Дәріс 2. Комплекс сандар өрісі. Комплекс сандардың әртүрлі формада жазылулары: алгебралық, тригонометриялық, көрсеткіштік түрде жазылуы. Комплекс сандарға қолданылатын амалдардың геометриялық интерпретациясы

1 Комплекс сандардың әртүрлі формада жазылуы

1.1 Комплекс сандардың алгебралық түрде жазылуы

Комплекс сан бұл арнайы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

түріндегі матрица екені өткен дәрістен белгілі. Ыңғайымызға қарай бұл матрицаны екі бекітілген матрицаның сызықтық комбинациясы ретінде алайық:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Бірлік E матрицасы $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$ жиынына тиісті болғандықтан 1 санына сәйкестенеді және оны жәй ғана бірлік деп атайтын боламыз. Екінші матрицасы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ матрицасы 1-теоремада енгізілген i матрицасына сәйкес келеді және бұдан былай жорамал бірлік деп аталатын болады.

Тұжырым 1. Кез келген комплекс санды бір мен жорамал бірлік екеуінің сызықты комбинациясы түрінде жазуға болады. Яғни: $a \cdot 1 + b \cdot i \implies a + bi$ түрінде жазуға болады. $a + bi$ – бұл $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ комплекс санның *алгебралық түрде жазылуы*. Сызықтық комбинациясының коэффиценттері $a, b \in \mathbb{R}$. Бірліктің алдындағы a коэффициенті комплекс санның нақты бөлігі деп, ал жорамал бірліктің алдындағы b коэффициенті жорамал бөлік деп аталады.

Комплекс сандарды қосу мен азайту мүшелеп орындалады.

- Қосындының нақты бөлігі қосылғыштардың нақты бөліктерінің қосындысына тең,
- Қосындының жорамал бөлігі қосылғыштардың жорамал бөліктерінің қосындысына тең:

$$\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2), \quad \mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2) \tag{1}$$

Көбейту ережесін есте сақтау қиын. Сондықтан, $i^2 = -1$ болатыны ескеріп, келесі жақшаны ашқан дұрыс:

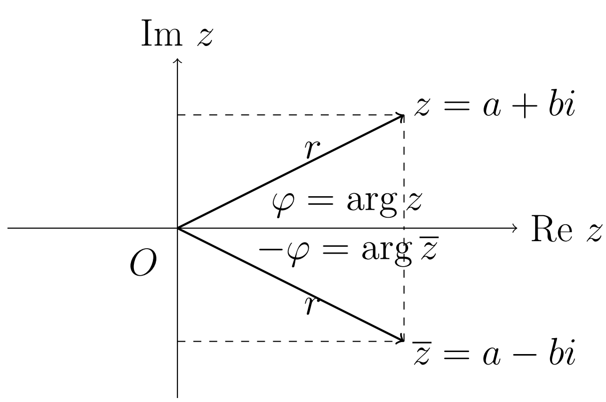
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$$

1.2 Комплекс сандардың тригонометриялық түрде жазылуы

Алдыңғы дәрісте келіскендей, комплекс сан — бұл $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ түріндегі арнайы матрица.

$a + bi$ комплекс саны алгебралық түрде көрсетілген, яғни әрбір комплекс санның екі мінездемесі бар: нақты және жорамал бөліктері. Басқаша айтқанда, комплекс сан (a, b) жұбы жазықтықтағы векторды анықтайтын белгі.

Комплекс саны $z = a + bi$ полярлық координаталар жүйесінде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ түрінде жазылады, мұндағы r - векторының ұзындығы, φ - векторының бағытына сәйкес бұрыш. Суретте егежей тегежейлі көрсетілген. r-ді модулі деп, ал φ бұрышын комплекс санның аргументі деп аталады, әрі сәйкес z және $\arg z$ деп белгілейді. Мысалы $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$.



1.3 Комплекс сандардың көрсеткіштік түрде жазылуы

Комплекс санның әртүрлі ұсынуын еске түсірейік

- $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ түрінде матрицаның дербес жағдайы,
- $z = a + bi$ жорамал бірлігі мен нақты бірлігінің сызықты комбинациясы,
- $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ полярлық координаталар системасында.

Бұл бөлімде комплекс сандар үшін жаңа түсінік енгіземіз.

Теорема 1 $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$.

Онда $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$ – комплекс санның көрсеткіштік түрде жазылуы болады.

Сонымен комплекс сандар бірнеше түрде көрініс табады, матрицалық , алгебралық , көрсеткіштік және тригонометриялық. Матрицалық түрі комплекс сандардың бар екенін түсіндіретіні көрсетілді.

1.4 Комплекс сандарға қолданылатын амалдардың геометриялық интерпретациясы

Енді алгебралық түрдің комплекс сандардың қосындысының геометриялық түсіндірмесі арқылы ақиқат екенін көрсетейік. Экспоненттi түр көбейту мен комплекс саннан алынған қандай да бір дәрежеден түбірді тапқанда керек. Тригонометрикалық түрді қолданып Муавр формуласын жазған дұрыс.

Комплекс сандардың қосындысы векторларды үшбұрыш ережесімен қосу сияқты іске асады. Қосындыны алгебралық түрде жазған ыңғайлырақ.

Комплекс санның көбейтіндісін экспоненциалдық формуланы қолданып жазған дұрыс.

Комплекс сандардың аргументтерінің геометриялық қосындысының мағынасы: үлкен аргументті бұрыштың кіші аргументке тең бұрышқа санның сағат тіліне қарсы бағытқа бұрылуы.