

Функцияның шегінің анықтамасы

R_n -дегі M_0 нүктесінің қандай да бір аймағында, M_0 нүктесінің өзінде де, $y = f(M)$ функциясы анықталған болсын.

Анықтама

1. ($\varepsilon - \delta$ тілінде). A саны $y = f(M)$ функциясының M_0 нүктесіндегі шегі деп аталады ($M \rightarrow M_0$ үшін), егер $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, төмендегі теңдік орынды болса:

$$|f(M) - A| < \varepsilon \quad \forall M : \rho(M, M_0) < \delta, \quad M \neq M_0.$$

Мысал 1. Дәлелде:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$$

Бұл $x = 3$ нүктесінде анықталмаған бір айнымалы функция және $\rho[M(x), M_0(a)] < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |x - a| < \delta$

$\varepsilon > 0$ болсын. Онда $x \neq 3$ үшін

$$\left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| < \varepsilon \Rightarrow |x + 3 - 6| < \varepsilon \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon = \delta,$$

яғни,

$$|x - 3| < \delta = \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| < \varepsilon.$$

2. (тізбектер тілінде). A саны $y = f(M)$ функциясының M_0 нүктесіндегі шегі деп аталады, егер $\forall \{M_n\} \rightarrow M_0$, мұндағы $M_n \neq M_0$, $\{f(M_n)\} \rightarrow A$.

2-ші анықтамада тізбектер шегі ұғымынан функцияның шегі ұғымы шығады. 1-ші анықтама мен 2-ші анықтама эквивалентті. Дербес жағдайда, бірінші анықтамадан $\lim_{x \rightarrow a} f(M) = A$ екендігі шығады, егер M_0 нүктесінің маңайында M нүктелер жиіне қоюлана түссе, онда y -тің сәйкес мәндері $y = A$ мәнінің маңайында қоюлана түседі.

$y = f(x)$ бір айнымалы функция шектерінің қасиеттерін қарастыралық.

3. Шексіз алыстатылған нүктелердің аймағының ішіндегі мынадай x нүктелер жиінен азайта аламыз: $|x - A| > M \quad \forall M : 0 < M < \infty$.

4. A санын $f(x)$ функциясының $x \rightarrow \infty$ ұмтылғандағы шегі деп айтамыз, егер $|f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x : |x| > M$ теңсіздігі орындалатындай $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$.

Ары қарай, a ақырлы да, шексіз де болуы мүмкін.

5. $x \rightarrow a$ ұмтылғанда $f(x) \rightarrow \infty$ деп айтамыз, егер $|x - A| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$ теңсіздігі орындалатындай $\forall M > 0 \quad \exists \delta = \delta(M) > 0$.

6. $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0)$ өрнегін $f(x)$ функциясының $x \rightarrow a$ ұмтылғандағы сол жақ шегі [$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$ оң жақ шегі] деп айтамыз, егер x айнымалысы a -ға ұмтыла отырып, әруақытта a -дан кіші (үлкен) болып отырса.

Егер $f(a-0) = f(a+0) = C$ теңдігі орындалса, $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(C)$ орынды екені анық.

Шектердің қасиеттері

1. $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = B$ болсын және a нүктесінің қандай да бір аймағында

а) $f_1(x) \leq \varphi(x), \quad x \neq a$. Онда $A \leq B$.

б) $f_1(x) \leq \psi(x) \leq f_2(x), \quad x \neq a$. Онда $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = A$.

2. Тұрақтының шегі осы тұрақтының өзіне тең.

3. Егер $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ және $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$ шектері ақырлы болса, онда:

а) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x),$

б) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$

б) егер $C - const$, онда $\lim_{x \rightarrow a} C \cdot f(x) = C \lim_{x \rightarrow a} f(x),$

в) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)},$ егер $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \neq 0$.

Е с к е р т у. Жоғарыда көрсетілген функцияның шектерінің қасиеттері тізбектің шектері үшін де орынды.

Шексіз кіші және шексіз үлкен шамалар

Анықтама 7. $\alpha(x)$ функциясы $x \rightarrow a$ ұмтылғанда шексіз кіші (үлкен) деп аталады, егер $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ [$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \infty$].

$u(a)$ - a нүктесінің қандай да бір аймағы болсын, $\alpha(x)$ - $x \rightarrow a$ ұмтылғандағы шексіз кіші, ал $\beta(x)$ - шексіз үлкен функциялар болсын.

