Лекция 5. Поверхностные интегралы. О задании поверхности в пространстве. Односторонние и двусторонние поверхности. Нормаль и касательная плоскость к поверхности. Площадь поверхности

О задании поверхности в пространстве

Поверхность в пространстве может быть задана разичными способами. Пусть в пространстве фиксирована прямоугольная система координат Oz с ортонормированным базисом $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

Поверхность в пространстве может быть задана как график некоторой непрерывной функции

$$z = f(x, y), \quad (x; y) \in G \subset \mathbb{R}^2. \tag{5.1}$$

Аналогичны случаи, отличающиеся другим сочетанием переменных:

$$x = f(y, z), \quad (y; z) \in G_1 \subset \mathbb{R}^2, \tag{5.2}$$

или

$$y = f(x, z), \quad (x; z) \in G_2 \subset \mathbb{R}^2. \tag{5.3}$$

В этих трех случаях поверхность называют явно заданной поверхюостью.

Поверхность в пространстве может быть задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0, \tag{5.4}$$

которое не разрешено относительно какой-либо из переменных. Тогда ее называют неявко задаккой поверхюостью. Например, уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \tag{5.5}$$

задает в пространстве $\mathbb{R}^3$ поверхность, представляющую собой сферу радиуса R с центром в начале координат.

Наконец, поверхность Φ может быть задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \qquad (u; v) \in D \subset \mathbb{R}^2, \\ z = z(u, v), \end{cases} \tag{5.6}$$

где $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ – непрерывные функции в их области определения D. В эом случае говорят о параметрически задакжой поверхности. Например, сфера радиуса R с центром в начале координат может быть описана не только как неявно заданная поверхность (5.5), но и как поверхность, заданная параметрически:

$$\begin{cases} x = R\sin u\cos v, \\ y = R\sin u\sin v, \\ z = R\cos u \end{cases} \tag{5.7}$$

Так как между точками пространства и их радиус-векторами установлено взаимно однозначное соответствие (точке $M(x; y; z)$ соответствует ее радиус-вектор $r = xi + yj + zk$), уравнения (5.6) можно записать в виде

$$\boldsymbol{r} = x(u, v)i + y(u, v)j + z(u, v)\boldsymbol{k} \tag{5.8}$$

Таким образом, мы получаем векторное уравнение поверхности Φ.

В дальнейшем будем считать, что если поверхность Φ задана параметрическими уравнениями (5.6), то функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ удовлетворяют следующим условиям.

1. Область определения D функций $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ является замкнутой ограниченной областью, граница ∂D которой - простой кусочно гладкий контур.

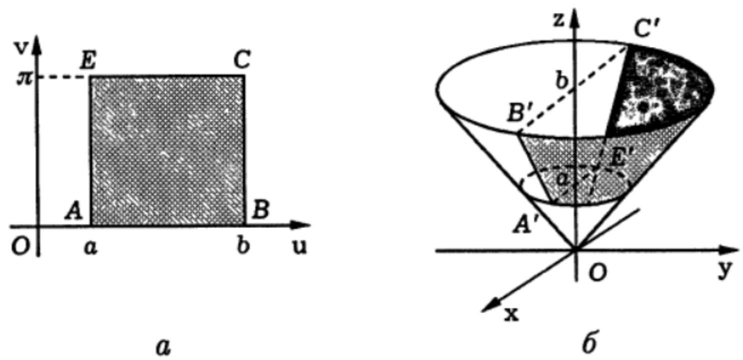
2. Функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ непрерывно дифференцируемы в D, т.е. определены в некоторой области, целиком содержащей D, и имеют в этой области частные производные первого порядка, непрерывные в D.

3. Отображение $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \Phi$, определяемое тремя функциями $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, является инъекцией, т.е. различным точкам $(u; v) \in D$ соответствуют различные точки $(x; y; z)$ поверхности Φ.

