РАЗДЕЛ II. Теория вероятностей и математическая статистика

Глава 1. Случайные события

§1. Основные понятия. Виды событий

Теория вероятностей–математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений. В повседневной жизни вы оказываетесь свидетелями различных событий. Например, вы проходите тестирование по математике. В результате вы успешно сдали экзамен. Это-событие. Из ящика, содержащего одинакового размера шары белого и синего цветов наугад извлекается один шар. В результате может быть извлечен шар белого или синего цвета. Это также событие. При подбрасывании монеты появятся одно из следующих двух событий: монета упала гербом вверх или монета упала цифрой вверх. При подбрасывании игрального кубика появятся одно из шести событий, состоящее в появлении одного из очков 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

Проведение экспериментов, наблюдений, проверок, измерений, социологических опросов, референдумов и т. д. в общем случае называют проведением испытания.

Рассмотренные примеры показывают, что событие происходит в результате проведенного испытания. События обозначаются буквами A, B, C,...и т. д.

Таким образом, результат испытания в теории вероятностей называется событием. Примеры событий:

- появление «герба» или «цифры» при бросании монеты;
- выпадение «цифр» при бросании игрального кубика;
- извлечение шара синего цвета из ящика, содержащего разноцветные шары одинакового размера и т.д..

Случайное событие - это такое событие, которое в результате опыта может произойти и не произойти (например, выпадение 3-х очков при бросании игрального кубика, выигрыш по лотерее , результат встречи двух футбольных команд равного рейтинга и др.)

Результаты испытаний заранее предсказать невозможно. В силу симметричности монеты и игрального кубика можно заключить, что появление «герба» или «цифры» и выпадение очков от 1 до 6 при бросании игрального кубика являются равновозможными событиями. В общем случае с событиями связываются некоторые числа, характеризующие степень возможности появления события, называемые вероятностями. Вероятность события обозначают через P(A).

Для каждого опыта можно указать некоторую совокупность (множество) взаимно исключающих событий, причем в результате опыта должно обязательно появиться какое-нибудь одно из этих событий. Такая совокупность событий называется пространством элементарных событий и обозначается буквой **Ω**, а элементы этого пространства- буквой ω_i, где ω_i - элементарные события.

Пространство **Ω** может быть конечным, бесконечным счетным или несчетным множеством. Пространство элементарных событий **Ω** считается заданным, если указаны все ω_i его элементы:

$\Omega = \{\omega_i \,/\, i = \overline{1, n}\}$ или $\Omega = \{\omega_i \,/\, i = \overline{1, \infty}\}$.

Подмножества пространства элементарных событий **Ω** называются случайными событиями. Случайные события обозначаются буквами А, В, С, ... Таким образом, $A \subseteq \Omega$. Элементарные события ω_i, входящие в состав случайного события А, называются благоприятствующими появлению события А. Если $A=\Omega$, то событие А называется достоверным, т.е. при проведении испытания достоверное событие А обязательно произойдет. Событие называется невозможным, если в результате испытания оно заведомо не произойдет.

Пусть производится бросание игральной кости. Здесь $\Omega = \{\omega_i \,/\, i = \overline{1,6}\}$, где ω_i - выпадение очков на грани игрального кубика, аналогично при бросании монеты получим $\Omega = \{\omega_i \,/\, i = 1,2\}$. Рассмотрим некоторые события, которые могут появиться в результате бросания игральной кости:

$A_1 = \{\omega_3, \omega_6\}$ - появление грани с цифрой кратной трем;

$A_2 = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ - появление грани с несчетным числом;

$A_3 = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ - появление грани с четным числом;

$A_4 = \{\omega_7\}$ - появление грани с цифрой 7. Здесь события $A_1 = \{\omega_3, \omega_6\}$, $A_2 = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ и $A_3 = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ - случайные события, $A_4 = \{\omega_7\}$ - невозможное событие, т.к. на кубике грани с цифрой 7 нет, $A_5 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ - достоверное событие, т.к. в результате опыта одно из событий ω_i обязательно произойдет.

Если $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, то группа событий A_1, A_2, ..., A_n называется полной группой. Отсюда следует, что в результате опыта обязательно произойдет одно из событий, образующих полную группу.

В вышерассмотренном примере события A_2, A_3 образуют полную группу, т.к.
$A_2 + A_3 = \Omega\,\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

Два события, образующих полную группу называются противоположными. Событие противоположное событию А обозначается буквой $\bar{A}$. Таким образом, $A+\bar{A}=\Omega$.

Суммой А+В двух событий А и В называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

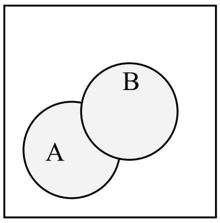
Произведением А·В двух событий А и В называется событие, состоящее в совместном появлении этих событий.
Пусть производится выстрел по мишени. События А- попадание в мишень первым и В- попадание в мишень вторым стрелком. Тогда А+В означает хотя бы одно попадание в мишень, а АВ- два попадания в мишень.

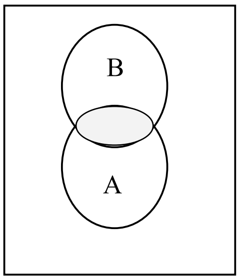
Аналогично определяется сумма и произведение конечного числа событий. Операции сложения и умножения событий обладают свойствами, присущих обычном операциями сложения и умножения.

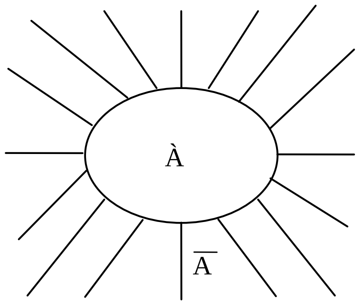
Если в результате испытания появление или непоявление события А не оказывает влияния на появление или непоявление события В, то эти два события называются независимыми. В противном случае эти события называются зависимыми. Появление «герба» или «цифры»при бросании монеты являются примерами независимых событий. Два события А и В называются несовместными если появление одного из них исключает появление другого (например, при бросании игрального кубика появление граней с цифрами 1,2,3,4,5 и 6). Пусть события A,B,C,D,E,F и L – соответственно означают появление на гранях игрального кубика цифр 1,2,3,4,5,6 и появление четной цифры. Тогда событие L будет совместным с любым из событий B,D, F и несовместным с любым из событий A,C,E.

Если для событий A_1, A_2, ..., A_n выполняются $P(A_1)= P(A_2)=...= P(A_n)$, то события A_1, A_2, ..., A_n называются равновозможными.

Если пространство элементарных событий рассмотреть как прямоугольный четырехугольник, а события – частью этого четырехугольника, тогда сумму, произведение событий и противоположное событие можно изобразить в следующем виде:







Операции сложения и произведения обладают следующими свойствами:

1.А + В = В + А

2. $A \cdot B = B \cdot A$

3. (А+В) +С = А + (В+С)

4. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

5. $A \cdot (B + C) = AB + AC$

Отсюда вытекают справедливость следующих равенств:

А+А=А, А·А=А, А+$\Omega = \Omega$, А·Ω=А, А+$\overline{A}$=Ω, $\overline{(\overline{A})} = A.$

К понятию «вероятность» существует несколько подходов. Один из них («классический») основан на подсчете числа элементарных событий данного опыта.

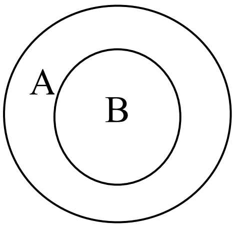
Современное построение теории вероятностей основывается на аксиоматическом подходе и опирается на элементарные понятия теории множеств. Такой подход к построению теории вероятностей называется теоретико-множественной. Ниже приводятся некоторые основные понятия теории множеств.

Два множества совпадают (или равны), если они состоят из одних и тех же элементов.

Множество В является подмножеством множества А $(B \subseteq A)$, если все элементы множества В содержатся во множестве А (рис. 1).

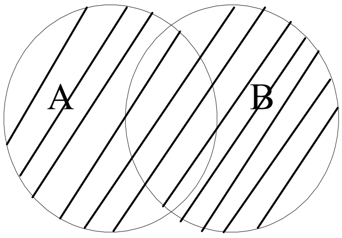
Объединением (суммой) множеств А и В называется множество С=А+В, состоящее из всех элементов А и всех элементов В (рис. 2)

Пересечением (произведением) множеств А и В называется множество D=A· B, состоящее из элементов входящих одновременно и в А и в В (рис. 3).



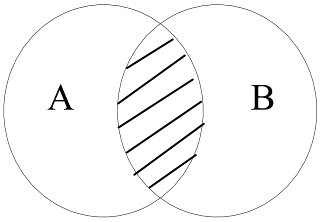
$B \subseteq A$

Рис.1.



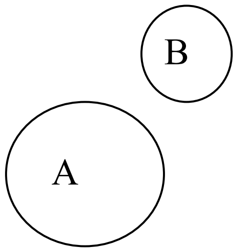
$A + B$

Рис.2.



$A \cdot B$

Рис.3.



$A \cdot B = \varnothing$

Рис.4.

Так как события в теоретико-множественном изложении представляют собой множества, то действия над ними (сложение, умножение) определяются так же, как и соответствующие действия с множествами.

Приведем аксиомы вероятностей:

1.Вероятность любого события заключена между нулем и единицей

$$0 \leq P(A) \leq 1 \qquad (1.1.1)$$

2.Аксиома сложения вероятностей. Если события A и B несовместные, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \qquad (1.1.2)$$

Аксиома (2) обобщается на любое конечное число событий A_1, A_2, ..., A_n, если они несовместные события:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \qquad (1.1.3)$$

3. Аксиома сложения вероятностей для бесконечной последовательности событий: если A_1, A_2, ..., A_n, ... – несовместные события, то

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \qquad (1.1.4)$$

Аксиомы теории вероятностей позволяют вычислить вероятности любых событий с помощью вероятностей элементарных событий. Однако аксиомы не позволяют найти вероятности элементарных событий. На практике они определяются либо из соображений связанных с симметрией опыта или же на основе опытных данных. Например,

1.$P(\omega_1)= P(\omega_2)=0,5$ – при бросании монеты;

2. $P(\omega_i)=1/6$, $i =1,2,\ldots,6$ – при бросании игрального кубика.

Здесь эти вероятности найдены благодаря симметрии монеты и игрального кубика.

Пусть пространство Ω является множеством равновозможных элементарных событий, т.е.

1. $P(\omega_1)= P(\omega_2)=...= P(\omega_n)$
2. $\Omega=\sum_{i=1}^{n}\omega_i$ - образуют полную группу,

тогда

$$P(\omega_i)=\frac{1}{n}, \qquad P(\Omega)=\sum_{i=1}^{n}P(\omega_i)=1 \tag{1.1.5}$$

Определение (классическое определение вероятности).

Вероятностью события А называется отношение числа равновозможных элементарных событий, благоприятствующих появлению события А, к общему числу равновозможных элементарных событий данного опыта:

$$P(A)=m/n \tag{1.1.6}$$

Из этого определения при m=n получим, что если $A=\Omega$, то $P(A)=P(\Omega)=1$, т.е. вероятность достоверного события равна 1, а при m=0 имеем $P(A)=0$ следовательно– вероятность невозможного события равна 0. Таким образом вероятность любого события заключена между нулем и единицей:

$$0 \le P(A) \le 1$$

Пример 1. Пусть А, В, С события некоторого опыта. Что означают следующие события

$A_1=\overline{A}BC,\ A_2=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C},\quad A_3=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C},\quad A_4=A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$,

$A_5=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C},$

Решение. Событие A_1 означает совместное появление событий - $\overline{A}$, В и С , т.е.совместное появление В, С и непоявление события А; Событие A_2- одновременное непоявление событий А, В и С , событие A_3 – появление хотя бы одного из событий $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{C}$, т.е. появление одного из событий $(\overline{A},\overline{B},\overline{C},\overline{A}\,\overline{B},\overline{A}\,\overline{C},\overline{B}\,\overline{C},\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$; Событие A_4 - появление только одного из событий $\overline{AB}\,\overline{C}$, $\overline{A}B\overline{C}$, $\overline{A}\,\overline{B}C$, A_5-появление не более одного из событий А,В и С. Заметим, что $A_5=A_2+A_4$.

