1. Параметрден тәуелді меншікті интегралдар

$f(x,y)$ функциясы $\Pi=\{a\le x\le b,\quad c\le y\le d\}$ тік төртбұрышында анықталсын. Осы функция $\forall y\in[c;d]$ үшін x бойынша $[a;b]$ аралығында интегралданатын болсын. Яғни,

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

Осы өрнекті *параметр* y *-тен тәуелді меншікті интеграл* деп атайды.

Теорема 1.1. (параметрден тәуелді меншікті интегралдың үзіліссіздігі туралы).

Егер $f(x,y)$ функциясы $\Pi=\{a\le x\le b,\quad c\le y\le d\}$ тұйық тік төртбұрышында үзіліссіз болса, онда параметрден тәуелді

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

интегралы y параметрі бойынша $[c;d]$ сегментінде үзіліссіз болады.

Теорема 1.2. (параметрден тәуелді меншікті интегралдан шек алу туралы).

Егер $f(x,y)$ функциясы $\Pi=\{a\le x\le b,\quad c\le y\le d\}$ тұйық тік төртбұрышында үзіліссіз болса, онда параметрден тәуелді

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

интегралынан $y\to y_0$ шек алуға болады және мынадай теңдік орындалады:

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx$$

Теорема 1.3. (параметрден тәуелді меншікті интегралды дифференциалдау туралы).

Егер $f(x,y)$, $f'_y(x,y)$ функциялары $\Pi=\{a\le x\le b,\quad c\le y\le d\}$ тұйық тік төртбұрышында үзіліссіз болса, онда параметрден тәуелді

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

интегралын y параметрі бойынша дифференциалдауға болады және мынадай теңдік орындалады:

$$\frac{dI}{dy}=\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b f_y'(x,y)dx$$

Теорема 1.4. (интегралдың шектері параметрден тәуелді болғанда меншікті интегралды дифференциалдау туралы).

Егер $f(x,y)$, $f_y'(x,y)$ функциялары $\Pi=\{a\le x\le b,\quad c\le y\le d\}$ тұйық тік төртбұрышында үзіліссіз болса, $\varphi(y),\quad \psi(y)$ функциялары $[c;d]$ сегментінде дифференциалданатын болса және $a \le \varphi(y) \le b,\quad a \le \psi(y) \le b,\quad \forall y\in[c;d]$, онда параметрден тәуелді

$$I(y)=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$$

интегралын y параметрі бойынша дифференциалдауға болады және мынадай теңдік орындалады:

$$\frac{dI(y)}{dy}=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f_y'(x,y)dx+f(\psi(y),y)\cdot\psi'(y)-f(\varphi(y),y)\cdot\varphi'(y)$$

Теорема 1.5. (параметрден тәуелді меншікті интегралды параметр бойынша интегралдау туралы).

Егер $f(x,y)$ функциясы $\Pi=\{a\le x\le b,\quad c\le y\le d\}$ тұйық тік төртбұрышында үзіліссіз болса, онда параметрден тәуелді

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

интегралын y параметрі бойынша $[c;d]$ сегментінде интегралдауға болады және мынадай теңдік орындалады:

$$\int_c^d I(y)dy=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

Мысал 1. $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(x+\cos yx)e^{x\sin y}dx$ шегін табыңыз.

Шешуі. Интеграл астындағы функция $\Pi=\{-\pi\le x\le\pi,\quad -1\le y\le 1\}$ тік төртбұрышында үзіліссіз болғандықтан

$$\lim_{y\to 0}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\cos yx)e^{x\sin y}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\lim_{y\to 0}(x+\cos yx)e^{x\sin y}dx=\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)dx=\left.\frac{(x+1)^2}{2}\right|_{-\pi}^{\pi}=2\pi$$

Мысал 2. $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^1\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx$ өрнегінде интеграл астында шекке көшуге болады ма?

Шешуі. $$\lim_{y\to 0}\int_0^1\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{y^2}}d\left(\frac{x^2}{y^2}\right)=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\left(1-e^{-\frac{1}{y^2}}\right)=\frac{1}{2}$$

Ал,

$$\int_0^1\lim_{y\to 0}\frac{x}{y^2e^{\frac{x^2}{y^2}}}dx=\int_0^1 0dx=0,\qquad 0\ne\frac{1}{2}$$

Яғни, интеграл астында шекке көшуге болмайды. Мұнда интеграл астындағы функция $f(x,y)=\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}$ (0,0) нүктесінде үзілісті.