Если условие 3 распространяется и на граничные точки области D, то поверхность Φ будем называть простой поверхностью. Множество точек поверхности, соответствующих граничным точкам области D, образует в таком случае границу (или край) этой поверхности. На рис. 1 *а* изображена ограниченная контуром $ABCEA$ замкнутая область

$$D = \{(u; v) : 0 < a \leqslant u \leqslant b, 0 \leqslant v \leqslant \pi\} \subset \mathbb{R}^2$$

(прямоугольник). Функции $x = u\cos v, y = u\sin v, z = u$, определенные в D, задают простую поверхность, которая представляет собой часть прямого кругового конуса (рис. 1 *б*). Границей (краем) этой поверхности яллется контур $A'B'C'E'A'$ на конусе, соответствующий контуру $ABCEA$ на плоскости.



а б

Рис. 1

Точки поверхности, не принадлежащие ее границе, называют вкутренними точками поверхности. Поверхность может не иметь границы. Такую поверхность называют замкнутой. Примером замкнутой поверхности является сфера.

Поверхность Ф будем называть гладкой поверхюостьюо, если для любой ее внутренней точки существует такая окрестность в пространстве, что часть поверхности Ф, попадающая в эту окрестность, может быть представлена как явно заданная поверхность одним из уравнений (5.1)-(5.3), причем функция f является непрерывно дифференцируемой. В каждой внутренней точке гладкой поверхности существуют касательная плоскость и нормаль к этой поверхности.

Пусть поверхность Ф задана параметрически при помощи уравнений (5.6), в которьх функции $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ непрерывно дифференцируемы в D. Если в точке $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)\in\Phi$, соответствующей точке $\left(u_0;v_0\right)\in D$, векторы

$$\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{r}_u'=x_u'\left(u_0,v_0\right)\boldsymbol{i}+y_u'\left(u_0,v_0\right)\boldsymbol{j}+z_u'\left(u_0,v_0\right)\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{r}_v'=x_v'\left(u_0,v_0\right)\boldsymbol{i}+y_v'\left(u_0,v_0\right)\boldsymbol{j}+z_v'\left(u_0,v_0\right)\boldsymbol{k}\end{array}\right. \tag{5.9}$$

не являются коллинеарными, то такую точку поверхности Ф называют неособой (или регулярной). В противном случае точку $M_0\in\Phi$ называют особой точкой поверхности Ф. Поверхность, не имеющая особых точек, является гладкой.

Касательная плоскость, построенная в неособой внутренней точке $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ поверхности Ф, соответствующей точке $\left(u_0;v_0\right)\in D$(т.е. $x_0=x\left(u_0,v_0\right), y_0=y\left(u_0,v_0\right), z_0=z\left(u_0,v_0\right)$), может быть задана общим уравнением

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0 \tag{5.10}$$

в котором A, B, C – координаты вектора $n = \boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v$ нормали к поверхности Φ в точке $M_0 \in \Phi[\,\mathrm{V}]$, являющегося одновременно и мормальньи вектором касательной плоскости в этой точке. Используя правило вычисления векторного произведения в прямоугольных координатах, получаем

$$\begin{cases} A = y'_u\,(u_0, v_0)\, z'_v\,(u_0, v_0) - y'_v\,(u_0, v_0)\, z'_u\,(u_0, v_0)\,, \\ B = z'_u\,(u_0, v_0)\, x'_v\,(u_0, v_0) - z'_v\,(u_0, v_0)\, x'_u\,(u_0, v_0)\,, \\ C = x'_u\,(u_0, v_0)\, y'_v\,(u_0, v_0) - x'_v\,(u_0, v_0)\, y'_u\,(u_0, v_0)\,. \end{cases} \tag{5.11}$$

Векторы $\boldsymbol{r}'_u$ и $\boldsymbol{r}'_v$, отложенные от точки $M_0 \in \Phi$, лежат в касательной плоскости P (рис. 2).

