# КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

**Лектор: Болегенова Салтанат Алихановна**
**+7 701 386 97 55**
**e-mail.: Saltanat.Bolegenova@kaznu.kz**

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЯВНОЙ СХЕМЫ

**Цель лекции** - Методы исследование устойчивости неявной схемы

Рассмотрим отдельно уравнение конвективного переноса и уравнение диффузии. Будем исследовать устойчивость методом фон Неймана:

1) $\dfrac{f_{i,n+1}-f_{i,n}}{\Delta t}+u\dfrac{f_{i+1,n+1}-f_{i-1,n+1}}{2\Delta x}=0$ -уравнение конвекции,

$$f_{i,n+1}-f_{i,n}+\frac{c}{2}\left(f_{i+1,n+1}-f_{i-1,n+1}\right)=0,$$

$$f_{i,n}=V_n e^{Ii\theta},$$

$$V_{n+1}e^{Ii\theta}-V_n e^{Ii\theta}+\frac{c}{2}\left(V_{n+1}e^{I(i+1)\theta}-V_{n+1}e^{I(i-1)\theta}\right)=0,$$

$$V_{n+1}-V_n+\frac{c}{2}V_{n+1}\left(e^{I\theta}-e^{-I\theta}\right)=0,$$

$$V_n\left(1+cI\sin\theta\right)=V_n,$$

$$G=\frac{1}{1+cI\sin\theta}=\frac{1-cI\sin\theta}{1+c^2\sin^2\theta},$$

$$|G|^2=\frac{1+c^2\sin^2\theta}{\left(1+c^2\sin^2\theta\right)^2}=\frac{1}{1+c^2\sin^2\theta}\le 1,$$

$$1\le 1+c^2\sin^2\theta \Rightarrow c^2\sin^2\theta\ge 0 \quad \text{при} \quad \forall\, C.$$

Т.о. для полностью неявной схемы $|G|\le 1$ независимо от величины $c$ данная схема абсолютно устойчива, что дает возможность вести расчеты с произвольно большим шагом по времени, а это является большим преимуществом.

2) Уравнение диффузии:

$$\frac{f_{i.n+1}-f_{i,n}}{\Delta t}=a\frac{f_{i+1,n+1}+f_{i-1,n+1}-2f_{i,n+1}}{\Delta x^2},$$

$$f_{i,n+1}-f_{i,n}=d\left(f_{i+1,n+1}+f_{i-1,n+1}-2f_{i,n+1}\right),$$

$$V_{n+1}e^{Ii\theta} - V_n e^{Ii\theta} = d\left(V_{n+1}e^{I(i+1)\theta} + V_{n+1}e^{I(i-1)\theta} - 2V_{n+1}e^{Ii\theta}\right),$$

$$V_{n+1} - V_n = dV_{n+1}\left(e^{I\theta} + e^{-I\theta} - 2\right),$$

$$V_{n+1}\left[1 - 2d\left(\cos\theta - 1\right)\right] = V_n\,,$$

$$G = \frac{1}{1 + 2d\left(1 - \cos\theta\right)} \text{ т.к. } \cos\theta \le 1 \Rightarrow \quad |G| \le 1 \quad \textit{для} \quad \forall d\,.$$

Т.о. полностью неявная конечно-разностная схема для уравнения диффузии также является абсолютно устойчивой.

### 9.2.3 Другие неявные схемы

В общем случае пространственные производные могут быть представлены следующим образом:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i = \lambda\frac{f_{i+1,n+1} - f_{i-1,n+1}}{2\Delta x} + \left(1 - \lambda\right)\frac{f_{i+1,n} - f_{i-1,n}}{2\Delta x}\,,$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i = \lambda\frac{f_{i+1,n+1} + f_{i-1,n+1} - 2f_{i,n+1}}{\Delta x^2} + \left(1 - \lambda\right)\frac{f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - 2f_{i,n}}{\Delta x^2}$$

$\lambda \in [0,1]$-весовой коэффициент.

Говорят, что пространственные производные определяются взвешенным средним центральных разностных производных в моменты времени *n* и *n+1* . При $\lambda = 0$ получим полностью явную конечно-разностную схему, при $\lambda = 1$- полностью неявная схема, при $\lambda = \frac{1}{2}$ получается схема Кранка-Никольсона (частично неявная):

$$\frac{f_{i,n+1} - f_{i,n}}{\Delta t} + u\frac{f_{i,n+1} - f_{i-1,n+1}}{4\Delta x} + u\frac{f_{i+1,n} - f_{i-1,n}}{4\Delta x} =$$
$$= a\frac{f_{i+1,n+1} + f_{i-1,n+1} - 2f_{i,n+1}}{2\Delta x^2} + a\frac{f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - 2f_{i,n}}{2\Delta x^2}.$$

Эта схема также являются абсолютно устойчивой и разрешается методом прогонки.

### 9.2.4 Недостатки неявных схем

Главным недостатком является то, что неявные схемы приводят к бесконечной скорости распространения возмущения. Для полностью явной схемы возмущение всегда распространяется за любое время *Δt* на расстоянии *Δx* в соседнюю узловую точку. Но для неявных схемы (поскольку в ней все $n+1$рассматривается одновременно) возможно распределяется на расстояние $l$ -до границ расчетной сетки. Это свойство желательно для уравнения диффузии, которое в дифференциальной форме имеет бесконечную скорость распространения возмущения. Явные схемы для уравнения диффузии не обладают таким свойством. В то же время, данное уравнение конвективного переноса предполагает распространение возмущения с конечной скоростью и поэтому для уравнения конвекции предпочтительнее выбирать явные конечно-разностные схемы, а для уравнения диффузии неявные.

В случае если уравнение включает и конвективные и дифференциальные члены, можно воспользоватся принципом расщепления.

### 9.3 Принцип расщепления

Модельное уравнение $\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ можно разбить на два уравнения:

$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ - уравнение конвекции,

$\frac{\partial f}{\partial t} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ - уравнение "диффузии", или применительно к температуре, уравнение теплопроводности.

Переход от временного слоя $n$ к слою $n+1$ выполняется за два "дробных" шага. На первом шаге при переходе от $n$ к слою $n+\frac{1}{2}$ действует первое уравнение (2), а на втором шаге ( $n+\frac{1}{2}$ $n+1$) второе уравнение (3). Естественно ожидать, что суммарный эффект двух таких шагов близок к эффекту перехода от $n$ к $n+1$ к уравнению (1) за 1 шаг.

Согласно принципу расщепления отдельные члены (или комплексы), входящие в уравнение, можно реализовать по-разному на различных промежуточных этапах (шагах). Это упрощает построение и испытание конечно-разностных схем.

Если уравнения дробных шагов описывают частные физические явления (как в нашем примере), то говорят о расщеплении по физическим процессам.

**Контрольные вопросы:**

1. Как находят ошибку аппроксимации?
2. Какая КРС называется аппроксимирующей?
3. Какая КРС называется сходящейся?
4. Из-за чего возникает неустойчивость?
5. Напишите число Куранта.
6. Напишите диффузионное число.
7. Напишите условие устойчивости КРС.