Пример 2. Стрелок произвел 2 выстрела по мишени. События A_1 и A_2 соответственно – попадание в мишень в первом и во втором выстрелах. Выразите через A_1 и A_2 следующие события:

A – хотя бы одно попадание;

B- одно попадание;

C- два попадания;

D- два промаха;

F- не более одного попадания.

Решение. Пусть A_i – попадание в мишень i = 1,2, тогда $\bar{A}_i$ - промах. Отсюда имеем A= A_1+A_2, т.е. попадание в мишень либо в первом, либо во втором, либо в обоих выстрелах. Аналогично получим:
B=$A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2$ - ровно одно попадание, C=$A_1 \cdot A_2$ - два попадания, D=$\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$ - два промаха, $F = \bar{A}_1 A_2 + A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2$ - не более одного попадания.

Пример 3. В урне имеется 4 белых , 9 черных и 7 красных одинакового размера шаров. Из урны наугад извлечен 1 шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар белого цвета.

Решение. Пусть A- извлечение белого шара. В этом испытании элементарными событиями ω_i (i=$\overline{1,20}$) – являются извлечение из урны наугад одного шара. Число элементарных событий равно 20, а число элементарных событий благоприятствующих появлению события A равно 4, т.к. в урне имеется всего 4 белых шаров. Поэтому согласно определению вероятности события имеем $P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

Классическое определение вероятности применимо только в тех случаях, когда результаты испытания являются равновозможными элементарными событиями конечного числа. Обычно, испытания результаты, которых являются равновозможными элементарными событиями, обладают симметрией. Так, например, игральная кость симметрична (имеет форму правильного многогранника). Однако, в случаях, когда результаты испытаний нельзя представить в виде конечного числа элементарных событий классическое определение вероятности не применимо.

В таких случаях используют другое определение вероятности, а именно, статистическое определение вероятности.

Определение. Статистической вероятностью события A называется относительная частота появления этого события в n произведенных испытаниях.

Статистическую вероятность обозначают через $\tilde{P}(A)$. Тогда $\tilde{P}(A)$=W(A)=m/n, где W(A)- относительная частота события A, m – число испытаний, в которых появилось событие A в произведенных испытаниях, n – общее число произведенных испытаний.

Статистическая вероятность обладает теми же свойствами, что и вероятность P(A) события.

Для того чтобы применить статистическое определение вероятности рассматриваемые события должны быть воспроизведены достаточное число раз при одних и тех же условиях. События должны обладать устойчивостью частот, т.е. в различных сериях испытаний относительная частота должна изменяться незначительно, колеблясь около некоторого постоянного числа. И, наконец, число испытаний должно быть достаточно велико. При выполнении этих условий относительную частоту события можно считать равной вероятности события А.

Из вышесказанного следует, что теория вероятностей имеет дело не с любыми испытаниями, а лишь с испытаниями, обладающими свойствами устойчивости частот.

Статистическая вероятность события вычисляется непосредственно после проведения испытаний.

Пример 4. В урне содержится 4 белых , 5 синих и 11 красных одинаковых шаров. Производится три серии испытаний – извлечение шара из урны: n_1=10, n_2=15, n_3=17.

Найти статистическую вероятность события А – появление цветного(синего или красного) шара, если известно что в первой серии испытаний цветные шары появились 7 раз, т.е. m_1=7,во второй серии испытаний m_2=10 и в третьей серии испытаний m_3=14.

Решение. Из условий задачи получим следующие значения статистической вероятности соответственно :

$\tilde{P}(A)$=7/10, $\tilde{P}(A)$=10/15 и $\tilde{P}(A)$=14/17.

Как видно из этого примера статистическая вероятность события имеет различные значения в каждой серии испытаний. Вместе с тем нетрудно заметить, что эти значения группируются около некоторого числа. Этим числом является вероятность события Р(А)=0,8 т.е. с увеличением числа испытаний относительная частота появления события приближается к вероятности события.

По этой причине наряду с классическим определением вероятности используют и статистическое определение вероятности.

Пример 5. Монета подброшена 8 раз. «Герб» выпал 3 раза. Какова статистическая вероятность выпадения герба?

Решение. Общее число испытаний n=8, а число появления герба в зтих испытаниях m=3. Поэтому статистическая вероятность появления “герба” равна $\tilde{P}(A)$=0,375.

Нахождение вероятности события с использованием классического определения вероятности предполагает подсчет числа равновозможных элементарных событий благоприятствующих событию А и общего числа равновозможных элементарных событий в данной серии испытаний.

При решении задач, именно подсчет числа элементарных событий вызывает большие затруднения. Поэтому для подсчета числа этих событий используют основные формулы комбинаторики. Комбинаторика – раздел математики, изучающий методы решения комбинаторных задач – задач на подсчет числа различных комбинаций, составленных из данной совокупности однородных элементов любой природы.

Пусть дано множество n однородных различных элементов. Из данных n элементов можно составить различные комбинации по к элементов, где $k \le n$.

Пример 6. Составить различные комбинации из данных трех элементов **a, b** и **c.**

Решение. Здесь возможны три вида комбинаций в зависимости от значений к: $k = 1, k = 2, k = 3$.

а) Если $k = 1$, тогда из данных трех элементов комбинации составляются по одному элементу. Следовательно имеем следующие комбинации: **a ;b; c.**

б) Если $k = 2$, тогда имеем: **ab, ba, bc, cb, ac, ca** т.е. шесть комбинаций.

в) Если $k = 3$, то получим **abc, acb, cab, cba, bca, bac** - 6 комбинаций.

Определение. Размещениями из *n* элементов по ***к*** элементов называются такие комбинации, каждая из которых содержит к элементов, и отличаются друг от друга либо составом, либо порядком расположения этих элементов.

Общее число размещений из n элементов по к элементов определяется по формуле

$$A_k = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{1.1.7}$$

Здесь $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ (читается “эн факториал”) также принято, что $0! = 1$.

Пример 7. Найти число размещений из трех элементов по 2 элемента, т.е. вычислить A_3^2 .

Решение. По формуле **(1)** имеем: $A_3^2 = \frac{3!}{1!} = 6$.

В предыдущем примере также было показано, что число таких комбинаций равно 6.

Определение. Перестановками из данных n элементов называются такие комбинации, каждая из которых содержит все n данных элементов, и отличаются друг от друга только порядком расположения.

Общее число перестановок определяется по формуле

$$P_n = n(n-1)...(n-n+1) = n! \tag{1.1.8}$$

Пример 8. Сколькими способами можно расположить четыре книги на книжной полке.

Решение. Число таких расположений равно числу перестановок из четырех элементов. Поэтому

$$P_4 = 4! = 24$$

Определение. Сочетаниями из n элементов по ***к*** элементов называются такие комбинации, каждая из которых содержит ***к*** элементов, и отличаются друг от друга только составом элементов.

Общее число сочетаний определяется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{1.1.9}$$

Пример 9. Сколькими способами можно посадить за парту трех учеников по два ученика.

Решение. Число способов равно числу сочетаний из трех элементов по два элемента. Поэтому

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

Подчеркнем, что число размещений, перестановок и сочетаний связано равенством

$$A_n^k = P_k \cdot C_n^k$$

Действительно,

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!k!}{k!(n-k)!} = k!\frac{n!}{k!(n-k)!} = P_k \cdot C_n^k$$

При решении комбинаторных задач часто используются следующие два правила:

Правило сложения. Если некоторый элемент a можно выбрать m способами, а другой элемент b – n способами, исключающими друг друга, то выбор какого-нибудь одного из этих элементов (либо a, либо b) можно осуществить m+n способами.

Правило умножения. Если имеется m элементов одной группы и n элементов другой группы, то число различных упорядоченных пар, содержащих один элемент первой группы и один элемент второй группы, равно произведению *m*n*.

Пример 10. На тренировке по волейболу участвовали 5 девушек и 7 юношей. Сколькими способами можно составить одну смешанную команду из трех девушек и трех юношей?

Решение. Число способов выбора трех девушек среди 5 девушек равно числу сочетаний из пяти элементов по 3 элемента:

$$m_1 = C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10 .$$

Число способов выбора 3 юношей среди 7 юношей определяется аналогично

$$m_2 = C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = 35 .$$

Тогда по правилу умножения число способов составления одной смешанной команды равно

$m = C_5^3 * C_7^3 = 10 * 35 = 350$.

Пример 11. а) На каждой карточке написаны одна из букв У, Н, Б, Е, Р, К. Затем карточки перемешаны и в произвольном порядке расположены в ряд. Найти вероятность того, что появится слова «НУРБЕК».

б) Все карточки с буквами Н, У, Р, Б, Е, К заново перемешаны. Затем наугад взяты три карты и расположены в ряд. Найти вероятность появления слова «БЕК».

Решение. а) По условию задачи каждое расположение в ряд данных 6 карт отличаются друг от друга порядком расположения букв. Поэтому число таких расположений определяется как число перестановок (1.1.8):

$$n = P_6 = 6! = 7 .$$

Если каждую комбинацию принять за событие, то они несовместные и равновозможные, т.е. являются элементарными событиями данного испытания. Число же элементарных событий благоприятствующих появлению слова «Нурбек» равно m = 1. Следовательно, Р=1/ P_6 =1/720.

б) Число выбора 3 карт из данных шести карт определяется как n=A_6^3. Среди этих размещений нас интересует только одно из них, а именно слово «БЕК», следовательно, m = 1. Отсюда имеем

$$P = \frac{1}{A_6^3} = \frac{1}{120};$$

При решении задач на определение вероятности целесообразно предварительно обозначить событие некоторой буквой. Затем найти общее число и число благоприятствующих элементарных событий интересующему нас событию.

Пример 12. На книжной полке расположен справочник из 5-ти томов:

а) найти вероятность расположения томов в порядке возрастания номера томов;

б) найти вероятность того, что хотя бы один том находиться не на своем месте.

Решение. В качестве испытания рассмотрим произвольное расположение томов на книжной полке. Тогда число таких расположений найдем как число перестановок:

$$n=P_5=5!=120$$

Пусть А - расположение томов в порядке возрастания их номеров и В – хотя бы один том находится не на своем месте. Число элементарных, событий благоприятвующих появлению события А равно 1. Следовательно, искомая вероятность

$$P(A)= 1/120$$

Число же элементарных событий благоприятвующих появлению события В равно n-1. Потому что расположение томов в порядке возрастания их номера можно осуществлять единственным способом, а другие расположения томов

определяют событие В. Поэтому $P(B)=119/120$;

Здесь так же отметим , что А и В являются противоположенными событиями. Тогда учитывая, что $P(A)+P(\overline{A})=1$ находим:

$$P(B)=1-P(A)=1-\frac{1}{120}=\frac{119}{120}$$

Пример 13. В ящике имеется 5 изделий, 3 из которых окрашено. Из ящика извлечено наугад 2 изделия:

1. Найти вероятность того, что одно из извлеченных двух изделий окрашено.
2. Найти вероятность того, что оба извлеченных изделий окрашены.

Решение. 1. Извлечение наугад двух изделий из 5 можно осуществить $n=C_5^2$ способами. Если одно изделие окрашено, то число способов извлечения одного окрашенного среди 3-х равно $m_1=C_3^1$, аналогично $m_2=C_2^1$ - число способов извлечения одного неокрашенного. Тогда по правилу умножения находим число способов извлечения 2 изделий (одного окрашенного и одного неокрашенного) из 5:

$$m= C_3^1 \cdot C_2^1$$

Искомая вероятность найдем по классическому определению вероятности

$$P = \frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

2. Аналогично первому пункту находим

$$P = \frac{C_3^2 \cdot C_2^0}{C_5^2} = 0{,}3$$

При подсчете вероятностей по определению также используются размещения, перестановки и сочетания с повторениями.