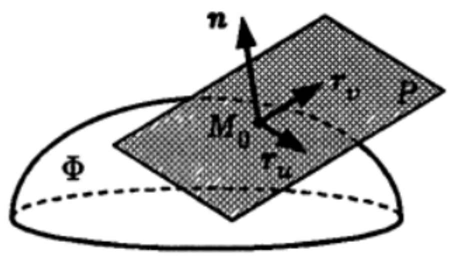


Рис. 2

Односторонние и двусторонние поверхности

Установим важное для дальнейшего изложения понятие стороны поверхности. В ряде случаев это понятие интуитивно ясно. Если поверхжость задажа лвко, например, уравнением $z = z(x, y)$, то можно говорить о ее верхней или нижней стороне. Замкмутая поверхность ограничивает некоторую область в пространстве, и можно различать внутреннюю сторону этой поверхности, обращенную к области, и внешнюю сторону, обращенную вовне. Исходя из таких интуитивных представлений дадим определение стороны поверхности.

Рассмотрим гладкую поверхность Φ, замкнутую или же ограниченную кусочно гладким контуром L. В каждой вкутренкей точке такой поверхиости существуют касательлая плоскость и нормалный вектор. Нормальный вектор может иметь одно из двух возможньх направлений. Пусть в окрестности точки $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ поверхность можно задать параметрически уравнениями (5.6) с помощью гладких функций $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$. Тогда в качестве единичного вектора нормали можно выбрать вектор

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v}{|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v|}, \tag{5.12}$$

где векторы $\boldsymbol{r}'_u$ и $\boldsymbol{r}'_v$ определены соотношениями (5.9). Вектор $\boldsymbol{n}$ является непрерывной функцией в некоторой окрестности точки M_0. Выбор единичного вектора нормали позволяет задать сторону поверхности в окрестности точки M_0. Для выбора противоположной стороны достаточно ваять вектор с противоположным знаком.

Итак, в случае гладкой поверхности в окрестности любой ее точки можно указать непрерывно меняющийся единичный вектор нормали. Если в каждой точке поверхности можно выбрать единичный вектор нормали так, что получится векторная функция, непрерывная на всей поверхности, то такую поверхность называют двусторожней поверхностью. Если для поверхности Φ не существует непрерывного единичного вектора нормали, то ее называют одмосторонней поверхностью.

Пример 5.1. Явно заданную поверхность $z = f(x, y)$, $(x; y) \in D$, где функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема в D, можно задать параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v), \end{cases} \qquad (u; v) \in D.$$

При таком описании поверхности имеем

$$\boldsymbol{r}'_u = i + f'_u(u, v)k, \quad \boldsymbol{r}'_v = j + f'_v(u, v)k.$$

Вычислим векторное произведение этих векторов:

$$\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v = -f'_u(u, v)i - f'_v(u, v)j + \boldsymbol{k}.$$

После нормировки находим

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v}{|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v|} = \frac{-f'_u i - f'_v j + \boldsymbol{k}}{\sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2}}, \tag{5.13}$$

где для удобства аргументы у функции $f(u, v)$ и ее частных производных опущены. Легко убедиться в том, что векторная функция $\boldsymbol{n}(u, v)$ непрерывна в области определения D функции $f(u, v)$. Таким образом, явно заданная поверхность $z = f(u, v)$, $(u; v) \in D$, является двусторонней.

Пример 5.2. Пусть поверхность, заданная параметрическими уравнениями (5.6), не имеет особых точек. Тогда равенство (5.12) определяет векторную функцию $\boldsymbol{n}(u, v)$ единичной нормали, непрерывную в D. Ясно, что в этом случае мы имеем дело с двусторонней поверхностью.