Мысал 3. Параметр бойынша дифференциалдау туралы теореманы пайдаланып, төмендегі интегралды есептеңіз:

$$F(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x\right)dx$$

Шешуі. Айталық, $0\le x\le\frac{\pi}{2},\quad a>0,\quad b>0$ болсын.

$$f(x,a,b)=\ln\left(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x\right),\qquad f'_a(x,a,b)=\frac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$$

функциялары $\forall \varepsilon > 0$ үшін $\Pi = \left\{ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon \le a \le A, \quad \varepsilon \le b \le B, \quad A > 0, \quad B > 0 \right\}$ облысында үзіліссіз болғандықтан параметр бойынша дифференциалдау туралы теореманы қолдансақ,

$$F'_a(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'_a(x,a,b)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}dx =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2ad(ctgx)}{(a^2 + b^2 ctg^2 x)(1 + ctg^2 x)} = |ctgx = y| = -\int_{+\infty}^{0} \frac{2ady}{(a^2 + b^2 y^2)(1 + y^2)} =$$

$$= \frac{2a}{b^2 - a^2}\left(\frac{b}{a} arctg\frac{by}{a} - arctgy\right)\Bigg|_{y=0}^{y=+\infty} = \frac{\pi}{a+b}$$

Бұл теңдіктен

$$F(a,b) = \int \frac{\pi}{a+b}da = \pi\ln(a+b) + \varphi(b) \tag{A}$$

Екінші жағынан,

$$f'_b(x,a,b) = \frac{2b\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} \in C(\Pi)$$

болғандықтан

$$F'_b(a,b) = \frac{\pi}{a+b}$$

орындалады. Соңғы теңдіктен

$$F(a,b) = \pi\ln(a+b) + \psi(a). \tag{B}$$

(A), (B) өрнектерден $\varphi(a) = \psi(b) = C$. Сонымен, $F(a,b) = \pi\ln(a+b) + C$.

$F(a,b)$ үзіліссіз функция және $F(1,1) = 0$ болғандықтан $C = -\pi\ln 2$. Ендеше, $F(a,b) = \pi\ln\frac{a+b}{2}$. $F(a,b)$ жұп функция екенін ескерсек, $F(a,b) = \pi\ln\frac{|a| + |b|}{2}$ аламыз.

$a = b = 0$ болса, меншіксіз интеграл шығады.

Мысал 4. Интегралдарды есептеңіз:

а) $I_1 = \int\limits_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx$; б) $I_2 = \int\limits_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx, \quad a > 0, \quad b > 0$

Шешуі. $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int\limits_a^b x^y\,dy$

формуласын пайдаланып, берілген интегралдардың орнына төмендегі қайталамалы интегралдарды қарастырайық:

$$I_1 = \int\limits_0^1 dx\int\limits_a^b x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dy \; ; \qquad I_2 = \int\limits_0^1 dx\int\limits_a^b x^y \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)dy$$

Интеграл астындағы

$$f_1(x,y) = x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right), \qquad f_2(x,y) = x^y \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)$$

функцияларын $f_1(0,y)=0$, $f_2(0,y)=0$ деп қосымша анықтасақ, онда бұл функциялар $\forall\varepsilon > 0$ үшін $\Pi = \{\varepsilon \le x \le 1, \quad a \le y \le b\}$ тік төртбұрышында үзіліссіз болады. Сондықтан параметр бойынша интегралдау туралы теореманы қолданып, интегралдардың орындарын алмастыруға болады:

$$I_1 = \int\limits_a^b dy\int\limits_0^1 x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx \; ; \qquad I_2 = \int\limits_a^b dy\int\limits_0^1 x^y \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx$$

$x = e^{-t}$ алмастыруын жасасақ:

$$I_1 = \int\limits_a^b dy\int\limits_0^{+\infty} e^{-t(y+1)}\sin t\,dt \; ; \qquad I_2 = \int\limits_a^b dy\int\limits_0^{+\infty} e^{-t(y+1)}\cos t\,dt$$

интегралдарын аламыз. Ішкі интегралдарды екі рет бөліктеп интегралдасақ:

$$I_1 = \int\limits_a^b dy\int\limits_0^{+\infty} e^{-t(y+1)}\sin t\,dt = \int\limits_a^b \frac{-(y+1)\sin t - \cos t}{1+(y+1)^2}\cdot e^{-t(y+1)}\Bigg|_{t=0}^{t=+\infty} dy = \int\limits_a^b \frac{1}{1+(y+1)^2}\,dy$$

;

$$I_2 = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-t(y+1)} \cos t dt = \int_a^b \frac{-(y+1)\cos t + \sin t}{1+(y+1)^2} \cdot e^{-t(y+1)} \Bigg|_{t=0}^{t=+\infty} dy = \int_a^b \frac{y+1}{1+(y+1)^2} dy$$

Сонымен,

$$I_1 = \int_a^b \frac{1}{(y+1)^2+1} dy; \qquad I_2 = \int_a^b \frac{y+1}{(y+1)^2+1} dy$$

Осы теңдіктерден есептің жауабын аламыз:

$$I_1 = arctg \frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}; \qquad I_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}.$$