Определение. Размещением из n элементов с повторениями называется такая комбинация, которая содержит k элементов, записанных в каком-нибудь порядке, из данных n элементов, причем один и тот же элемент может входить в соединение несколько раз.

Число размещений из n элементов по m элементов с повторениями находится по формуле

$$\tilde{A}_n^m = n^m \qquad (1.1.10)$$

Пример 14. Сколько различных трехзначных чисел можно записать при помощи цифр 4 и 5.

Решение. Возможны следующие случаи:

444, 445, 454, 544, 555, 554, 545, 455

всего 8 трехзначных чисел.

Этот же пример можно решить, используя формулу (1.1.10):

$$\tilde{A}_2^3 = 2^3 = 8$$

Всего можно записать 8 трехзначных чисел.

Пусть имеется n элементов, которые можно разбить на k групп, причем элементы, входящие в каждую группу тождественны между собой и отличны от элементов, входящих в другие группы. Через $m_1, m_2, ..., m_к$ обозначим число элементов, входящих в соответствующие группы, причем $m_1+m_2+...+m_к=n$.

Определение. Перестановкой из n элементов называется такая комбинация, в которую входит все n элементов расположенных в любом порядке. Возможны два случая:

1. Если k=n, т.е. все n элементов различны, то получим обычную перестановку и число таких перестановок

$$P_n = n!$$

2. Если k$< n$, то имеем перестановки с повторениями, т.е. такие перестановки, в которых хотя бы один элемент встречается более одного раза.

Число перестановок с повторениями находится по формуле

$$P^{n}_{m_1, m_2, \ldots, m_к} = \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_к!} \tag{1.1.11}$$

Пример 15. Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр: 5,3, 1, 5, 5, 1.

Решение. Всего шесть цифр, составляющих 3 группы: 1,1; 3; 5,5,5. Условия задачи соответствуют нахождению числа перестановок с повторениями.

Поэтому по формуле (1.1.11) находим

$P^{6}_{2,1,3} = \frac{6!}{2!1!3!} = 60$

Всего можно записать 60 шестизначных чисел.

Определение. Сочетаниями из n элементов по k элементов с повторениями называются комбинации различающиеся составом, которые содержат k элементов из данных n различных элементов, причем один и тот же элемент может входить в комбинации несколько раз.

Число сочетаний из n элементов по m элементов с повторениями находится по формуле:

$$\tilde{C}^{m}_{n} = C^{m}_{n+m-1} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} \tag{1.1.12}$$

Пример 16. В оранжерее имеется цветы 3 наименований. Сколькими способами можно составить букет из 7 цветов?

Решение. По условию задачи букет содержит 7 цветов. Поэтому в этот букет из данных трех видов наименований цветов одно наименование может входить несколько раз. Следовательно, можно использовать формулу (12) $\tilde{C}^{7}_{3} = \frac{(7+3-1)!}{7!(3-1)!} = \frac{9!}{7!2!} = 36$

Получили, что можно составить 36 букетов.

ЗАДАЧИ

1.Производится один раз бросание трех монет. Обозначим через C_1, C_2 и C_3 соответственно появление «цифры» на первой, второй и третьей монетах. Выразите через C_i($i=\overline{1,3}$) следующие события:

A-непоявление двух «герб» и одной «цифры»;

B- появление «герба» более одного раза;

C- появление трех «герб»;

D- появление трех «цифр».

2.Доказать, что следующее событие достоверное:

$$(A+B)(\overline{A}+B)+(A+\overline{B})(\overline{A}+\overline{B})$$

3. Упростить выражение:

а) $(A+B)(A+\overline{B})$ б) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$

4. Составляют ли совокупность событий полную группу?

а) Бросается монета. A_1- появление «цифры», A_2-появление «герба»;

б) Бросается две монеты. B_1-появление двух «герб», B_2-появление двух «цифр».

в) Бросается две игральные кости. C_1- появление на двух кубиках цифры 6, C_2-непоявление на гранях двух кубиков цифры 6, C_3-появление на одном кубике цифры 6, непоявление на другом кубике цифры 6.

5. Бросается одновременно 5 кубиков. Найти вероятность того, что появится две 6, две 5 и одна 4.

Указание: Необходимо использовать формулу (1.1.11).

6. Из колоды в 36 карт наугад извлекается 10 карт. Найти вероятность того, что среди извлеченных 10 карт 8 карт одной масти.

7. Из урны содержащей n одинакового размера шаров извлекается 1 шар. Затем этот шар возвращается в урну. Испытание производится n раз. Найти вероятность того, что были извлечены все шары.

Указание: Необходимо использовать формулу (1.1.10).

8. На 7 карточках написаны цифры соответственно, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Карточки тщательно перемешаны. Затем извлечено 4 карт и карты расположены в ряд. Найти вероятность того, что появилось число 5463.

9. Из колоды в 36 карт извлечены 3 карты. Какова вероятность того, что извлечено туз, король и дама?

10. Группе из 15 студентов , среди которых 8 девушек предложено 8 билетов в театр. Какова вероятность того, что среди 8 студентов получивших билеты в театр 2 девушек?

11. Найти вероятность появления четной цифры на грани при бросании игрального кубика.

12. В экспедиции имеется 20 автомашин, среди которых 2 были неисправными. Наугад взято на проверку пять автомашин. Найти:
а) вероятность того, что все 5 машин исправны;
б) вероятность того, что из 5 машин 1 неисправная.
13. В ящике 15 деталей, 10 из которых окрашено. Сборщик взял наугад 3 деталей. Какова вероятности того, что среди взятых 3 деталей 1 окрашена?
14. В первом ящике 5 шаров с номерами 1, 2, 3, 4, 5, а во втором 5 шаров с номерами 6, 7, 8, 9, 10. Из каждого ящика вынуто по одному шару. Найти вероятность того, что сумма номеров двух вынутых шаров равна 11.
15. Имеется 100 карт, на каждой из которых написано число от 1 до 100. Извлечена 1 карта. Найти вероятность того, что на извлеченной карте написано число кратное цифре 5.
16. Студент знает 50 из 60 экзаменационных вопросов. Каждой билет состоит из двух вопросов. Найти вероятность того, что студент знает оба вопроса.
17. Из 30 учеников в классе по контрольной работе 6 учеников получили оценку «5», 10 – оценку «4», 9-оценку «3». Для работы с ошибками к доске вызвали 3-х учеников. Какова вероятность того, что к доске вызваны ученики получившие оценку «2»?
18. Куб, все стороны которого окрашены, распилен на 1000 одинаковых кубиков. Затем все кубики тщательно перемешаны. Извлечен 1 кубик. Найти вероятность того, что на извлеченном кубике: а) одна сторона окрашена, б) две стороны окрашены, в) три стороны окрашены.
19. 6 магазинов должны были проверить 3 ревизора. Каждый ревизор должен проверить два магазина. Найти вероятность того, что случайно направленный ревизор проверить 2 магазина.
20. Из колоды в 36 карт взято 3 карты. Найти вероятность того, что среди взятых 3-х карт будет 2 туза?
21. В ящике находится 6 одинаковых пронумерованных кубиков. Из ящика взяты все кубики. Какова вероятность того, что кубики взяты в порядке возрастания их номеров?
22. Среди 10 изготовленных деталей 7 оказались нестандартными. Найти вероятность того, что среди наугад взятых 6 деталей 4 будут нестандартными.
23. Бросается 2 игральные кубики. Найти вероятность того, что абсолютная величина разности цифр на двух кубиках будет равна 2.
24. В коробке находится 6 одинаковых пронумерованных шаров. Из коробки по одному взяты шары и расположены в ряд. Найти вероятность того, что получено задуманное число.

25. 32 буквы русского алфавита написаны в разные карточки. Из этих 32 карт извлечено 5 карт и расположено в ряд. Какова вероятность того, что получено слово «улица».
26. В урне находится 5 белых 3 черных одинакового размера шаров. Из урны извлечено 2 шара. Какова вероятность того, что 2 шара разных цветов?
27. Из винтовки произведено 120 выстрелов. Относительная частота попадания равна 0,85. Сколько было попаданий в мишень?
28. Из 200 готовой продукции 8 продукций оказались бракованными. Найти относительную частоту бракованных продукций среди 200 продукций.
29. Брошена игральная кость. Какова вероятность того, что появиться цифра кратная 3?

§ 2. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Вероятность появления хотя бы одного события

Непосредственный подсчет вероятностей событий по классическому или статистическому определению для многих практических задач достаточно труден. Поэтому возникла необходимость в разработке методов вычисления вероятностей событий, позволяющих по известным вероятностям одних событий определить вероятности других событий. Эти методы связаны с применением основных теорем теории вероятностей-теорем сложения и умножения вероятностей.

1.Теорема умножения вероятностей

Два события называются независимыми, если появление одного из них не изменяет вероятности другого. В противном случае события А и В называются зависимыми.

Пример1. В урне находятся 5 белых и 7 синих одинаковых шаров. Из урны наудачу берут один шар, затем взятый шар возвращают в урну и испытание повторяют. Пусть событие А – появление белого шара при первом испытании, В - при втором испытании. Очевидно, события А и В независимые, т.к. появление А не изменяет вероятности события В: $P(A)=\frac{5}{12}, P(B)=\frac{5}{12}$.

Пример2. В склад готовой продукции поступило 120 деталей из них 5 нестандартных. Наудачу берут одну деталь, затем, не возвращая эту деталь, берут еще одну деталь. Событие А – при первом извлечении появилась стандартная деталь, В – при втором извлечении появилась стандартная деталь. Вероятность события В при условии, что событие А произошло, равна $P(B)=\dfrac{114}{119}$.

Если же при первом испытании событие А не произошло, то

$$P(B)=\frac{115}{119}.$$

Таким образом, вероятность события В зависит от того, произошло событие А или нет. Поэтому событие В зависит от события А.

Определение. Вероятность события В, найденная в предположении, что событие А наступило, называется **условной вероятностью** события В. Условная вероятность события В обозначается через $P_A(B)$. В рассматриваемом примере $P_A(B)=\dfrac{114}{119}$. В отличие от условных вероятностей вероятности Р(А) и Р(В) называются безусловными вероятностями.

Если $P_A(B)=P(B)$ и $P_B(A)=P(A)$, т.е. условная вероятность равна безусловной вероятности события, то события А и В независимы.

Найдем формулу для вычисления условной вероятности $P_A(B)$.

Пусть n общее число элементарных событий в данной серии испытаний. k - число элементарных событий благоприятствующих событию А, m - благоприятствующих событию В. Если пояление В зависимо от А, то число элементарных событий, благоприятствующих появлению события АВ равно m. Таким образом имеем $P(A)=\dfrac{k}{n}, P_A(B)=\dfrac{m}{k}$, $P(AB)=\dfrac{m}{n}$.

Теперь, преобразовав второе равенство, получим

$$P_A(B)=\frac{m}{k}=\frac{\frac{m}{n}}{\frac{k}{n}}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

Тем самым доказали следующую теорему.

Теорема. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого:

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B) \tag{1.2.1}$$

Применив формулу (1) к событию $B\cdot A$, получим

$$P(BA)=P(B)P_B(A) \tag{1.2.2}$$

т.к. $P(AB)=P(BA)$, то из (1) и (2) имеем

$$P(A)\cdot P_A(B)=P(B)P_B(A) \tag{*}$$

Следствие. Если событие В не зависит от события А, то и событие А не зависит от события В.