Пример 5.3. Пусть поверхность S задана неявно уравнением (5.4), в котором функция $F(x, y, z)$ определена и непрерывно дифференцируема в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^3$. Если в каждой точке $(x; y; z) \in S$ градиент функции $F(x, y, z)$ отличен от нуди, то поверхность S явлется гладкой и не имеет особых точек. При этом вектор

$$F'_x(x, y, z)\boldsymbol{i} + F'y(x, y, z)\boldsymbol{j} + F'_z(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

есть нормальный вектор касательной плоскости к поверхности S в точке $(x; y; z) \in S$. Нормируя этот вектор, получим непрерывную вектор-функцию

$$\boldsymbol{n} = \frac{F'_x\boldsymbol{i} + F'_y\boldsymbol{j} + F'_z\boldsymbol{k}}{\sqrt{(F'_x)^2 + \left(F'_y\right)^2 + (F'_z)^2}},$$

которая в каждой точке поверхности S задает единичный вектор нормали к этой поверхности. Таким образом, в данном случае поверхность S является двусторонней.

Остановимся на частном случае – сфере радиуса R, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. В этом случае $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 -$ непрерывно дифференцируемая в $\mathbb{R}^3$ функция, причем ее градиент

$$\operatorname{grad} F(x, y, z) = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$$

обращается в нуль в единственной точке $O(0; 0; 0)$, не лежащей на сфере. Следовательно, сфера - двусторонняя поверхность, а непрерывная функция единичной нормали к поверхности имеет вид

$$\boldsymbol{n}(x, y, z) = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{R}\boldsymbol{i} + \frac{y}{R}\boldsymbol{j} + \frac{z}{R}\boldsymbol{k}.$$

Эта функция определяет внешнюю сторону сферы. #

Приведенный пример показывает, что на практике большинство рассматриваемых поверхностей являются двусторонними. Существуют ли односторонние поверхности? Чтобы выяснить это, подробнее изучим вопрос, по каким причинам векторная функция (6.12), которая определена в окрестности любой точки гладкой поверхности, может не существовать на всей поверхности.

Возьмем на поверхности Ф контур L_0, выбрав в качестве начальной некоторую точку M_0. Если поверхность двусторонняя, то на выбранном контуре определена непрерывная векторная функция, значением которой является единичный вектор нормали к поверхности. Но единичный вектор нормали в каждой точке поверхности может принимать лишь два возможных значения. Поэтому, задав единичный вектор нормали в точке M_0, мы тем самым однозначно ошределяем векторную функцию в некоторой окрестности точки M_0. Обойдя весь контур, мы вернемся в точку M_0 с однозначно ошределенным единичным вектором нормали. При этом воэможны две ситуации: либо конечное положение вектора нормали совпадет с начальным, либо нет. В последнем случае можно сделать вывод, что на поверхности нельзя задать непрерывное изменение единичного вектора нормали и что эта поверхность является односторонней. Простейшим примером односторонней поверхности явлется лист Мебиуса [1]. Эту поверхность можно представить следующим образом. Возьмем прямоугольную полоску $ABCD$ бумаги и склеим ее противоположные стороны AB и CD, перекрутив эту полоску один раз (рис. 3). Выбор той или иной стороны полоски определяется выбором единичного вектора нормали. Если контур на поверхности пересекает линию склейки, то происходит переход с одной стороны полоски на другую. В результате при обходе по такому контуру единичный вектор нормали меняет направление.

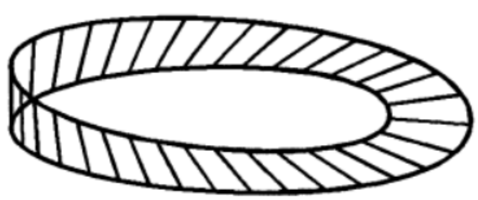


Рис. 3

Если поверхность Ф двусторонния, то на ней существует всего лишь два способа выбора непрерывного единичного вектора нормали. Задав в каждой точке единичный вектор нормали так, чтобы он менялся непрерывно, мы тем самым определяем **сторону поверхности**. Поэтому в дальнейшем под стороной поверхности мы будем понимать заданную на этой поверхности непрерывную функцию вектора единичной нормали.