Теоремалар

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ орындалуы үшін, $f(x) = b + \alpha(x) \quad \forall x \in u(a)$ теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

2. Егер $u(a)$ -да $f(x)$ шектелген және $|f(x)| > M > 0$ болса, онда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\beta(x)} = 0.$$

3. Егер $u(a)$ -да $f(x)$ шектелген болса, онда

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot \varphi(x)] = 0$$

$\alpha(x)$ және $\beta(x)$ - $x \rightarrow a$ ұмтылғандағы шексіз кіші болсын және $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$ шегі табылсын,

онда егер

а) $C \neq 0$ - ақырлы болса, онда α және β - бір ретті шексіз кіші функциялар, ал егер $C = 1$ болса, онда α және β - эквивалентті ($\alpha \sim \beta$) шексіз кіші функциялар.

Е с к е р т у. Шекті есептеу кезінде кез келген шаманы оған эквивалентті шамамен ауыстыруға болады.

б) $C = 0$ болса, $\alpha(x)$ $\beta(x)$ -ке қарағанда жоғары ретті шексіз кіші функция және оны былай жазамыз: $\alpha = o(\beta)$.

в) $C = \infty$ болса, $\beta(x)$ $\alpha(x)$ -ке қарағанда жоғары ретті шексіз кіші функция.

Шексіз үлкен функциялар осыған ұқсас салыстырылады.

Анықталмағандықтар

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = B$ болсын. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = C$ шегі табылсын делік.

1. $B \neq 0$ - ақырлы. Бұл жағдайда, $f(x)$ және $\varphi(x)$ функцияларының қандай болғанына қарамастан, $C = \frac{A}{B}$ болады.

2. $A = B = 0$, $C = ?$

а) $f(x) = 4x$, $\varphi(x) = 3x$. Онда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{3} = \frac{4}{3}.$$

б) $f(x) = x$, $\varphi(x) = x^2$. Онда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

$A = B = 0$ болған жағдайда, $f(x)$ және $\varphi(x)$ функцияларының қалай берілгендігіне байланысты C анықталмаған болуы мүмкін, онда $x \rightarrow a$ ұмтылғанда $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ функциясы $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандықты береді.

Негізгі анықталмағандықтар мыналар:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^\infty, \quad 0^\infty, \quad \infty^0.$$

Мысал 2. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right)$ тап.

$\infty - \infty$ түріндегі анықталмағандықты аламыз. Осы анықталмағандықты ашу үшін жақшаның ішіндегі өрнекті ортақ бөлімге келтіре отырып, мна өрнекті аламыз: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{x^2 - 4}$, яғни, $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандыққа келдік. Бұл анықталмағандық бөлшекті $x - 2 \neq 0$ ортақ көбейткішке қысқарту көмегімен оңай ашылады. Сонымен, берілген шектің мәні $\lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{1}{x + 2} \right) = -\frac{1}{4}$.

Мысал 3. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 - x + 5}{x^3 + x^2 - 1}$ тап.

$\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандықты аламыз. Бұл анықталмағандықты ашу үшін бөлшектің бөлімін де,

алымын да x^3 -қа бөлеміз. Онда $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}}$, бөлімі $x \rightarrow \pm\infty$ жағдайда нөлге тең емес

болғандықтан, шектер туралы теоремаларды қолдансақ:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 - x + 5}{x^3 + x^2 - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2 - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x^3}}{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^3}} = 2.$$

Тамаша шектер

Практикада жиі кездесетін функциялардың шектеріне тоқталалық. $\alpha(x)$ - қандай да бір функция болсын және

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \quad (1)$$

теңдігі орындалсын.

1. Бірінші тамаша шек $\left(\frac{0}{0}\right)$.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1 \quad (2)$$

(2)-ші теңдіктен бірден төмендегі теңдіктерді алуға болады:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} \alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\arcsin \alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{arctg} \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1.$$

Ендеше, (1)-ші шарт орындалғандықтан, $\sin \alpha(x)$, $\operatorname{tg} \alpha(x)$, $\arcsin \alpha(x)$ және $\alpha(x)$ функциялары - эквивалентті функциялар.

Мысал 4.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \operatorname{arctg} x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right)$. $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ болғандықтан, (1)-ші шарт орындалады, онда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x}{x} = 3.$$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + 2x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left| \lim_{x \rightarrow 0} (\pi + 2x) \neq 0 \right| = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \left| \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0 \right| = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = -2.$

Мысал 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x}$ тап.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 7x}{7x} \cdot 7}{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{7x}{3x}\right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 7x}{7x}}{\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{7}{3}.$$

2. Екінші тамаша шек (1^∞) .

$$\lim_{x \rightarrow a} [1 + \alpha(x)]^{1/\alpha(x)} = e \quad (3)$$

Мысал 6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1}$ тап.

