Дәріс 13. Екінші ретті дифференциалды теңдеу.

1. Ретін төмендетуге болатын екінші ретті дифференциалды теңдеулер:

а) Егер дифференциалды теңдеу мынадай

$$y'' = f(x)$$

түрде болса, онда теңдеуді біртіндеп интегралдау арқылы шешіледі.

Мысалы, $y'' = 2x$ дифференциалды теңдеуді шешейік.

Шешуі. $y'' = \dfrac{dy'}{dx}$ екенін ескеріп, теңдеуді мына түрде көшіріп жазамыз: $dy' = 2xdx$. Мүшелеп интегралдаймыз, $y' = x^2 + C_1$, C_1 – еркіті тұрақты. Тағы $y' = \dfrac{dy}{dx}$ екенін ескеріп, соңғы теңдеуді мына түрде көшіріп жазамыз: $dy = \left(x^2 + C_1\right)dx$. Мүшелеп интегралдасақ берілген дифференциалды теңдеу шешімін аламыз:

$$y = \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2, \quad C_2 \text{ – еркіті тұрақты.}$$

б) Егер дифференциалды теңдеу жазылуында y(x) функция кірмесе, яғни

$$F(x,\ y', y'') = 0,$$

онда теңдеуді шешу үшін $y' = z$ деген айнымалы енгіземіз.

Мысал. $x(y''+1) + y' = 0$ дифференциалды теңдеуді шешейік.

Шешуі. $y' = z$ деген айнымалы енгізсек, $y'' = z'$, теңдеу бірінші ретті дифференциалды теңдеуге келеді: $x(z'+1) + z = 0$. x-ке бөліп $z' + \frac{1}{x}z = -1$ сызықты теңдеу аламыз, мұнда $P(x)=\frac{1}{x}$, $Q(x)=-1$.

Теңдеудің шешімін табу үшін (7) формуланы қолданамыз:

$$z = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left[C + \int(-1)e^{\int \frac{1}{x}dx}dx\right] = e^{-\ln x}\left[C - \int e^{\ln x}dx\right] = x^{-1}\left[C - \int xdx\right] =$$

$$= \frac{1}{x}\left[C - \frac{x^2}{2}\right] = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}.$$

Сызықты теңдеу шешімі: $z = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$.

$y' = z$ болғандықтан,

$$y' = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}, \quad dy = \left(\frac{C}{x} - \frac{x}{2}\right)dx.$$

Мүшелеп интегралдап, берілген екінші ретті дифференциалды теңдеу шешімін табамыз:

$$y = \int\left(\frac{C}{x} - \frac{x}{2}\right)dx = C\ln x - \frac{x^2}{4} + C_1$$

в) Егер дифференциалды теңдеу жазылуында x айнымалы кірмесе, яғни $F(y,\ y', y'') = 0$, онда теңдеуді шешу үшін y-ті тәуелсіз айнымалы деп, ал ізделінді функция ретінде $z = z(y) = y'$ аламыз.

Мысал. $2yy'' = (y')^2 + 1$ дифференциалды теңдеуді шешейік.

Шешуі. $z = z(y) = y'$ деп алсақ, онда $y'' = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = z'z$, және берілген теңдеу мынадай түрге келеді:

$2yzz' = z^2 + 1$. Бұл – айнымалысы ажыратылатын теңдеу.

$$\frac{2zdz}{z^2+1} = \frac{dy}{y}.$$

Интегралдасақ, $\ln(z^2+1) = \ln y + \ln C_1$, $z = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$.

$z = y'$ болғандықтан, $\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = dx$, осыдан

$$\pm\sqrt{C_1 y - 1} = \frac{C_1}{2}(x + C_2) \quad \text{немесе} \quad C_1 y - 1 = \frac{C_1^2}{4}(x + C_2)^2$$

2. Екінші ретті тұрақты коэффициентті сызықты біртекті дифференциалды теңдеу деп мынадай теңдеуді айтамыз:

$$y''+py'+qy=0, \text{ мұндағы } p \text{ мен } q - const \qquad (8)$$

Екінші ретті сызықты біртекті дифференциалды теңдеу шешімін

$$y = e^{rx} \qquad (9)$$

түрінде іздейміз, мұндағы r – қандай да бір нақты сан.

$$\left(e^{rx}\right)'' + p\left(e^{rx}\right)' + qe^{rx} = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

болғандықтан (9) функция берілген теңдеудің шешімі болуы үшін

$$r^2 + pr + q = 0 \qquad (10)$$

болуы керек. Бұл теңдеуді екінші ретті сызықты біртекті дифференциалды теңдеудің **характеристикалық теңдеуі** деп атайды.

Мынадай тұжырымдар дұрыс болады:

1) Егер характеристикалық теңдеудің *a* және *b* әртүрлі нақты түбірлері болса, онда *y''+py'+qy=0* теңдеудің жалпы шешімі мынадай болады:

$$y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}$$

2) Егер характеристикалық теңдеудің екі еселі *a* нақты түбірлері болса, онда *y''+py'+qy=0* теңдеудің жалпы шешімі мынадай болады:

$$y = C_1 e^{ax} + C_2 x e^{ax}$$

3) Егер характеристикалық теңдеудің *a +bi* және *a-bi* комплексті түбірлері болса, онда *y''+py'+qy=0* теңдеудің жалпы шешімі мынадай болады:

$$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$$

ЕКІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫ ТЕҢДЕУ.