Действительно, если B не зависит от A, то $P_A(B) = P(B)$. Последнее подставим в (*). Тогда получим

$$P(A) \cdot P(B) = P(B)P_B(A),$$

или $P(A) = P_B(A)$, т.е. А также не зависит от В.

Из формулы (1) получим теорему умножения для независимых событий.

Теорема. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A)P(B) \qquad (1.2.3)$$

На практике независимость событий определяют по смыслу задачи. Например, если в цехе работают две автоматическое линии, по условиям производства не связанные между собой, то остановки этих линий – независимые события.

Несколько событий называют независимыми в совокупности, если каждое из них и любая комбинация остальных событий содержащая, либо все остальные, либо часть из них, есть события независимые.

Например, стрелок стреляет три раза по мишени. Обозначим через A_1-стрелок попал в цель при первом выстреле, A_2- при втором, A_3- при третьем. Эти события независимые. Эти события являются независимыми также в совокупности, т.к. независимыми будут следующие события: A_1 и A_2; A_1 и A_3 A_2; A_3 и A_1A_2; A_1A_3 и A_2.

Вероятность произведения независимых в совокупности событий равна произведению вероятностей этих событий, т.е.:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2...\mathrm{A}_n) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}_2)...\mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$$

2.Теорема сложения вероятностей

Если события А и В несовместные, то вероятность суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \qquad (1.2.4)$$

Если события А и В совместные, то вероятность суммы равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \qquad (1.2.5)$$

3. Теорема о вероятности появления хотя бы одного события

Если события A_1, A_2, A_3, A_4,..., A_n независимые в совокупности и А событие, состоящее в пояленииии хотя бы одного из них, то вероятность события А равна

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2, \ldots \overline{A}_n) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n \tag{1.2.6}$$

В частном случае, когда вероятности событий A_1, A_2, A_3,..., A_n равны, т.е.

$P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = p$,

имеем

$$P(A) = 1 - q^n \tag{1.2.7}$$

Пример 1. Из колоды 36 карт извлечены 2 карты. Найти вероятность того, что обе карты одной масти.

Решение. Вначале найдем вероятность того, что взятые 2 карты принадлежат одной из 4 мастей (например, «пики»). Пусть А-первая карта принадлежит масти «пики», В - вторая карта принадлежит масти «пики». События А и В – зависимые. Найдем их вероятности

$$P(A) = \frac{9}{36}, \quad P_A(B) = \frac{8}{35}$$

Отсюда имеем:

$$P(A \cdot B) = \frac{9}{36} \cdot \frac{8}{35} = \frac{2}{35}.$$

Пусть A_1, A_2, A_3 и A_4 означают, что взятые 2 карты принадлежат соответственно 4-м мастям. Тогда событие состоящее в том, что взятые 2 карты принадлежат одной из масти определяется как сумма $C = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$. Таким образом, искомая вероятность равна вероятности суммы несовместных событий:

$$P(C) = P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = \frac{8}{35}.$$

Пример 2. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,7, для второго – 0,8. Какова вероятность того, что хотя бы один из них попал в мишень?

Решение. Введем обозначения. Пусть А- певый стрелок попал в мишень, В- второй стрелок попал в мишень. Эти два события-совместные. Поэтому по форуле (1.2.5) находим

$$P(A+B)=0{,}7+0{,}8-0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}94$$

Заметим, что события А и В являются независимыми, т.к. попадание в мишень одного из них независит от того, что другой стрелок попал в мишень или не попал в мишень. Поэтому данный пример можно решить используя формулу (1.2.6). Предварительно найдем

$P(\overline{A})=1-P(A)=0{,}3$ $P(\overline{B})=1-P(B)=0{,}2$

Тогда вероятность того, что хотя бы один из стрелков (событие D) попал в мишень равна

$P(D)=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}94$.

Пример 3. В первом ящике имеется 10 деталей, из них 3 стандартных, во втором -15 деталей, из них 6 стандартных. Из каждого ящика взята по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

Решение. Введем обозначение. А- взятая из первого ящика деталь стандартная, В- взятая из второго ящика деталь стандартная. Вычислим их вероятности $P(A)=3/10, P(B)=6/15$. Для того, чтобы обе взятые детали были стандартными необходимо появление события А·В. Эти два события совместные, поэтому может появиться событие А·В, к тому же эти события независимые. Следовательно, можно использовать формулу (1.2.3). Тогда искомая вероятность равна

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=0{,}12.$$

Пример 4. Процесс изготовления изделия состоит из трех операций. Вероятность того, что в процессе первой операции будет допущено изготовление нестандартного изделия равна 0,02, во второй операции -0,03 и в третьей операции – 0,07. Приняв изготовление нестандартных изделий как независимые события, найти вероятность того, что после трех операций будет выпущено стандартное изделие.

Решение. Введем обозначения: А- изготовление нестандартного изделия после первой операции, В- после второй операции, С- после третьей операции. По условию задачи события А,В, и С являются независимыми.

Следовательно $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ также будут независимыми. Поэтому событие D=$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$ определяет изготовление стандартного изделия после трех операций. Тогда искомая вероятность равна

$$P(D) = 0{,}98 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}93 \approx 0{,}884$$

Пример 5. Вероятность обнаружения подводной лодки 0,8, а его поражение ракетой равна 0,6. Найти вероятность уничтожения обнаруженной подводной лодки.

Решение. Введем обозначения: А-обнаружение подводной лодки, В-уничтожение обнаруженной подводной лодки, С- поражение подводной лодки. Для того чтобы уничтожить обнаруженную подводную лодку, необходимо чтобы в нее попала ракета, т.е. появилось событие С=А·В. По условию задачи Р(А)=0,8; Р(С)=0,6. Необходимо найти вероятность $P_A(B)$, т.е. вероятность уничтожения обнаруженной лодки. По условию задачи А·В=С. Тогда имеем

$P(C)=P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)$

$P_A(B) = P(C)/ P(A) = 0{,}6/0{,}8=0{,}75$.

Пример 6. Три баскетболиста произвели по одному бросанию мяча в корзину. Вероятности попадания мяча в корзину для этих баскетболистов соответственно равны 0,9, 0,8 и 0,7. Найти вероятность того, что в корзину попадет только один баскетболист.

Решение. Введем обозначения: А-попадание первого баскетболиста в корзину , В- второго и С-третьего баскетболиста. Эти события по условию задачи являются независимыми. Рассмотрим следующие события:

$A\overline{B}\overline{C}$ $\overline{A}B\overline{C}$ и $\overline{A}\overline{B}C$. Эти события означают соответственно попадание первого, второго и третьего баскетболиста в корзину. Эти события являются несовместными и независимыми. Поэтому событие $D = A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$ означает попадание только одного из баскетболистов. Тогда искомая вероятность равна

$P(D) = P(A\overline{B}\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\overline{B}C) = 0{,}092$.

Пример 7. Вероятность попадания в утку для трех охотников соответственно равны 2/3, ¾ и ¼. Охотники одновременно выстрелили по утке. Какова вероятность того, что охотники поразили утку?

Решение. Для того, чтобы поразить утку, достаточно хотя бы одно попадание. Обозначим через A_1 ,A_2 и A_3 соответственно попадание в утку первым, вторым и третьим охотниками. Тогда искомая вероятность находим по (1.2.6):

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{15}{16}$$

Пример 8. В первым ящике находиться m_1 белых, n_1 черных шаров, во втором ящике - m_2 белых, n_2 черных шаров. Из двух ящиков одновременно извлечено по одному шару. Какова вероятность того, что хотя бы один из них шар белого цвета.

Решение. Введем обозначения: А- из первого ящика вынут белый шар. В- из второго ящика вынут белый шар. Тогда событие А+В означает, что из ящика вынут хотя бы один белый шар. Эти события являются совместными, причем $P(A)=\frac{m_1}{m_1+n_1}$, $P(B)=\frac{m_2}{m_2+n_2}$. Тогда искомая вероятность равна

$$P(A+B)=\frac{m_1m_2+m_2n_1+m_1n_2}{(m_1+n_1)(m_2+n_2)}..$$

Пример 9. В ящике находится 15 одинаковых изделий. Вероятность того, что из ящика будет взято два качественных изделий, равна 4/15. Сколько было качественных изделий в ящике?

Решение. Введем обозначения: А- первый раз из ящика был взято качественное изделие, В- второй раз из ящика было взято качественное изделие, к- число качественных изделий в ящике. Тогда $P(A)=\frac{\kappa}{15}$, $P_A(B)=\frac{\kappa-1}{14}$.

По условию задачи

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{\kappa(\kappa-1)}{14\cdot 15}=\frac{4}{15}.$$

Отсюда получим κ^2- κ - 56=0, κ=8.

Таким образом, в ящике было 8 качественных изделий.

Задачи

30. Три предохранительных элемента последовательно соединены в электрическую цепь. При повышении напряжения тока в цепи каждый элемент может отключаться соответственно с вероятностями 0,2, 0,3, и 0,4. Найти вероятность того, что будет ток в цепи.

Указание. В цепи будет ток, если все три элемента не будут отключаться.

31. Из 50 изделий в партии 5 изделий не соответствуют стандарту. Найти вероятность того, что среди 30 взятых изделий будет не более одного изделия с браком.

32. В ящике содержатся 10 деталей, из которых 4 окрашено. Сборщик из ящика наугад взял 3 деталей. Какова вероятность того, что среди 3-х взятых деталей окажется хотя бы одна окрашенная деталь?

33.В денежно-вещевой лотерее на 10 000 билетов 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Найти вероятность того, что владельцу одного билета выпадает либо вещевой, либо денежный выигрыш.

34. В урне содержатся 10 красных, 5 синих и 15 белых шаров. Какова вероятность извлечения из урны либо красного, либо синего шара?
35. В лотерее 1000 билетов. На каждый второй билет выпадает выигрыш. Какова вероятность того, что на 2 купленный билета выпадет выигрыш?
36. Брошены 2 игральные кубики. Найти вероятность того, что сумма очков на гранях кубиков будет равна 5.
37. Брошены 3 игральные кубики. Какова вероятность того, что на трех игральных кубиках выпали одинаковые цифры?
38. Найти вероятность того, что «цифра» появиться хотя бы один раз при бросании двух монет.
39. В урне содержится 9 красных 6 синих шаров. Из урны извлечено 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара красного цвета.
40. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что станок в течении часа не выйдет из строя для первого станка равна 0,3, для второго – 0,5 и для третьего – 0,6. Найти вероятности следующих событий:
а) в течение часа хотя бы один станок не выйдет из строя;
б) в течение 2 часов все три станка не выйдут из строя.
41. В семье имеется 4 детей. Вероятности рождения мальчика и девочки равны. Найти вероятность следующих событий:
а) все мальчики;
б) все мальчики или все девочки;
в) хотя бы один из них мальчик.
42. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,5, для второго -0,4. Каждый стрелок произвел по 3 выстрела. Найти вероятность хотя бы одного попадания в мишень.
Указание. Вначале найдите вероятность хотя бы одного попадания двух стрелков при одном выстреле.
43. В урне содержится 10 шаров. Вероятность извлечения из урны 2-х белых шаров равна 2/15. Сколько белых шаров было в урне?

§ 3. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Если событие А может наступить вместе с одним из событий B_1, B_2,...,B_n несовместных, образующих полную группу событий, то вероятность события А находится по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(A) \qquad (1.3.1)$$

Здесь $P_{B_1}(A)$ условные вероятности события А. Если необходимо произвести количественную оценку априорных вероятностей событий B_1, $B_2,...,B_n$ известных до испытания, т.е. найти апостериорные (получаемые после проведения испытания) условные вероятности $P_A(B_i)$, то используется формула Байеса

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)} \tag{1.3.2}$$

где P(A) находится по (1.3.1).