[1]А.Ф. Мёбиус (1790-1868) - немецкий математик

Площадь поверхности

Для вычисления площади гладкой поверхжости Ф, заданной параметрическими уравнениями (5.6), можно использовать теорему о неявной функции, в силу которой поверхность в окрестности произвольной ее неособой точки M_0 можно представить как график функции, разрешив параметрические уравнения относительно двух из трех переменных x, y, z. Однако пересчет результата для получения формулы площади поверхности в этом случае достаточно трудоемкий. Поэтому мы используем другой подход.

Для замкнутой области D – области определения функций $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ – выберем некоторое разбиение T_D на частичные области $D_i; i = \overline{1,n}$. Каждой частичной области D_i соответствует некоторая часть Φ_i поверхности Ф. Части Φ_i будем называть частичными областями поверхности Ф, а их совокупность T – разбиением поверхности Ф. Таким образом, любое разбиение поверхности определяется каким-либо разбиением области определения функций в правых частях параметрических уравнений (5.6).

В каждой частичной области Φ_i разбиения T выберем произвольным образом точку $M_i\,(x_i; y_i; z_i)$. Предположим, что диаметр $d(T)$ разбиекия T, т.е. максимальный из диаметров частичнь областей, настолько мал, что проекция D_i^* частичной области Φ_i на касательную плоскость к поверхности Ф в точке M_i является ваиимно однозначной, т.е. различные точки Φ_i имеют различные проекции на касательную плоскость.

Выберем некоторую частичную область Φ_i и зафиксируем. В точке M_i построим прямоугольную систему координат $M_i\xi\eta\zeta$, соприкасающуюся с поверхностью (согласованную с поверхностью), т.е. такую систему координат, для которой шлоскость $\xi M_i\eta$ совпадает с касательной плоскостью к поверхности в точке M_i, а ось $M_i\zeta$ направлена по нормали к поверхности. В окрестности точки M_i поверхность Ф можно задать уравнениями

$$\begin{cases} \xi = \xi(u,v), \\ \eta = \eta(u,v), \qquad (u;v) \in D. \\ \zeta = \zeta(u,v), \end{cases} \tag{5.14}$$

Благодаря такому выбору системы координат $M_i\xi\eta\zeta$ имеем

$$\zeta_u'\,(u_i, v_i) = \zeta_v'\,(u_i, v_i) = 0,$$

где u_i и v_i – значения параметров, соответствуюшие точке M_i. Плоская область D_i^* расположена в координатной плоскости $M_i\xi\eta$, и ее площадь ΔS_i

можно подсчитать следующим образом:

$$\Delta S_i = \iint\limits_{D_i'} d\xi d\eta = \iint\limits_{D_i} |J(u,v)| du dv$$

где $J(u,v)$ - якобиан отображения (5.14) в точке $(u;v) \in D_i$. В последнем интеграле подынтегральнуо функцию $|J(u,v)|$ заменим константой $|J(u_i,v_i)|$. Получим для площади ΔS_i приближенное значение $|J(u_i,v_i)|\Delta\sigma_i$, где $\Delta\sigma_i$ – площадь замкнутой области D_i в плоскости переменных u и v. Погрешность δ_i этого приближения можно оценить следующим образом:

$$\delta_i \leqslant \max_{(u;v)\in D_i} |J(u_i,v_i) - J(u,v)| \Delta\sigma_i. \tag{5.15}$$

Для значения $J(u_i,v_i)$ имеем

$$J(u_i,v_i) = \begin{vmatrix} \xi_u'(u_i,v_i) & \xi_v'(u_i,v_i) \\ \eta_u'(u_i,v_i) & \eta_v'(u_i,v_i) \end{vmatrix} = |\boldsymbol{r}_u' \times \boldsymbol{r}_v'|.$$