Онда:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1+2}{2x-1}\right)^{3x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x-1}\right)^{3x+1}.$$

$\frac{2}{2x-1} = \frac{1}{y}$ белгілеуін енгізсек, $x = y + 1/2$ және $x \rightarrow \infty$ жағдайда $y \rightarrow \infty$.

Сондықтан, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x-1}\right)^{3x+1} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{3y+5/2} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^3 \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{5/2} = e^3.$

Мысал 7.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[(x-2) \ln \frac{x+1}{x-2}\right] = (\infty \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{x-2} = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{x-2} = (\infty) =$$

$$= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{x+1}{x-2} - 1 \right]^{x-2} = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x-2} \right)^{x-2} = \left| \text{т.к. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x-2} = 0 \right| =$$

$$= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left[1 + \frac{3}{x-2} \right]^{\frac{x-2}{3}} \right\}^{\frac{3}{x-2}(x-2)} = \ln e^3 = 3.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\log_a [1 + \alpha(x)]}{\alpha(x)} = \log_a e$$

$$9. \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{\alpha(x)} - 1}{\alpha(x)} = \ln a$$

$$10. \lim_{x \rightarrow a} \frac{[1 + \alpha(x)]^\mu}{\alpha(x)} = \mu.$$

Мысал 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\ln(1+x)}$ шегін есепте.

$x \rightarrow 0$ ұмтылғанда $\sin 5x \approx 5x$, $\ln(1+x) \approx x$ болғандықтан,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{x} = 5.$$

Тізбекті натурал аргументтің функциясы ретінде қарастыруға болады, яғни

$$y = x_n = f(n).$$

Анықтама 8. A санын $\{x_n\}$ сандық тізбегінің шегі деп айтамыз, егер кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $N = N(\varepsilon) > 0$ нөмірі табылып, $n > N$ теңсіздігін қанағаттандыратын n -нің барлық мәндері үшін $|x_n - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса. Егер A саны $\{x_n\}$ тізбегінің шегі болса, онда: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ деп жазамыз.

Шегі тұрақты сан болатын тізбекті *жинақты тізбек* деп айтамыз, ал кері жағдайда, ол *жинақсыз тізбек* деп аталады.

Мысал 12. $\{x_n\} = \left\{ \frac{2n+3}{n+1} \right\}$ тізбегінің шегі $A=2$ болатындығын дәлелде.

- Кез келген $\varepsilon > 0$ үшін барлық $n > N$ теңсіздігі орындалатындай $N = N(\varepsilon) > 0$ нөмірі табылып, төмендегі теңсіздіктің орынды екенін дәлелделік:

$$|x_n - A| = \left| \frac{2n+3}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{2n+3-2n-2}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Соңғы теңсіздікті шеше отырып, $n > 1/\varepsilon - 1$ теңсіздігін аламыз. Ендеше, $N = [1/\varepsilon - 1] + 1$, мұндағы (α) - α санының бүтін бөлігі. Сонымен, барлық $n > N$ үшін $|x_n - 2| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай N нөмірі табылады.

Үзіліссіз функциялар

R_n -де қандай да бір M_0 нүктесінің маңайында $y = f(M)$ функциясы анықталсын.

Анықтама 9. Функция $f(M)$ функциясы M_0 нүктесінде үзіліссіз деп аталады, егер

а) M_0 нүктесінде $f(M)$ анықталған болса

б) $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$ шегі табылса

в) $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$.

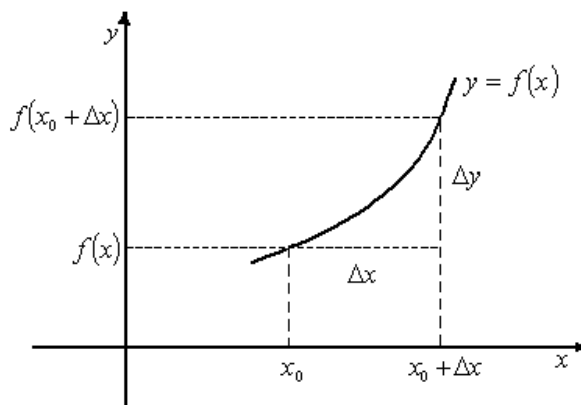
Егер а), б), в) шарттарының тым болмағанда біреуі орындалмаса, онда M_0 нүктесі $y = f(M)$ функциясының үзіліс нүктесі деп аталады.