Пример 1. В склад готовой продукции поступило три партии радиоламп. Вероятность того, что случайно отобранная радиолампа принадлежит к одной из партии соответственно равна 0,25 ; 0,5; 0,25. Вероятность того, что случайно отобранная из каждой партии лампа прослужит определенный срок соответственно равна 0,7 ; 0,6 и 0,8.

1. Какова вероятность того, что радиолампа, случайно взятая из любой партии прослужит определенный срок?
2. Найти вероятность того, что наугад взятая лампа, прослужившая определенный срок принадлежит второй партии.

Решение. 1. Введем обозначения. А- взятая лампа прослужит определенный срок, B_1 –лампа взята из первой партии, B_2 –лампа взята из второй партии, B_3 – лампа взята из третьей партии.

Из условии задачи вытекает, что событие А может наступить после появления одного из событий B_1, B_2, B_3 . События B_1, B_2 и B_3 несовместные (т.к. взятая 1 лампа может принадлежать только одной из партий) и образуют полную группу. Проверим, что эти события образуют полную группу

$$P(B_1 + B_2 + B_3) = P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)=0,25+0,5+0,25=1$$

Таким образом, условия задачи удовлетворяют условиям формулы полной вероятности. Для того, чтобы использовать формулы (1.3.1) предварительно находим

$P(B_1)=0,25$ $\quad P_{B_i}(A) = 0,7$

$P(B_2)=0,5$ $\quad P_{B_2}(A) = 0,6$

$P(B_3)=0,25$ $\quad P_{B_3}(A) = 0,8$

Тогда по (1.3.1) получим

$$P(A)= 0,25\cdot 0,7+0,5\cdot 0,6+0,25\cdot 0,8=0,675$$

2.Теперь найдем вероятность того, что прослужившая определенный срок
лампа взята из второй партии. Для этого используем формулу Байеса.

$P_A(B_2)=0,5\cdot 0,6/0,675=0,445$

Аналогично, находим

$P_A(B_1)=175/675, \quad P_A(B_3)=200/675$

Заметим, что $P_A(B_1)+ P_A(B_2)+ P_A(B_3)=1$. Таким образом, вычисленные апостериорные условные вероятности свидетельствуют, что априорные вероятности событий изменены.

Замечание. При использовании формул (1.3.1) и (1.3.2) необходима проверка несовместности гипотез $B_1, B_2, ..., B_n$, а также проверка, что $B_1, B_2, ..., B_n$ образуют полную группу.

Пример 2. Из 350 механизмов 160 – первого сорта, 110 – второго сорта и 80- третьего сорта. Вероятность того, что среди механизмов первого сорта имеется нестандартный механизм, равна 0,01, среди механизмов второго сорта – 0,02 и среди механизмов третьего сорта – 0,04. Наугад взят один механизм. Найти вероятность того, что взятый механизм стандартный.

Решение. Введем обозначения. А- взятый механизм стандартный, B_1- взятый механизм первого сорта, B_2 – взятый механизм второго сорта, B_3 – взятый механизм третьего сорта. Тогда

$P(B_1)=160/350 \qquad P_{B_1}(A)=0,99$

$P(B_2)=110/350 \qquad P_{B_2}(A)=0,98$

$P(B_3)=80/350 \qquad P_{B_3}(A)=0,96$

События B_1, B_2 и B_3 являются несовместными.

Действительно, взятый один механизм одновременно не может принадлежат к разным сортам. События B_1, B_2 и B_3 образуют полную группу

$$P(B_1+B_2+B_3)=\frac{16}{35}+\frac{11}{35}+\frac{8}{35}=1$$

Тогда можно исползовать формулу полной вероятности

$$P(A)=\frac{16}{35}\cdot 0,99+\frac{11}{35}\cdot 0,98+\frac{8}{35}\cdot 0,96=0,98$$

Пример 3. В трех одинаковых ящиках находятся одинакового размера шары. В первом ящике -10 белых, 5 черных и 3 красных, во втором ящике – 9 белых, 16 черных и 11 красных, в третьем ящике – 7 белых, 4 черных и 1 красный шаров. Из любого ящика извлечен 1 шар. Найти вероятность того, что взятый шар черного цвета.

Решение. Рассмотрим следующие события:

A – взятый шар черного цвета;

B_1- шар взят из первого ящика;

B_2- шар взят из второго ящика;

B_3- шар взят из третьего ящика.

Здесь событие A зависимо от событий B_1, B_2 и B_3 , а события B_1, B_2 и B_3 - несовместные и образуют полную группу. Следовательно, можно использовать формулу полной вероятности. Предварительно вычислим:

$$P(B_1)=1/3, \qquad P_{B_i}(A) = 5/18$$

$$P(B_2)=1/3 \qquad P_{B_2}(A) = 16/36$$

$$P(B_3)=1/3 \qquad P_{B_3}(A) = 4/12$$

Таким образом, искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{18} + \frac{16}{36} + \frac{4}{12}\right) = \frac{19}{54}.$$

Пример 4. В первой урне имеется 1 белый, 3 черных, а во второй урне -4 белых и 6 черных одинакового размера шары. Из первой урны извлечен один шар и переложен во вторую урну. Затем из второй урны взят один шар. Какова вероятность того, что взятый из второй урны шар имеет белый цвет?

Решение. Выдвиним следующие гипотезы: B_1 – из первой урны извлечен черный шар; B_2 – из первой урны извлечен белый шар. Эти события образуют полную группу и несовместны. Через A обозначим событие состоящее в извлечении белого шара из второй урны. Тогда

$$P(B_1)=3/4 \qquad P_{B_i}(A) = 4/11$$

$$P(B_2)=1/4 \qquad P_{B_2}(A) = 5/11$$

Тогда по формуле полной вероятности имеем:

$$P(A)= 17/44$$

Пример 5. В отдел промышленных товаров поступило изделия из трех заводов. Среди всех поступивших изделий 50% изготовлено в первом заводе, 30% -во втором заводе и 20% - в третьем заводе, причем 70% изделий первого завода изделия первого сорта, 80 % изделий второго завода первого сорта и 90% изделий третьего завода – первого сорта. Найти вероятность того, что случайно выбранное изделие первого сорта, изготовлено на первом заводе.

Решение. Введем обозначения.

B_1 –изделие изготовлено на первом заводе;

B_2 –изделие изготовлено на втором заводе;

B_3 –изделие изготовлено в третьем заводе.
Эти события несовместные и образуют полную группу. Пусть А - взятое изделие первого сорта. Вычислим следующие вероятности:
$P(B_1)=0{,}5$, $P(B_2)=0{,}3$, $P(B_3)=0{,}2$, $P_{B1}(A)=0{,}7$, $P_{B2}(A)=0{,}8$, $P_{B3}(A)=0{,}9$
Тогда

$$P(A)=0{,}5\cdot 0{,}7+0{,}3\cdot 0{,}8+0{,}2\cdot 0{,}9=0{,}77$$

Теперь вероятность того, что взятое изделие первого сорта изготовлено на первом заводе находим по формуле Бейеса

$$P_A(B_1)=\frac{0{,}35}{0{,}77}=\frac{35}{77}.$$

Задачи

44. Группа спортсменов состоит из 20 лыжников и 10 велосипедистов. Вероятность выполнения квалификационный нормы для лыжников равна 0,85, а для велосипедистов – 0,7. Найти вероятность того, что наугад выбранный спортсмен выполнить квалификационную норму.
45. В каждом ящике содержится по 20 деталей. Среди них в первом ящике 17 стандартных, а во втором – 15 стандартных. Со второго ящика наугад выбран одна деталь и переложена в первый ящик. Затем из первого ящика выбрана одна деталь. Какова вероятность того, что выбранная деталь стандартная?
46. Два стрелка независимо друг от друга сделали по одному выстрелу по мишени. В мишень попала одна пуля. Если вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8, а для второго – 0,4, то чему равна вероятность того, что попавшая в мишень пуля принадлежит первому стрелку?
47. Три автоматные устройства произвели 5500 изделий, в том числе на первом устройстве изготовлено 1000 изделий, на втором -2000 и на третьем – 2500 изделий. Если изготовление нестандартного изделия для первого станка составляет 0,3%, для второго 0,2% и для третьего – 0,4 %, то чему равна вероятность того, что случайно выбранное изделие нестандартное?
48. В каждом из двух урн содержится по 2 черных и 8 белых шаров. Из первый урны извлечен один шар и переложен во вторую урну. Затем из второй урны извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар белый.
49. В первой урне содержится 1 белый и 9 черных, а во второй – 1 черный и 5 белых шаров. Из каждый урны извлечены по одному шару и оставшиеся 14 шаров в двух урнах переложены в третью урну. Из третьей урны взят один шар. Какова вероятность того, что шар выбранный будет белым?
Указание. Следует ввести следующие гипотезы:

B_1-из первой урны извлечен белый шар и из второй урны извлечен белый шар;

B_2-из первой – белый, из второй - черный;

B_3-из первый- черный, из второй- белый;

B_4- из обоих урн извлечены черные шары.

50. Строительной отряд состоит из 70 студентов первого курса и 30 студентов второго курса, в том числе среди первокурсников 10, а среди второкурсников – 5 девушек. Девушки по очереди дежурят в столовой. Найти вероятность того, что в день проверки в столовой дежурят девушка из первого курса.

51. Один из трех стрелков произвел 2 выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, для второго- 0,6 и для третьего - 0,8. Найти вероятность того, что обе пули попали в лишень.

Указание Вначале необходимо найти вероятность попадания в мишень при двух выстрелах для каждого стрелка.

52. Два студента одинакового объема два текста набрали на компьютере. Вероятность допуска ошибок для первого студента равна 0,04, а для второго – 0,2. При проверке обнаружена одна ошибка. Найти вероятность того, что обнаруженная ошибка допущена первым студентом.

53. Для покупки билета пассажир должен идти в одну из трех касс. Вероятность покупки билета из первой кассы равна 0,5, из второй кассы – 0,3 и из третьей кассы – 0,2, а вероятность того, что в кассах будут билеты на нужное направление, для первой кассы равна 0,6, для второй – 0,5 и для третьей -0,4. Пассажир приобрел один билет. Какова вероятность того, что билет куплен в первой кассе.

53. Из трех ламп 2 лампы перегорели. Вероятность того, что первая лампочка перегорит равна 0,3, для второй – 0,1 и для третьей- 0,1. Найти вероятность того, что перегорели вторая и третья лампочки.

54. В трех одинаковых ящиках содержатся одинаковые шары. В первом ящике содержится 20 белых, во втором – 15 белых 5 черных и в третьем- 20 черных шаров. Из одного ящика извлечен 1 черный шар. Найти вероятность того, что щар извлечен со второго ящика.

57. В первой коробке содержится m_1 белых n_1 черных шаров. Во второй коробке m_2 белых и n_2черных шаров. Со второй коробки вынут один шар и переложен в первую коробку. Затем из первой коробки вынут один шар и он оказался черным. Найти вероятность того, что вынутый черный шар был переложен из второй коробки.

58. 70% изделий в складе готовой продукции изготовлено на первом автомате, а 30% - на втором автомате. Вероятность изготовления стан-

дартной детали на первом автомате равна 0,98, а на втором – 0,95. Наугад выбранное изделие оказалось нестандартным. Найти вероятность того, что выбранное изделие изготовлено на первом автомате.

59.Группа состоит из 10 студентов, из них 3 студента очень хорошо подготовились к экзамену, 4 студента имели хорошую, 2 студента имели средную подготовку к экзамену, а 1 студент имел слабую подготовку к экзамену. Экзаменационные билеты содержат 20 вопросов. Очень хорошо подготовленный студент ответить на все 20 вопросов Хорошо подготовленный – на 16 вопросов, средне подготовленный - на 10 вопросов, слабо подготовленный студент – на 5 вопросов. Случайно выбранный студент ответил на все три вопроса билета.

Найти вероятность того, что экзамен сдал :

а) очень хорошо подготовленный студент;

б) хорошо подготовленный студент;

в) средне подготовленный студент;

г) слабо подготовленный студент.

