D: |OM| < C$, орындалатындай C тұрақтысы табылатын болса, мұндағы $|OM|$ координаттың бас нүктесінен M нүктесіне дейінгі ара қашықтық, онда D шектелген облыс деп аталады.

Функция әртүрлі түрде берілуі мүмкін, солардың негізгісі функцияның аналитикалық түрде берілуі (формула түрінде). Бұл жағдайда, көбінесе, әрине, функцияның анықталу облысын табу қажет болады.

Мысал 2.

а) Бір айнымалы функциялар

1. $y = \arcsin x \Rightarrow D = [-1; 1]$ - тұйықталған облыс,

2. $y = \ln x \Rightarrow D = (0; \infty)$ - ашық шексіз облыс.

3. $y = \lg(4 - 3x - x^2)$ функциясының анықталу облысы мен мәндерінің облысын тап.

Логарифмдік функцияның қасиеті бойынша, берілген функция $4 - 3x - x^2 > 0$ болған жағдайда ғана анықталады. Бұл квадрат үшмүшеліктің түбірлері: $x_1 = -4$, $x_2 = 1$. Ендеше, жоғарыда жазылған теңсіздікті былай жаза аламыз: $-(x + 4)(x - 1) > 0$ және бұл теңсіздіктің шешімдері $x > -4$ және $x < 1$. Сонымен, берілген функцияның анықталу облысы $D: (-4; 1)$. D облысында

$0 < 4 - 3x - x^2 \leq 25/4$ болғандықтан, $(-\infty; \lg(25/4))$ интервалы берілген функцияның мәндер облысы E болады.

б) Екі айнымалы функциялар.

1. $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \Rightarrow r^2 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq r^2$. D - центрі координатаның бас нүктесі, ал радиусы $|r|$ болатын тұйық дөңгелек.

2. $z = x + \ln y \Rightarrow y > 0$. Бұл жерде $D: y > 0$ - жарты жазықтық, ашық шексіз облыс.

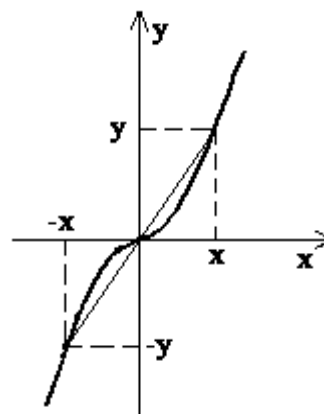
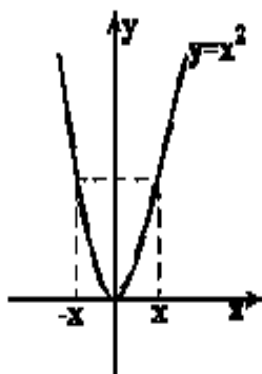
$n \leq 2$ үшін функцияның графигі ұғымын R_{n+1} -дегі $x_1, x_2, \dots, x_n, y$ координаталары $y = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ теңдігін қанағаттандыратын нүктелердің геометриялық орны деп енгізуге болады. 4 лекцияда көрсетілгендей, бір айнымалы функцияның графигі Oxy жазықтығындағы сызық, ал екі айнымалы функцияның графигі $Oxyz$ кеңістігіндегі бет.

Бір айнымалы функцияларды қарастыралық.

Анықтама 8. Функция $y = f(x)$ функциясы жұп функция [тақ функция] деп аталады, егер $f(-x) = f(x)$ [$f(-x) = -f(x)$] теңдігі орындалса.

Жұп функцияның графигі Oy осіне қарағанда симметриялы, ал тақ функцияның графигі координаталардың бас нүктесіне қарағанда симметриялы.

Мысал 3. $y = x^2$ - жұп функция, ал $y = x^3$ - тақ функция.



E - y -тің өзгеру облысы, ал D - $y = f(x)$ функциясының анықталу облысы болсын.

Анықтама.

9. $y = f(x)$ функциясы периоды $T > 0$ болатын периодты функция деп аталады, егер $f(x) = f(x + T)$, $\forall x: -\infty < x < \infty$ болса.