Суммируя оценки (5.15) по всем частичным областям Φ_i разбиения T, заключаем, что

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i - \sum_{i=1}^{n} |J(u_i,v_i)| \Delta\sigma_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \max_{D_i} |J(u_i,v_i) - J(u,v)| \Delta\sigma_i \leqslant$$

$$\leqslant \max_{i=\overline{1,n}} \max_{D_i} |J(u_i,$$

где σ – площадь замкнутой области D. При стремлении к нулю диаметра $d(T)$ разбиения T поверхности Φ к нулю стремится и диаметр $d(T_D)$ разбиения T_D замкнутой области D. При этом

$$\max_{i=\overline{1,n}} \max_{D_i} |J(u_i,v_i) - J(u,v)| \to 0 \quad \text{при} \quad d(T) \to 0$$

Следовательно, сумма $\sum_{i=1}^{n} \mid J(u_i,v_i \mid \Delta\sigma_i$ при $d(T) \to 0$ стремится к площади поверхности Φ. Но в то же время эта сумма является интегральной для двойного интеграла по области D от функции $|\boldsymbol{r}_u' \times \boldsymbol{r}_v'|$. Таким образом, площадь S поверхности Φ можно вычислить по формуле

$$S = \iint\limits_{D} |\boldsymbol{r}_u' \times \boldsymbol{r}_v'| du dv. \tag{5.16}$$

Введем функции

$$E = \left(\boldsymbol{r}'_u\right)^2 = \left(x'_u(u,v)\right)^2 + \left(y'_u(u,v)\right)^2 + \left(z'_u(u,v)\right)^2, \tag{5.17}$$

$$F = \boldsymbol{r}'_u \boldsymbol{r}'_v = x'_u(u,v)x'_v(u,v) + y'_u(u,v)y'_v(u,v) + z'_u(u,v)z'_v(u,v), \tag{5.18}$$

$$G = \left(\boldsymbol{r}'_v\right)^2 = \left(x'_v(u,v)\right)^2 + \left(y'_v(u,v)\right)^2 + \left(z'_v(u,v)\right)^2. \tag{5.19}$$

Нетрудно проверить, что

$$\left|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v\right|^2 = \left(\boldsymbol{r}'_u\right)^2 \left(\boldsymbol{r}'_v\right)^2 - \left(\boldsymbol{r}'_u \boldsymbol{r}'_v\right)^2 = EG - F^2. \tag{5.20}$$

Поэтому представление (5.16) можно записать в виде

$$S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}dudv. \tag{5.21}$$

Выражение

$$dS = \sqrt{EG - F^2}dudv \tag{5.22}$$

называют **элементом площади поверхности** (или элементом площади в криволинейных координатах).

До сих пор мы ограничивались случаем гладкой поверхности. Однако формула (5.21) для площади поверхности верна в более общем случае кусочно гладкой поверхности. Действительно, такую поверхность можно разбить на конечное число гладких поверхностей, для каждой из которых формула площади поверхности верна. Значит, в силу аддитивности площади и двойного интеграла она верна и для всей кусочно гладкой поверхности. Отметим также, что формула (5.21) верна и для гладких поверхностей, имеющих особые точки, если множество особых точек сосредоточено на некотором конечном числе гладких кривых. Используя эти кривые как разрезы, мы можем разбить поверхность на составные части, не имеющие особых точек.

Легко убедиться, что в простейшем случае поверхности Φ, задажмой явно уравнением $z = f(x,y)$, формула (5.21) может быть сведена к формуле

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2}dxdy. \tag{5.23}$$

Действительно, достаточно записать параметрическое представление

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \qquad\qquad (u;v) \in D, \\ z = f(u,v), \end{cases}$$

где D - область определения функции $f(x,y)$. Тогда

$$\begin{aligned} E &= (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2 = 1 + (f'_u)^2 \\ F &= x'_v x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = f'_u f'_v \\ G &= (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2 = 1 + (f'_v)^2 \end{aligned}$$

откуда

$$EG - F^2 = \left(1 + (f'_u)^2\right)\left(1 + (f'_v)^2\right) - (f'_u f'_v)^2 = 1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2 .$$

Пример 5.4. Вычислим площадь S части гиперболического параболоида $z = xy$, вырезаемой прямым круговым цилиндром $x^2 + y^2 = 8$ (рис. 4).