Указание. Необходимо ввести следующие гипотезы:

B_1 – очень хорошо подготовленный студент;

B_2 – хорошо подготовленный студент;

B_3 – средне подготовленный студент;

B_4 - слабо подготовленный студент.

А- студент ответил на три вопроса билета. Тогда, например $P_{B_2}(A) = \frac{16}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18}$ и т.д.

60. В первой урне содержится 1 белый шар и 2 черных шаров. Во второй урне содержится 3 белых и 4 черных шаров. Из одной урны извлечен один шар, и он оказался белым. Найти вероятность того, что и второй шар, извлеченный из этой урны будет белым.

Указание. B_1 – шар вынут из первой урны, B_2 – шар вынут из второй урны, B_3 – первый раз вынут белый шар, B_4 - второй раз вынут белый шар, А- первый раз из любой урны вынут белый шар, В- второй раз из любой урны вынут белый шар. Вначале вычислим $P_A(B_1)$ и $P_A(B_2)$. Тогда искомая вероятность

$$P_A(B) = P_A(B_1)P_{AB_1}(B) + P_A(B_2)P_{AB_2}(B).$$

61. Из 18 стрелков пятеро поражают мишень с вероятностью 0,8, четверо – 0,6, двое – 0,5 и семеро – 0,7. Один из стрелков произвел один выстрел и не попал в мишень. Найти вероятности принадлежности стрелявшего к каждой из групп и сравнить эти вероятность.

§ 4. Последовательность независимых испытаний

Пусть производится **n** испытаний. Если вероятность появления события А в каждом испытании не зависит от результатов предыдущих испытаний, то такие испытания называют независимыми испытаниями относительно события А.

В общем случае событие А в каждом испытании может появиться с различной вероятностью. Ниже рассмотрим независимые испытания в результате которого может появиться либо событие А с постоянной вероятностью Р(А)=р , либо событие $\overline{A}$ с вероятностью $P(\overline{A}) = 1 - p = q$. Такая последовательность испытаний называется схемой Бернулли. К таким испытаниям относятся такие испытания как бросание монеты, проверка качества изделий и.т.д.

Пусть производится n независимых испытаний в результате которого может появится либо событие А с постоянной вероятностью, либо событие $\overline{A}$. Необходимо найти вероятность появления события А ровно k раз в этих испытаниях. Обозначим эту вероятность через P_n(k). Очевидно, что событие ровно k раз может появиться разными вариантами. Например, если производится 3 независимых испытаний, то в этих трех испытаниях событие А ровно 2 раза может появиться следующих вариантах:

$AA\overline{A}, A\overline{A}A, \overline{A}AA$, т.е. А может 2 раза появиться либо в первых двух испытаниях, либо в первом и третьем испытаниях, либо во втором и третьем испытаниях. Здесь эти события $AA\overline{A}, A\overline{A}A, \overline{A}AA$ несовместные, поэтому используя теоремы сложения и умножения вероятностей находим вероятность появления события А ровно 2 раза в 3-х независимых испытаниях:

$$P_3(2) = P\left(AA\overline{A} + A\overline{A}A + \overline{A}AA\right) = 3P^2q..$$

Формула Бернулли

В общем случае вероятность появления события А ровно k раз в n независимых испытаниях в схеме Бернулли находится по формуле Бернулли

$$P_n(\kappa) = C_n^\kappa p^\kappa q^{n-\kappa} \qquad (1.4.1)$$

где p=P(A), q=1-p= $P(\overline{A})$, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n элементов по k элементов. В рассмотренном примере n=3, k=2 , т.е. из (1.4.1) получим

$$P_3(2) = 3p^2q.$$

Число появлений m_o раз события в n независимых испытаниях называется **наивероятнейшим**, если вероятность появления события m_o раз является наибольшей или по крайней мере не меньше каждого в остальных возможных появлениях события.

Наивероятнейшее число m_o появления события A в n независимых испытаниях находится из двойного неравенства

$$np - q \le m_0 \le np + p \tag{1.4.2}$$

Если np-q равно целому числу, то m_o имеет два значения, если np-q равно дробному числу, то m_o имеет одно значение.

Используя формулу Бернулли можно определить вероятность следующих событий:

1. Вероятность появления события менее k раз

$$P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(\kappa - 1) = \sum_{i=0}^{\kappa-1} P_n(i) \tag{1.4.3}$$

2. Вероятность появления события более k раз

$$P_n(\kappa + 1) + P_n(\kappa + 1) + \ldots + P_n(n) = \sum_{i=\kappa+1}^{n} P_n(i) \tag{1.4.4}$$

3. Вероятность появления события не менее k раз

$$P_n(\kappa) + P_n(\kappa + 1) + \ldots + P_n(n) = \sum_{i=\kappa}^{n} P_n(i) \tag{1.4.5}$$

4. Вероятность появления события не более k раз

$$P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(\kappa) = \sum_{i=0}^{\kappa} P_n(i) \tag{1.4.6}$$

Вероятность появления события A хотя бы один раз в n независимых испытаниях в схеме Бернулли равна

$$P=1-q^n \tag{1.4.7}$$

Пример 1. Проводится матч двух шахматистов одинакового уровня мастерства. Не считая ничьи, найти вероятности следующих событий:

1. Вероятность выигрыша 3-х партий из 4 партий и 5 партий из 8 партий. Сравните эти вероятности.

2. Вероятность выигрыша не менее 3-х партий из 4-х, не менее 5 партий из 8-и партий. Сравните эти вероятности.

Решение. В силу того, что шахматисты имеют одинаковый уровень мастерства, вероятность выигрыша в каждой партии равна 0,5.

1. По формуле Бернулли находим следующие вероятности:

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$P_8(5) = C_8^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{32}$$

Отсюда следует, что $P_4(3) > P_8(5)$, т.е. вероятность выигрыша 3-х партий из 4-х больше, чем вероятность выигрыша 5-ти партий из 8-ми.

2. Используя формулу Бернулли находим вероятность выигрыша не менее 3-х партий из 4-х:

$$P_4(3) + P_4(4) = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$$

Аналогично найдем вероятность выигрыша не менее 5-ти партий из 8-ми:

$$P_8(5) + P_8(6) + P_8(7) + P_8(8) = \frac{93}{256}$$

Отсюда следует, что 93/256 > 5/16, т.е. вероятность выигрыша не менее 5-ти партий из 8-ми больше, чем вероятность выигрыша не менее 3-х партий из 4-х.

Если число испытаний велико, то пользоваться формулой Бернулли достаточно трудно, так как в этих случаях она приводит к большим вычислениям. Поэтому в этих случаях используют формулы, которые позволяют приближенно найти вероятность появления события ровно k раз в n независимых испытаниях.

Локальная теорема Муавра- Лапласа

Если вероятность появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что событие A появится ровно k раз в n независимых испытаниях приближенно находится по формуле

$$P_n(\kappa) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{\kappa - np}{\sqrt{npq}} \qquad (1.4.8)$$

Для функции φ(x) в конце книги дана таблица значений.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Если вероятность появления события в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие А появится в n независимых испытаниях от κ_1 раз до κ_2 раза приближенно находится по формуле

$$P_n(\kappa_1, \kappa_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$x_i = \frac{\kappa_i - np}{\sqrt{npq}}, \quad \Phi(x_i) = \int_0^x \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}dx}{\sqrt{2\pi}}; \qquad (1.4.9)$$

Из формулы (1.4.8) следует, что φ(x) четная функция, а из формулы (1.4.9) следует что $\Phi(x_i)$ нечетная функция.

Используя формулу (1.4.9) можно приближенно найти вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности P события А в n независимых испытаниях:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \qquad (1.4.10)$$

Если же вероятность появления события А мала, а число испытаний велико, то используют формулу Пуассона:

$$P_n(\kappa) \approx \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!}e^{-\lambda}, \quad \lambda = np \qquad (1.4.11)$$

Пример 2. В 600 независимых испытаниях событие А появится с постоянной вероятностью 0,4. Найти вероятность появления события А ровно 228 раз.

Решение. Точное решение этой задачи дается с помощью формулы Бернулли. Однако при n=600 она приводит к громоздким вычислениям. Поэтому воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа:

Предварительно находим

$$x = \frac{228 - 600 \cdot 0{,}4}{\sqrt{600 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}} = -1, \quad \varphi(-1)=0{,}242,$$

$$P_{600}(228) \approx \frac{0{,}242}{12} \approx 0{,}0201$$

Пример 3. Вероятность поражения мишени стрелком постоянна и равна 0,75.

1. n=100.

а)Найти вероятность попадания от 71 раз до 80 раза в 100 испытаниях;

б)Вероятность попадания не более 70 раз в 100 испытаниях

2. Найти вероятность того, что в 400 испытаниях абсолютная величина отклонения относительной частоты от постоянной вероятности p=0,75 будет меньше, чем 0,035.

3. Вероятность того, что в n независимых испытаниях абсолютная величина отклонения относительной частоты от постоянной вероятности 0,75 будет меньше, чем 0,035 равна 0,95. Найти n.

4. Найти наивероятнейшее число появления события А с постоянной вероятностью P=0,75 в 100 испытаниях.

Решение 1. В этих испытаниях n=100, т.е. число испытаний велико, поэтому используем интегральную теорему Муавра-Лапласа.

а) Здесь κ_1=71 κ_2=80 n=100 p=0,75 q=0,25

$$x_1 = \frac{71 - 100 \cdot 0{,}75}{\sqrt{100 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}} = -\frac{4}{10\sqrt{3}} \cdot 4 = -0{,}9238$$

;

$$x_2 = \frac{80 - 100 \cdot 0{,}75}{10\sqrt{3}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}155$$

Тогда

$P_{100}(71,80) \approx \Phi(1{,}155) - \Phi(-0{,}9238) \approx 0{,}6982$

б) κ_1=0 κ_2=70 n=100 p=0,75 q=0,25

$$x_1 = \frac{0 - 75}{10\sqrt{3}} \cdot 4 \approx -18, \quad x_2 = -1{,}155$$

$P_{100}(0,70) \approx \Phi(-1{,}155) + 0{,}5 \approx 0{,}124$

2. Здесь используем формулу (1.4.10)

n=400, p=0,75, q=0,25, ε=0,035

$$\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = 0{,}035 \cdot \frac{20 \cdot 4}{\sqrt{3}} \approx 1{,}62$$

Тогда искомая вероятность по (1.4.10)

$$P\left(\left|\frac{m}{400} - 0{,}75\right| < 0{,}035\right) \approx 2\Phi(1{,}62) \approx 0{,}895$$

3. Согласно условиям задачи имеем

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-0,75\right|<0,035\right)=0,95$$

Отсюда получим, что

$$2\Phi\left(0,035\sqrt{\frac{n}{0,75\cdot 0,25}}\right)=0,95$$

Из таблицы значений функции Ф(х) имеем:

$$0,035\sqrt{\frac{n}{0,75\cdot 0,25}}=1,96$$

Следовательно $\sqrt{n}=1,96\sqrt{3}/0,14$ и $n=588$.

4. Наивероятнейшее число появления события определим из неравенства (1.4.2)

$$100\cdot 0,75-0,25\leq m_o\leq 100\cdot 0,75+0,75,\ 74,75\leq m_o\leq 75,75.$$

Окончательно находим, что $m_o=75$.

Пример 4. Среди семян пшеницы содержится 0,004% семян сорняков. Какова вероятность того, что среди 50 000 семян пшеницы содержится 5 семян сорняков?

Решение. Для решения этой задачи можно было бы использовать локальную теорему Муавра-Лапласа. Однако по условию задачи $p=0,00004$. т.е. вероятность мала. Поэтому используем формулу Пуассона. Здесь

$$\lambda=np=50000\cdot 0,00004=2$$

Тогда

$$P_{50000}(5)=\frac{2^5}{5!}e^{-2}\approx 0,036.$$

Пример 5. Два шахматиста одинакового уровня мастерства проводят матч. Найти вероятность хотя бы одной победы в трех партиях.