1. Ретін төмендетуге болатын екінші ретті дифференциалды теңдеулер:

а) Егер дифференциалды теңдеу мынадай

$$y'' = f(x)$$

түрде болса, онда теңдеуді біртіндеп интегралдау арқылы шешіледі.
Мысалы, $y''=2x$ дифференциалды теңдеуді шешейік.

Шешуі. $y''=\dfrac{dy'}{dx}$ екенін ескеріп, теңдеуді мына түрде көшіріп жазамыз: $dy'=2xdx$. Мүшелеп интегралдаймыз, $y'=x^2+C_1$, C_1 – еркіті тұрақты. Тағы $y'=\dfrac{dy}{dx}$ екенін ескеріп, соңғы теңдеуді мына түрде көшіріп жазамыз: $dy=\left(x^2+C_1\right)dx$. Мүшелеп интегралдасақ берілген дифференциалды теңдеу шешімін аламыз:

$$y=\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2, \quad C_2 \text{ – еркіті тұрақты.}$$

б) Егер дифференциалды теңдеу жазылуында y(x) функция кірмесе, яғни

$$F(x,\ y',y'')=0,$$

онда теңдеуді шешу үшін $y'=z$ деген айнымалы енгіземіз.

Мысал. $x(y''+1)+y'=0$ дифференциалды теңдеуді шешейік.

Шешуі. $y'=z$ деген айнымалы енгізсек, $y''=z'$, теңдеу бірінші ретті дифференциалды теңдеуге келеді: $x(z'+1)+z=0$. x-ке бөліп $z'+\dfrac{1}{x}z=-1$ сызықты теңдеу аламыз, мұнда $P(x)=\dfrac{1}{x}$, $Q(x)=-1$. Теңдеудің шешімін табу үшін (7) формуланы қолданамыз:

$$z=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[C+\int(-1)e^{\int\frac{1}{x}dx}dx\right]=e^{-\ln x}\left[C-\int e^{\ln x}dx\right]=x^{-1}[C-\int xdx]=$$

$$=\frac{1}{x}\left[C-\frac{x^2}{2}\right]=\frac{C}{x}-\frac{x}{2}.$$

Сызықты теңдеу шешімі: $z=\dfrac{C}{x}-\dfrac{x}{2}$.

$y'=z$ болғандықтан,

$$y'=\frac{C}{x}-\frac{x}{2},\quad dy=\left(\frac{C}{x}-\frac{x}{2}\right)dx.$$

Мүшелеп интегралдап, берілген екінші ретті дифференциалды теңдеу шешімін табамыз:

$$y=\int\left(\frac{C}{x}-\frac{x}{2}\right)dx=C\ln x-\frac{x^2}{4}+C_1$$

в) Егер дифференциалды теңдеу жазылуында x айнымалы кірмесе, яғни $F(y,\ y',y'')=0$, онда теңдеуді шешу үшін y-ті тәуелсіз айнымалы деп, ал ізделінді функция ретінде $z=z(y)=y'$ аламыз.

Мысал. $2yy''=(y')^2+1$ дифференциалды теңдеуді шешейік.

Шешуі. $z=z(y)=y'$ деп алсақ, онда $y''=\dfrac{dz}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=z'z$, және берілген теңдеу мынадай түрге келеді: $2yzz'=z^2+1$. Бұл – айнымалысы ажыратылатын теңдеу.

$$\frac{2zdz}{z^2+1}=\frac{dy}{y}.$$

Интегралдасақ, $\ln(z^2+1)=\ln y+\ln C_1$, $z=\pm\sqrt{C_1y-1}$.

$z = y'$ болғандықтан, $\pm \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = dx$, осыдан

$$\pm \sqrt{C_1 y - 1} = \frac{C_1}{2}(x + C_2) \quad \text{немесе} \quad C_1 y - 1 = \frac{C_1^2}{4}(x + C_2)^2$$

2. Екінші ретті тұрақты коэффициентті сызықты біртекті дифференциалды теңдеу деп мынадай теңдеуді айтамыз:

$$y''+py'+qy=0, \text{ мұндағы } p \text{ мен } q - const \qquad (8)$$

Екінші ретті сызықты біртекті дифференциалды теңдеу шешімін

$$y = e^{rx} \qquad (9)$$

түрінде іздейміз, мұндағы r – қандай да бір нақты сан.

$$\left(e^{rx}\right)'' + p\left(e^{rx}\right)' + qe^{rx} = (r^2 + pr + q)e^{rx}$$

болғандықтан (9) функция берілген теңдеудің шешімі болуы үшін

$$r^2 + pr + q = 0 \qquad (10)$$

болуы керек. Бұл теңдеуді екінші ретті сызықты біртекті дифференциалды теңдеудің **характеристикалық теңдеуі** деп атайды.

Мынадай тұжырымдар дұрыс болады:

1) Егер характеристикалық теңдеудің *a* және *b* әртүрлі нақты түбірлері болса, онда *y''+py'+qy=0* теңдеудің жалпы шешімі мынадай болады:

$$y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}$$

2) Егер характеристикалық теңдеудің екі еселі *a* нақты түбірлері болса, онда *y''+py'+qy=0* теңдеудің жалпы шешімі мынадай болады:

$$y = C_1 e^{ax} + C_2 x e^{ax}$$

3) Егер характеристикалық теңдеудің *a +bi* және *a-bi* комплексті түбірлері болса, онда *y''+py'+qy=0* теңдеудің жалпы шешімі мынадай болады:

$$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$$