Бір айнымалы $y = f(x)$ үзіліссіз функцияларының қасиеттерін қарастырамыз.

Егер $f(x)$ функциясы a нүктесінде үзіліссіз болса, онда $f(a-0) = f(a+0) = f(a)$ теңдіктері орындалатындығы анық.

Үзіліссіздіктің тағы бір анықтамасын берелік.

x_0 нүктесінде x айнымалысына Δx өсімшесін береміз.



Онда функция Δy өсімшесін алады, әрі

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x).$$

Анықтама 10. $y = f(x)$ функциясын x_0 нүктесінде үзіліссіз деп айтамыз, егер ол осы нүктеде анықталып және $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ теңдігі орындалса.

Мысал 13. $y = x^2$ функциясын кез келген $x_0 \in (-\infty; \infty)$ нүктесінде үзіліссіз екендігін дәлелде.

Шынында да,

$$f(x_0) = x_0^2 \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) = f(x_0 + x)^2 \Rightarrow \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = \Delta x \cdot (2x_0 + \Delta x). \quad \text{Бұдан}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x (2x_0 + \Delta x) = 0.$$

Мысал 14. $y = \sin 5x$ функциясын кез келген $x \in R$ нүктесінде үзіліссіз екендігін дәлелде.

Кез келген тәуелсіз айнымалының Δx өсімшесі үшін функция өсімшесі

$$\Delta y = \sin 5(x + \Delta x) - \sin 5x = \cos\left(5x + \frac{5}{2}\Delta x\right) \cdot \sin \frac{5}{2}\Delta x.$$

Онда кез келген $x \in R$ үшін $\cos 5x$ шектелген функция болғандықтан:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(5x + \frac{5}{2}\Delta x\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{5}{2}\Delta x = 0. \quad \text{Ендеше, } y = \sin 5x \text{ функциясы барлық сан осінде үзіліссіз.}$$

Қасиеттері:

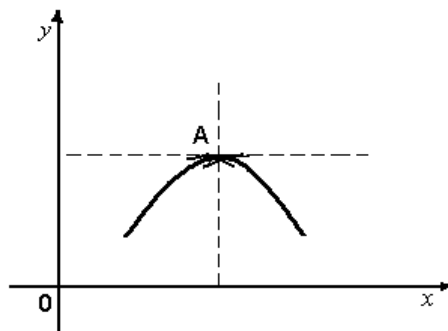
1. Егер $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда осы нүктеде

$$f(x) \pm \varphi(x), f(x) \cdot \varphi(x), \frac{f(x)}{\varphi(x)}, (\varphi(x_0) \neq 0) \text{ функциялары да үзіліссіз.}$$

2. Егер $y = f(x)$ функциясы $x = a$ нүктесінде үзіліссіз, ал $x = \varphi(t)$ функциясы α нүктесінде үзіліссіз болса, мұндағы $\alpha = \varphi(a)$, онда $y = f(\varphi(t))$ күрделі функциясы $t = a$ нүктесінде үзіліссіз.

Функцияның үзіліс нүктелері

Анықтама 11. $f(x)$ функциясының үзіліс нүктесі x_0 жөнделінетін үзіліс нүктесі деп аталады, егер $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ шегі болып, бірақ та $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде анықталмаған немесе $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ болса.



Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде жөнделетін үзілісті функция болса, онда ол үзілісті жөндеуге болады. Яғни, $f(x_0)$ анықталмаған, ал $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ болса, онда $f(x_0) = A$ деп алып, $f(x)$ функциясын x_0 нүктесінде үзіліссіз қылып жіберуге болады.

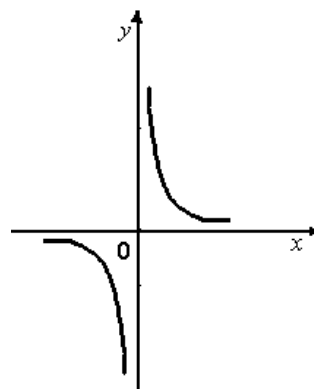
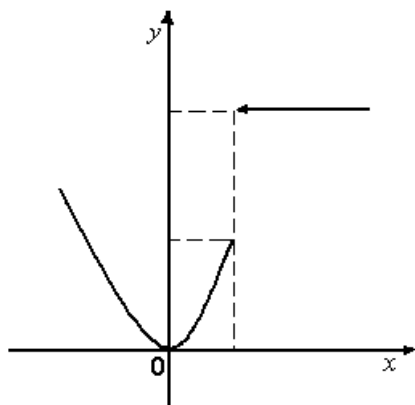
Анықтама 12. x_0 нүктесі бірінші түрдегі үзіліс нүктесі деп аталады, егер $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ табылып, тұрақты санға тең болса және $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ теңдігі орындалса.