10. $y = f(x)$ функциясы кемімейтін [өспелі] немесе өспелі емес [кемімелі] функция деп аталады, егер $\forall x_1, x_2 \in D$ үшін $x_1 < x_2$ болғанда сәйкесінше $f(x_1) \leq f(x_2)$ [$f(x_1) < f(x_2)$] теңсіздігі орындалса немесе $f(x_1) \geq f(x_2)$ [$f(x_1) > f(x_2)$] теңсіздігі орындалса. Бұл функциялар бірсарынды деп аталады.

11. $y = f(x)$ функциясы - бірімді функция. Онда $f(x) = y$ болатындай, $\forall y \in E$ -ге сәйкестікке $x \in D$ қоюға болады. Ендеше, $x = f^{-1}(y)$ функциясы анықталған және ол $y = f(x)$ функциясына кері функция деп аталады.

Мысал 4. $y = a^x \Rightarrow \log_a y = x \Rightarrow x = \log_a y$.

Егер кері функцияда x пен y -тің орнын ауыстыратын болсақ, онда кері функцияның графиктері $y = x$ түзуіне қарағанда симметриялы.

12. $z = f(y)$, ал $y = \varphi(x)$ болсын. Онда $z = f[\varphi(x)]$ функциясын φ және f функцияларының суперпозициясы немесе күрделі функция деп атаймыз.

13. Функция $F(x, y) = 0$ түрінде берілген болса, онда оны айқын емес функция деп атаймыз. Яғни, y функциясы x айнымалысы арқылы өрнектелмеген.

Мысал 5. $x^2 + y^2 - 10 = 0$, $x^3 e^{xy} - \sin y = \cos x$.

14.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (3)$$

жүйесі берілсін. $x = \varphi(t)$ функциясының кері функциясы $t = \Phi(x)$ бар делік. Онда $y = \psi[\varphi(x)]$, яғни, y x айнымалысына тәуелді функция. (3) жүйесі x айнымалысына тәуелді y функциясының параметрлік түрде берілуі деп, ал t - параметр деп аталады. *Мысал 6.*

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

15. $y = f(x)$ функциясы шектелген деп аталады, егер $\exists M : |f(x)| \leq M \quad \forall x \in D$, мұндағы $M > 0$ - тұрақты сан.

16. Негізгі элементар функцияларға мыналар жатады: $y = x^\alpha$ - дәрежелік, $y = a^x$ - көрсеткіштік, $y = \log_a x$ - логарифмдік, $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ - тригонометриялық және $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccot} x$ - кері тригонометриялық функциялар.

5.2.1 Декарттық координаталар жүйесіндегі бір айнымалы функциялардың графиктері

$G - y = f(x)$ функциясының графигі. Онда функциялардың графиктері:

- а) $y = -f(x)$ [$y = f(-x)$] - G бейнесінің Ox осі бойынша шағылуы [Oy],
- б) $y = f(x-a)$ [$y = f(x) + a$] - G -ді Ox осі бойымен оңға [Oy осі бойымен жоғары] a бірлік жылжыту,
- в) $y = f(kx)$ [$y = kf(x)$] - G -ді Ox осі бойымен k есе сығу немесе созу [Oy].

Сандық тізбектер және оның шектері

N - натурал сандар жиыны, ε - тұрақты, $N(\varepsilon)$ - ε тұрақтысына тәуелді нөмір болсын.

Анықтама

17. Егер $\forall n \in N$ сәйкестікке x_n шамасы қойылса, онда $\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ тізбегі берілген деп айтамыз.

Сандық тізбектерді қарастырамыз, яғни, $x_1, x_2, \dots$ - сандар.

$x_n = f(n)$, $n \in N$, тізбегін функция деп есептеуге де болатыны анық, мұндағы f - x_n -ді n -ге сәйкестікке қою заңы:

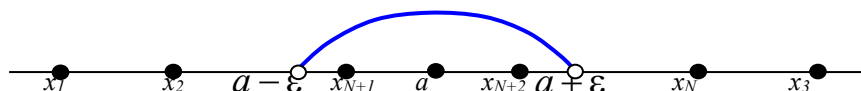
$$\left\{ \frac{1}{n} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\} \Rightarrow x_n = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

18. a санын $\{x_n\}$ тізбегінің шегі деп атаймыз, егер $\forall \varepsilon > 0$ үшін

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad (4)$$

теңсіздігі орындалатындай $\exists N = N(\varepsilon)$ табылса және оны $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ($x_n \rightarrow a$) деп белгілейміз де, $\{x_n\}$ a -ға ұмтылады (жинақталады) деп айтамыз.