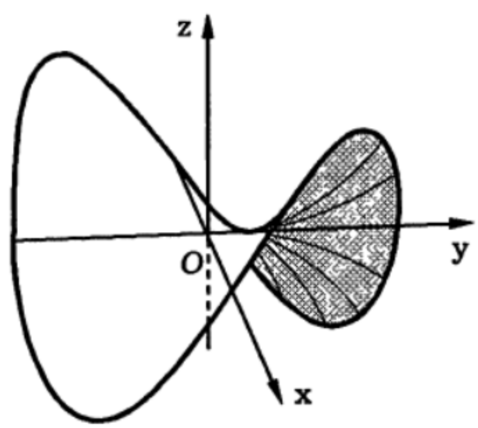


Рис. 4

$\triangle$ В данном случае поверхность является графиком функции $f(x,y) = xy$ с областью определения

$$D = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 8\right\}.$$

В этой области функция $f(x,y) = xy$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $f'_x = y$ и $f'_y = x$. Поэтому площадь поверхности можно вычислить по формуле (5.23). Подставляя значения частных производных в эту формулу, находим

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + y^2 + x^2} dxdy.$$

Для вычисления этого двойного интеграла удобно перейти к полярным координатам r, φ, в которых

$$D = \left\{ (r; \varphi) \in \mathbb{R}^2 : r \in [0, \sqrt{8}], \varphi \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Тогда получим

$$S = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{8}} r\sqrt{1 + r^2} dr = 2\pi \frac{\left(1 + r^2\right)^{3/2}}{3} \Bigg|_0^{\sqrt{8}} = \frac{52}{3}\pi. \quad \blacktriangle$$

Пример 5.5. Найдем пощадь S поверхности тела, ограниченного цилиндрами $x^2 + z^2 = a^2$ и $y^2 + z^2 = a^2$ (рис. 5).

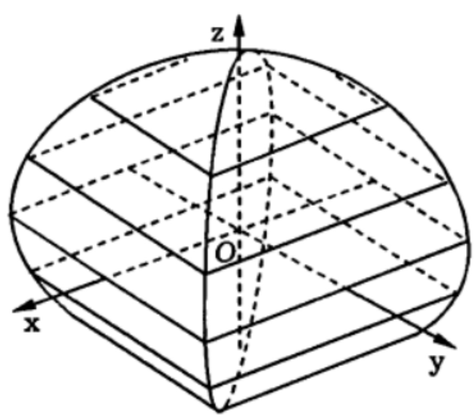


Рис. 5

$\triangle$ Исключая z из этих уравнений, получаем уравнения $y = \pm x$ проекций линий пересечения цилиндров на плоскость xOy. Учитывая, что рассматриваемое тело симметрично относительно координатнх плоскостей, а также относительно плоскостей $y = \pm x$, при вычислении площади поверхности этого тела достаточно рассмотреть участок цилиндрической поверхности $x^2 + z^2 = a^2$, расположенный в первом октакте. Этот участок ограничен поскостями xOy, xOz и $y = x$ и составляет шестнадцатую часть рассматриваемой поверхности. Его можно задать явно уравнением $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, в котором функция $z = f(x, y)$ имеет треугольную область определения

$$D = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, a], y \leqslant x\right\}.$$