Мысал 15.

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{егер } x \leq 1 \\ 2, & \text{егер } x > 1 \end{cases}$$

$$y(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} y = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1, \quad y(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} y = \lim_{x \rightarrow 1+0} 2 = 2.$$

$x_0 = 1$ нүктесі бірінші түрдегі үзіліс нүктесі, себебі $y(1-0) \neq y(1+0)$.



Басқа үзіліс нүктелерін екінші түрдегі үзіліс нүктесі деп айтамыз.

Мысал 16. $y = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 0.$

$$\lim_{x \rightarrow -0} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} y = \infty. \text{ Ендеше, } x=0 \text{ нүктесі екінші түрдегі үзіліс нүктесі.}$$

Кесіндідегі үзіліссіз функциялар

Анықтама 13. $f(x)$ функциясы $[a; b]$ кесіндісінде үзіліссіз деп аталады, егер ол $(a; b)$ аралығындағы әрбір нүктеде үзіліссіз болса және $f(a+0) = f(a), f(b-0) = f(b)$ теңдігі орындалса.

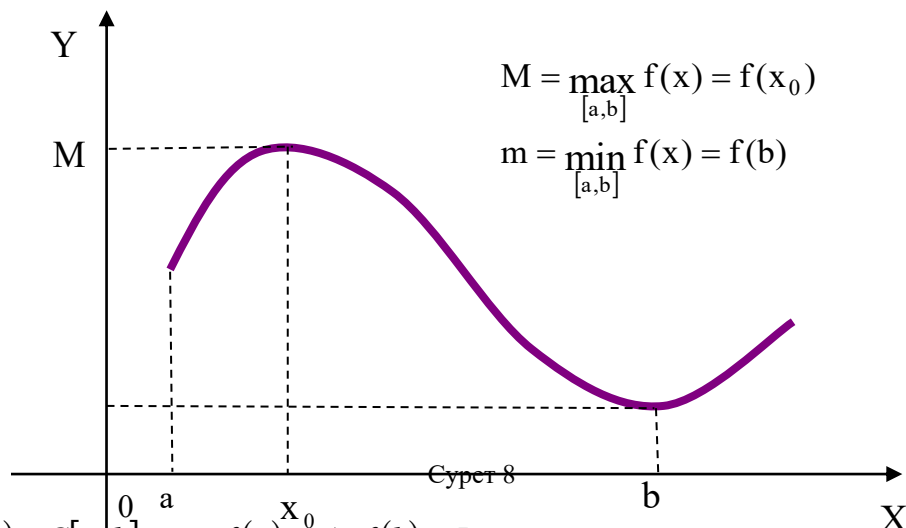
D облысындағы үзіліссіз функциялардың класын $C(D)$ деп белгілейміз.

Теоремалар.

1. Егер $f(x) \in C[a; b]$, онда $f(x)$ функциясы $[a; b]$ кесіндісінде шектелген.

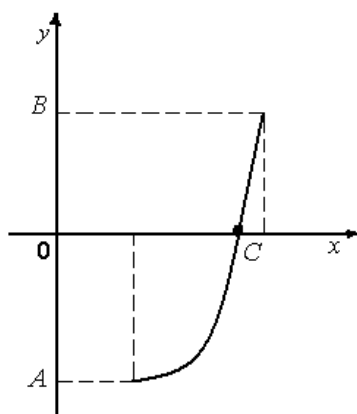
2. Егер $f(x) \in C[a; b]$, онда $f(x)$ функциясы осы кесіндіде тым болмағанда бір рет ең үлкен мән M мен ең кіші мән m қабылдайды, яғни,

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a; b] \quad (\text{сурет 8}).$$



3. $f(x) \in C[a; b]$ және $f(a) = A$, $f(b) = B$ болсын, әрі $A = B$ болсын.
 Онда $\forall \mu: A \leq \mu \leq B \quad \exists x = C$, мұндағы $f(C) = \mu$.

Салдар 1. Егер 3-теоремада $AB < 0$, онда $f(C) = 0$, $C \in (a; b)$ орындалатындай $\exists C$ (сурет 9).



Е с к е р т у. $y = f(x)$ бірайымалы функцияның шектері (біржақты шектерден басқа) мен үзіліссіздігі туралы теоремалар мен қасиеттер көп айнымалы функциялар үшін де ақиқат.