Решение. Учитывая, что $p=0,5$ используем формулу (1.4.7):

$$P(A)=1-(0,5)^3=\frac{7}{8}.$$

Пример 6. В урне содержится 5 белых и 10 черных одинаковых шаров. Из урны наугад извлечен один шар и после определения цвета возвращен обратно в урну. Таким образом, испытание повторен 10 раз. Определить вероятность того, что в 10 испытаниях ровно 3 раза появился белый шар.

Решение. Воспользуемся формулой Бернулли, здесь $p=5/55=1/11$.

$$P_{10}(3) = C_{10}^{3}\left(\frac{1}{11}\right)^{3}\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^{7} \approx 0{,}047$$

Этот пример также можно решить с помощью формулы Пуассона
λ=np=10/11 =0,9

$$P_{10}(3) \approx \frac{0{,}9^{3}}{3!}e^{-0{,}9} \approx 0{,}051$$

Схема Бернулли является частным случаем полиномиальной схемы. Согласно полиномиальной схеме в каждом из n независимых испытаний появляется одно из попарно несовместных событий A_1, A_2,... $A_к$ с соответствующими вероятностями p_i= $P(A_i)$.

Здесь $0\le p_i \le 1$ и $\sum_{i=1}^{к} p_i = 1$.

Пусть производится n независимых испытаний. Тогда вероятность того, что в этих испытаниях событие A_1 появится ровно m_1 раз, событие A_2 –ровно m_2 раза,..., событие $A_к$ –ровно $m_к$ раз находится по полиномиальной формуле:

$$P_n(\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2,\ldots\mathrm{m}_К,) = \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_К!}P_1^{m_1}P_2^{m_2}\ldots P_К^{m_К} \tag{1.4.12}$$

где $m_1 + m_2 + \ldots + m_к = n.$

Пример 7. На производстве изделия соответствующие стандарту выпускаются с вероятностью 0,9, изделия с небольшими отклонениями от стандарта выпускается с вероятностьями 0,09 и изделия не соответствующие стандарту с вероятностью 0,01. Найти вероятность того, что среди 3-х готовых изделий содержится хотя бы одно изделие с небольшими отклонениями от стандарта и хотя бы одно изделие соответствующее стандарту.

Решение. По условию задачи среди трех изделий обязательно содержится хотя бы одно изделие, соответствующее стандарту и хотя бы одно изделие с небольшими отклонениями от стандарта. Введем обозначение А- изделие соответствующие стандарту, В-изделие с небольшими отклонениями от стандарта и С – изделие не соответствующее стандарту. Тогда возможны появления следующих событий:

A_1=ABC, A_2=AAB, A_3=ABB.

Эти события несовместные, причем вероятности появления этих событий различные.

Таким образом условия задачи указывают на необходимость использования полиномиальной формулы

$$P = P_3(1,1,1) + P_3(2,1,0) + P_3(1,2,0) =$$
$$= \frac{3!}{1!1!1!} \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}01 + \frac{3!}{2!1!} \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}09 + \frac{3!}{2!1!} \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}09^2 =$$
$$= 3(2 \cdot 0{,}00081 + 0{,}0729 + 0{,}00729) == 0{,}24543$$

Задачи

62. В n независимых испытаниях событие появляется с постоянной вероятностью.

1. При n=1500 и p=0,4 найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения относительной частоты от вероятности события будет меньше, чем 0,02.
2. При n=1500 и p=0,4 найти вероятность того, что число появления события будет находиться в следующих интервалах
   а) от 570 до 630
   б) от 600 до 660
   с) от 620 до 680
   г) от 580 до 640

3. Пусть n=1200, p=2/3 и вероятность абсолютной величины отклонения от вероятности события равна 0,985. В каком интервале находится абсолютная величина отклонения.

4. Вероятность абсолютной величины отклонения относительной частоты от вероятности (p=3/8) события равна 0,995. Сколько испытаний было проведено?

63. Вероятность выпуска стандартной детали на автомате равна 0,9. Найти вероятность того, что из 5-и наугад взятых деталей 3 детали будут стандартными.

64. В каждом из 16 независимых испытаний событие появляется с постоянной вероятностью 0,7. Найти наивероятнейшее число появления события.

65. Вероятность попадания в мишень в каждом выстреле равна 0,7. Найти вероятность того, что в 300 выстрелах будет равно 240 попаданий

66. Вероятность выпуска некачественной детали равна 0,02. Какова вероятность того, что среди 400 деталей число некачественных деталей будет от 7 до 10?

67. Вероятность того, что при приеме заказа на телефонный станции , будет допущена ошибка равна 0,009. Станция приняла 1000 заказов. Какова вероятность того, что допущена 9 ошибок?

68. Завод выпускает продукции, среди которых 60% продукции первого сорта. Приемщик принял 200 изделий. Какова вероятность того, что среди 200 изделий число изделий первого сорта будет от 120 до 150?

69. В урне содержится 1 черный, 1 красный и 1 белый шары. Из урны извлечен 1 шар и после определения цвета возвращен в урну. Таким образом, был проведен 5 испытаний. Найти вероятность того, что черный и белый шары появлялись не менее двух раз.

Указание. Использовать полиномиальную формулу.

70. Мишень состоит из внутренного круга и двух концентрических колец. По мишени был произведен 10 выстрелов. В каждом выстреле вероятности попадания в каждую область соответственно равны 1/15, ½ и 13/30. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах в внутренний круг попадет 3 пули, в первое кольцо 6 пули и во второе кольцо 1 пуля.

Указание. Использовать полиномиальную формулу.

71. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,3. Найти наивероятнейшее число выигрыша, если куплено 10 билетов.

72. В n независимых испытаниях событие появляется с постоянной вероятностью 0,5. Найти вероятность того, что в 196 испытаниях событие появится ровно 100 раз.

73. Найти вероятность того, что при 5-и бросаниях монеты «герб» появится не менее 2 раз.

74. Событие появляется с вероятностью p=0,6. Найти вероятность того, что в 300 испытаниях событие появится не более 240 раз.

75. Если известно, что вероятность всхода каждой семени равно 0,8, то чему равна вероятность того, что из 400 семян не взойдет 104 семян?

76. В урне содержится 100 белых и 80 черных шаров. Из урны извлечен 1 шар и после определения цвета возвращен в урну. Сколько нужно провести испытаний, чтобы наивероятнейшее число появления белых шаров равнялось 11.

77. При проверке установлено, что 25 % выпускаемой продукции не соответствует стандарту. Найти вероятность того, что из 8 проверенных изделий 6 изделий не соответствует стандарту.

78. Некоторое событие в 25 независимых испытаниях появляется с постоянной вероятностью равной 0,7. Найти наивероятнейшее число появления события.

79. В гараже находится 5 автомашин. Вероятность того, что в любой момент. заведется машина равна 0,8. Найти вероятность того, что в любой случайной момент будет заводиться ровно 3 машины.

80. Известно, что вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,01. Сколько деталей надо заказать, чтобы наивероятнейшее число стандартных деталей равнялось 50.

81. Вероятность появления события в 144 независимых испытаниях равна 0,8. Найти вероятность появления события ровно120 раз.

82. В семье 7 детей. Найти вероятность того, что в семье 4 мальчика и 3 девочек.

83. Вероятность того, что в любой случайный момент каждый из 6 моторов в цехе работает, равна 0,8. Найти вероятность того, что в случайный момент из 6 моторов работает ровно 4.

Глава 2. Случайные величины

При проведении испытаний результатом являлось появление некоторого события. Событие является качественной характеристикой испытания. Например, при подбрасывании монеты случайным результатом испытания является появление "герба" или "цифры".

Вместе с тем случайный результат можно охарактеризовать и количественно. В качестве количественной характеристики результата испытания можно рассматривать число появления события в данном испытании.

В рассматриваемом примере количественной характеристикой результата испытания является число появления "герба" или «цифры» при неоднократном бросании монеты.

Пример 1. Пусть производится одновременное бросание двух монет. Элементарными событиями этого испытания являются:

$$\omega_1 = ГГ, \omega_2 = ГЦ, \omega_3 = ЦГ, \omega_4 = ЦЦ .$$

Определим число появлений "герба" в этом испытании. "Герб" появится, если появится одно из элементарны событий $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Если через X обозначим число появлений "герба" в рассматриваемом испытании, то возможными значениями X являются 0,1,2, т.е. "герб" либо не появится, либо появится 1 раз, либо появится 2 раза. Таким образом, X является переменной величиной, и свои значения принимает в зависимости от результата испытания.

В курсе «Математического анализа» изучается числовая функция областью определения, которой является множество действительных чисел, а областью значений также является множество действительных чисел. Из рассмотренного примера видно, что величина X также является числовой функцией, т.к. ее значениями может быть любое действительное число. Однако областью определения этой величины X служит множество элементарных событий данного испытания. Таким образом, мы познакомились с новым видом числовой функции, значения которой зависит от элементарных событий в данном испытании. Множество элементарных событий данного испытания принято называть пространством элементарных событий. Пространство элементарных событий обозначают через букву Ω.

Определение. Случайной величиной называется функция X=X(ω), определенная на множестве элементарных событий Ω, $\omega \in \Omega$.

§ 1. Дискретные случайные величины

Если случайная величина принимает отдельные, изолированные возможные значения, то такую случайную величину называют дискретной случайной величиной.

Для того, чтобы задать дискретную случайную величину недостаточно перечислить ее возможные значения, т.к. разные случайные величины могут иметь одинаковые возможные значения, а вероятность того, что примет соответствующие возможные значения могут различаться. Поэтому дискретную случайную величину задают с помощью ряда распределения

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Данный ряд распределений также называют законом рапределения дискретной случайной величины.

На верхней строке таблицы возможные значения дискретной случайной величины, а на нижней строке их соответствующие вероятности, причем

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 .$$

Законы распределений дискретной случайной величины

1. **Биномиальное распределение**

Случайная величина X- число появления события A с постоянной вероятностью p в n независимых испытаниях. Тогда возможными значениями X являются 0, 1, 2,…n. Соответствующие вероятности возможных значений этой случайной величины находятся по формуле Бернулли, т.е.

$$P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \tag{2.1.1}$$

В этом случае говорят, что случайная величина задана биномиальным законом распределения.

2. **Распределение Пуассона**

Если в n независимых испытаниях n велико и p мала, тогда вероятности возможных значений случайной величины X- числа появления события A в независимых испытаниях, находятся по формуле Пуассона

$$P(X=к)=P_n(к)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ \lambda=np \qquad (2.1.2)$$

В этом случае говорят, что случайная величина задана законом распределения Пуассона.

Приведем другие закона распределения, основанных на схеме Бернулли.

3. Геометрическое распределение

Пусть производится n независимых испытаний по схеме Бернулли. Событие A появляется с постоянный вероятностью P(A)=p. Тогда вероятность того, что подряд (k-1) раз появится событие $\overline{A}$ и в k- й раз событие A находится по формуле

$$Г(\kappa,p)=(1-p)^{к-1}p \qquad (2.1.3)$$

Случайная величина вероятности возможных значений, которой находится по формуле (2.1.3) имеет геометрическое распределение.

4. Распределение Паскаля

Пусть в независимых испытаниях событие $\overline{A}$ появится подряд (k-1) раз, а затем событие A подряд m раз. Тогда вероятность того,что в независимых испытаниях событие $\overline{A}$ появится подряд (k-1) раз, а затем событие A подряд m раз находится по по формуле

$$П(\kappa,p,m)=C_{\kappa+m-2}^{\kappa-1}(1-p)^{\kappa-1}p^m \qquad (2.1.4)$$

Случайная величина вероятности возможных значений, которой находится по формуле (2.1.4) имеет распределение Паскаля.