В замкнутой области D функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $f'_y = 0$. Частная производная $f'_x = -x/\sqrt{a^2 - x^2}$ непрерывна в D всюду, кроме точек прямой $x = a$, причем в окрестности каждой такой точки она не ограничена. Тем не менее использовать формулу (5.23) можно. Она приводит к несобственному двойному интегралу по замкнутой области D. Непосредственное вычисление несобственного интеграла доказывает его сходимость и дает шлощадь рассматриваемой поверхности:

$$S = 16 \iint\limits_{D} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dxdy = 16 \int\limits_0^a \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \int\limits_0^x dy =$$

$$= 16 \int\limits_0^a \frac{axdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -16a\sqrt{a^2 - x^2}\Big|_0^a = 16a^2. \quad \blacktriangle$$

Пример 5.6. Вычислим площадь S винтовой поверхности (прямого геликоида), заданной параметрическими уравнениями $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = vh$ $(h > 0)$ и ограниченной плоскостями $z = 0$, $z = 2\pi h$ и цилиндрической поверхностью, заданной уравнением $x^2 + y^2 = a^2$.

$\triangle$ Подставляя уравнение $z = vh$ в уравнения ограничивающих плоскостей, устанавливаем, что $v \in [0, 2\pi]$. Возводя первые два параметрических уравнения в квадрат и подставля в уравнение, эадающее цилиндрическую поверхность, находим, что для точек этой поверхности $u^2 = a^2$. Следовательно, u, v и z являются цилиндрическими координатами точек рассматриваемого участка винтовой поверхности, причем в качестве области D определения функций, задающих этот участок, можно принять круг радиуса a:

$$D = \left\{(u; v) \in \mathbb{R}^2 : u \in [0, a], v \in [0, 2\pi]\right\}.$$

Используя представления (5.17)-(5.19), находим

$$\begin{aligned}
E &= (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2 = \cos^2 v + \sin^2 v = 1\\
F &= x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v =\\
&\qquad = \cos v \cdot (-u\sin v) + \sin v \cdot u\cos v + 0 \cdot h = 0,\\
G &= (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2 = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + h^2 = u^2 + h^2
\end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в (5.21), имеем

$$S = \iint\limits_D \sqrt{u^2 + h^2} du dv = \int\limits_0^a \sqrt{u^2 + h^2} du \int\limits_0^{2\pi} dv = 2\pi \int\limits_0^a \sqrt{u^2 + h^2} du.$$

Интеграл в правой части этого равенства вычислим интегрированием по частям:

$$I = \int \sqrt{u^2 + h^2} du = u\sqrt{u^2 + h^2} - \int \frac{\left(u^2 + h^2\right) - h^2}{\sqrt{u^2 + h^2}} du =$$
$$= u\sqrt{u^2 + h^2} - I + h^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 + h^2}\right|.$$

Отсюда находим выражение для I и в итоге получаем

$$S = 2\pi \int\limits_0^a \sqrt{u^2 + h^2} du = \pi \left(u\sqrt{u^2 + h^2} + h^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 + h^2}\right|\right)\Big|_0^a =$$
$$= \pi \left(a\sqrt{a^2 + h^2} + h^2 \ln\left|a + \sqrt{a^2 + h^2}\right| - h^2 \ln h\right). \quad \blacktriangle$$

Вопросы для закрепления

1. Какими способами можно задать поверхность в пространстве?
2. В чем разница между явно и неявно заданной поверхностью?
3. Как параметрически задать поверхность в пространстве, и какие условия должны выполняться для функций параметризации?
4. Какое условие должно выполняться для того, чтобы поверхность считалась гладкой?
5. Как определяется нормаль к поверхности в произвольной точке, если поверхность задана параметрически?
6. В чем заключается разница между односторонней и двусторонней поверхностью?
7. Как можно определить сторону поверхности с помощью нормального вектора?
8. Приведите пример односторонней поверхности и объясните, почему она такой является.
9. Как вычисляется площадь поверхности, заданной параметрически, с помощью поверхностного интеграла?
10. В чем заключается формула для элемента площади поверхности в криволинейных координатах?