(4) теңсіздігін мына түрде жазуға болады: $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Бұдан, $\{x_n\}$ жинақты болады дегеннен a нүктесінің кез келген аймағының сыртқы жағында орналасқан x_n нүктелерінің жиыны ақырлы немесе бос, ал ішінде орналасқан x_n нүктелерінің жиыны шектеусіз.



Сурет 7

18-ші анықтамадан мынадай теореманы қорытындылауға болады:

Теорема 1. Жинақталған тізбек шектелген және оның тек бір ғана шегі бар.

Анықтама 19. Егер $\forall M > 0: \exists N = N(M)$, мұндағы M - тұрақты сан, ал N - $\forall n > N(M)$ үшін $|x_n| > M$ теңсіздігі орындалатын нөмір, онда $\{x_n\}$ тізбегі ∞ -ке ұмтылады деп айтамыз және $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ деп белгілейміз.

Теорема 2. Егер $\{x_n\}$ бірқалыпты болса, онда оның сәйкес жағынан шектелуі жинақтылықтың жеткілікті шарты.

Мысал 6. Мынадай тізбекті қарастыралық:

$$\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\} = \left\{ 2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \dots \right\}.$$

Ньютон биномын қолдана отырып, $\{x_n\}$ тізбегінің өспелі және жоғарғы жағынан 3 санымен шектелетіндігін көрсетуге болады. Онда 2-ші теоремадан оның жинақты екендігі шығады. Ол шекті e әрпімен белгілейміз, яғни, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$, мұндағы $e = 2,718281\dots$

Көрсеткіштік $y = e^x$ функциясы мен $y = \log_e x = \ln x$ - натурал логарифмдік функция математикада өте жиі қолданылады.

$\{x_n\}$ тізбегі берілсін. Осы тізбектен нөмірлері $n_1 < n_2 < \dots$ болатын элементтердің шектеусіз жиынын таңдап аламыз. Егер $\{x_n\}$ тізбегі a санына жинақталатын болса, онда оның кез келген $\{x_{n_k}\}$ ішкі тізбегі де жинақты болып, оның шегі осы a саны болады.

R_n -дегі $M_1, M_2, \dots$ нүктелерінің тізбегін қарастыралық.

Анықтама 20. $M_0 \in R_n$ нүктесін $\{M_n\}$ тізбегінің шегі деп айтамыз, егер $\rho(M_n, M_0) \rightarrow 0$.

Сонымен, $\{M_n\}$ тізбегінің M_0 нүктесіне жинақталуы $\{\rho(M_n, M_0)\}$ сандық тізбегінің нөл тұрақтысына жинақталуымен анықталады. Ox түзуінде $\rho[M_n(x_n), M_0(a)] = |x_n - a|$ теңдігі орындалатындықтан, 12-анықтаманы $\{M_n\} \in Ox$ нүктелер тізбегінің $M_0(a)$ нүктесіне жинақты болу анықтамасы деп айта аламыз.

Ox түзуінің бойындағы нүктелер тізбектерінің шегінің геометриялық интерпретациясын жалпылай отырып: R_n -дегі M_0 нүктесі $\{M_n\}$ нүктелер тізбегінің шегі болады, сонда және тек сонда ғана, егер M_0 нүктесінің кез келген аймағында осы тізбектің қандай да бір нөмірден бастап, барлық нүктелері жататын болса.

$M \rightarrow M_0$ жазуын M айнымалы нүктесінің координаталары барлық $\{M_n\}$ нүктелер тізбегінің M_0 нүктесіне жинақталатын сәйкес координаталарының мәндерін ғана қабылдайды деп түсінеміз.

Ox үшін: $M(x) \rightarrow M_0(x_0) \Rightarrow \rho(M, M_0) = |x - x_0| \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow x_0$.

Oxy

үшін

$M(x, y) \rightarrow M_0(x_0, y_0) \Rightarrow \rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \Rightarrow x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$.

R_1 -дегі $M(x)$ айнымалы нүктесінің $M_0(x_0)$ нүктесіне ұмтылуы тек Ox түзуі бойында ғана, ал R_n -де, $n > 1$ - M -нің M_0 -ге ұмтылу жолы шексіз жиын.