При m=1 получим геометрическое распределение.

5. Гипергеометрическое распределение

Если возможными значениями случайной величины являются 0,1, 2, … k, а их соответствующие вероятности находятся по формуле

$$p = C_n^к C_{N-n}^{m-к} \,/\, C_N^m \qquad (2.1.5)$$

то говорят, что случайная величина задана гипергеометрическим распределением.

Пример 1 . В ящике содержится 10 шаров, из которых 7 черные и 3 синие. Из ящика извлечено наугад 5 шаров. Какова вероятность того, что из 5-ти шаров 3 шара имеет черный цвет?

Решение. Такого содержания задачи можно решать с помощью теорем сложения и умножения вероятностей. Тогда $P = C_7^3 \cdot C_3^2 \,/\, C_{10}^5$.

Теперь рассмотрим более общий вид такого содержания задач.

Пример 2. В ящике содержится N шаров, из которых n шаров черных и (N-n) - белых. Из ящика извлечено наугад m шаров. Найти вероятность того, что среди извлеченных m шаров окажутся k черных.

Решение. Пусть X- число шаров извлеченных из ящика. Возможными значениями этой случайной величины являются: 0,1, 2, .. m. Извлечение m шаров из N можно осуществить C_N^m способами, а из n черных шаров k черных шаров можно извлечь C_n^k способами, тогда из N-n белых шаров m-k белых шар можно извлечь C_{N-n}^{m-k} способами. Таким образом, число способов выбора m шаров, из которых k белых по правилу умножения комбинаторики можно осуществить

$$C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}$$ □ □ □

способами.

Тогда искомая вероятность по классическому определению вероятности находится по формуле

$$P = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$$

Если применить эту формулу к предыдущей задаче, то N=10, n= 7, N-n =3 и m=5, k=3:

$$\cdot\, p = \frac{C_7^3 \cdot C_3^2}{C_{10}^5}$$

Таким образом убедились, что рассматриваемая случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение.

1.2. Числовые характеристики дискретной случайной величины

Случайная величина полностью характеризуется ее законом распределения. Однако во многих случаях закон распределения случайной величины бывает неизвестным. В этих случаях необходимо найти некоторые характеристики, в определенной мере описывающие данную случайную величину. К таким характеристикам относятся , так называемые числовые характеристики. Наиболее важное место среди числовых характеристик занимает числовая характеристика , называемая математическим ожиданием.

Определение. Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их соответствующие вероятности и обозначают M(X):

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \tag{2.1.6}$$

Вероятностный смысл математического ожидания заключается в том, что математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому значению возможных значений случайной величины.

Определение. Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания называется **дисперсией случайной величины:**

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(x_i))^2 \cdot p_i \tag{2.1.7}$$

Дисперсия характеризует степень разбросанности (рассеянности) возможных значений случайной величины около своего математического ожидания.

Для нахождения дисперции часто бывает удобно пользоваться следующей формулой

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i p_i)^2 \tag{2.1.8}$$

Среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины равно

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$$

Математическое ожидание случайной величины k- й степени называется **начальным моментом k-го порядка**:

$$\upsilon_k(X) = M(X^k) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i \tag{2.1.9}$$

Математическое ожидание k-й степени отклонения случайной величины от своего математического ожидания называется **центральным моментом k –го порядка:**

$$\mu_k(X) = M[X - M(X)]^k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(x_i))^k \cdot p_i \tag{2.1.10}$$

Из формулы (2.1.9) и (2.1.10) имеем:

$$M(X) = \upsilon_1(X) \quad , \qquad D(X) = \mu_2(X)$$

Вычисление центральных моментов по формуле (2.1.10) достаточно сложно, поэтому ниже приводится формулы облегчающие нахождение центральных моментов второго, третьего и четвертого порядков:

$$\mu_2 = \upsilon_2 - \vartheta_1^2, \quad \mu_3 = \upsilon_3 - 3\upsilon_1\upsilon_2 + 2\upsilon_1^3,$$
$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4 \tag{2.1.11}$$

Если для дискретной случайной величины выполняется равенство

$$P(X < M_D) = P(X > M_D)$$

то M_D **называется медианой** дискретной случайной величины

Если n=2k, то $M_D = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$, если же n=2к+1 , то $M_D = x_{k+1}$.

Модой M_0 дискретной случайной величины называется ее наиболее вероятное возможное значение.

Для сравнения закона распределения дискретной случайной величины с нормальным распределением (этот закон рассматривается позже) рассматриваются еще две числовые характеристики, называемые эксцессом $E_{k,}$ асимметрией $\mathbf{A_s}$:

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3, \quad A_s = \frac{\mu_2}{\sigma^3}$$

Замечание. Для нормального закона распределения $E_k = 0$, $A_s = 0$.

Приведем некоторые свойства математического ожидания и дисперсии:

1. M(c) = c ,
2. M(cx) = cM(x)

3. $M(x \pm y) = M(x) \pm M(y)$
4. $M(xy) = M(x) \cdot M(y)$, для независимых случайных величин X и У.
1. $D(x) \geq 0$,
2. $D(c) = 0$
3. $D(cx) = c^2 D(x)$
4. $D(x \pm y) = D(x) + D(y)$, для независимых случайных величин.

Ниже даны числовые характеристики некоторых законов распределений

1. Биномиальный закон распределения

$M(x) = np$, $D(x) = npq$, $A_S = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$, $E_k = \frac{1-6pq}{\sqrt{npq}}$

2. Распределение Пуассона

$M(x) = \lambda$, $D(x) = \lambda$, $A_S = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, $E_k = \frac{1}{\lambda}$

3. Геометрическое распределение

$M(x) = \frac{1}{p}$, $D(x) = \frac{1-p}{p^2}$

(2.1.12)

4. Распределение Паскаля

$M(x) = \frac{m(1-p)}{p}$, $D(x) = \frac{m(1-p)}{p^2}$

5. Геометрическое распределение

$$M(x) = mp, \qquad D(x) = \frac{N-m}{N-1} mpq$$

Здесь если $m < 0{,}1N$, то $D(x) = mpq$, т.е. приближенно равно дисперции биномиального распределения. Поэтому при $m < 0{,}1N$ имеем:

$$\frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m} \approx C_m^k p^k q^{m-k}$$

Пример 3. Дискретная случайная величина задана законом распределения

X	-1	0	1	2
P	0,2	0,4	0,2	0,2

Найти числовые характеристики.

Решение.

$$M(X) = -1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4$$

Дисперсию находим с помощью формулы (2.1.8). Для этого предварительно напишем закон распределения случайной величины X^2

X^2	1	0	1	4
p	0,2	0,4	0,2	0,2

Тогда

$D(X) = (1\cdot 0{,}2 + 0\cdot 0{,}4 + 1\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}2) - (0{,}4)^2 = 1{,}04,$

M_0=0,т.к. возможное значение,имеющее наибольшую вероятность равно 0. При нахождении медианы следует учесть, что n=4, поэтому $M_D = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$

Далее использую формулы (2.1.19) – (2.1.11) находим

$\nu_1 = M(X) = 0{,}4$ $\qquad \mu_2 = D(X) = 1{,}04$

$\nu_2 = 1{,}2$ $\qquad \mu_3 = 0{,}288$

$\nu_3 = 1{,}6$ $\qquad \mu_4 = 2{,}1152$

$\nu_4 = 3{,}6$ $\qquad A_S = 0{,}274 \qquad E_k = -1{,}023$

Здесь $A_s > 0$, поэтому многоугольник рапределения по сравнению с графиком дифференциальной функции нормального распределения имеет «скос» с правой стороны, $E_k < 0$ поэтому кривая более «пологая» по сравнению с Гауссова кривой.

Пусть X_1 , X_2 , ..., X_n имеет одинаковые распределения и

$M(X_1) = M(X_2) = \ldots = M(X_n) = a \qquad , \qquad D(X_1) = D(X_2) = \ldots = D(X_n) = \sigma^2$

Найдем среднюю арифметическую этих случайных величин

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Тогда

$$M(\bar{x}) = M\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(M(x_1) + \ldots + M(x_n)\right) = a$$

т.е. $M(\bar{x}) = a$.

$$D(\bar{x}) = D\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left(D(x_1) + \ldots + D(x_n)\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

т.е.

$$D(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}. \qquad (2.1.13)$$

Таким образом математическое ожидание среднего арифметического одинаково распределенных случайных величин равно математическому ожиданию одной случайной величины, в то время как дисперсия среднего арифметического одинаково распределенных случайных величин значительно меньше ,чем дисперсия одной случайной величины (см. формулу (2.1.13)).

В практической жизни в повторных измерениях используется это свойство дисперсии среднего арифметического одинаково распределенных случайных величин. Поэтому в качестве истинного значения измеряемого параметра надо взять среднюю арифметическую величину полученных данных в повторных измерениях.

Пример 4. Монета брошена три раза. X- случайная величина – число появления «герба» при трех бросаниях монеты.

1. Написать закон распределения;
2. Построить многоугольник распределения;
3. Найти M(x) , D(x) и σ(x).

Решение. Возможными значениями этой случайной величины являются: 0, 1, 2, 3, т.к. при трех бросаниях монеты «герб» может либо не появится, либо появится 1 раз, 2 раза или три раза. В каждом бросании вероятность появления «герба» постоянна и равна 0,5. Поэтому эта случайная величина может быть задана биномиальным законом распределения

Напишем этот закон распределения.

X	0	1	2	3
P	$C_3^0 p^0 q^3$	$C_3^1 p^1 q^2$	$C_3^2 p^2 q$	$C_3^3 p^3 q^0$

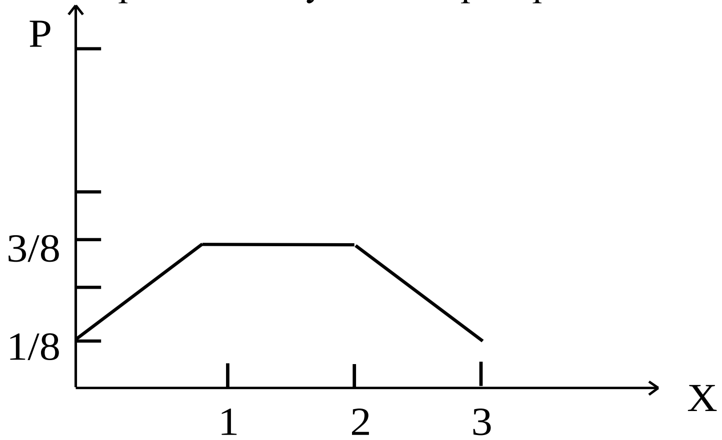
или

X	0	1	2	3
P	1/8	3/8	3/8	1/8

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

2. Построим многоугольник распределения



3. Математическое ожидание находим по (2.1.6)

$$M(X) = 0\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{3}{8} + 2\cdot\frac{3}{8} + 3\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

4. Для вычисления дисперсии вначале напишем закон распределения случайной величины x^2:

X^2	0	1	4	9
p	1/8	3/8	3/8	1/8

Отсюда имеем

$$M(X^2) = 0\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{3}{8} + 4\cdot\frac{3}{8} + 9\cdot\frac{1}{8} = 3$$

$$D(X) = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \qquad , \qquad \sigma(X) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Также заметим, зная, что рассматриваемая случайная величина имеет биномиальный закон распределения согласно (2.1.12) непосредственно можем найти

$$M(X) = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \qquad D(X) = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Пример 5. Оказалось что, 10% готовой продукции не соответствует стандарту. Наугад выбрано 4 изделий. Написать закон распределения случайной величины X- число появлений нестандартных изделий среди выбранных 4-х изделий.

Решение. Вероятность появления нестандартной детали 0,1, т.к. 10% процентов всей продукции не соответствует стандарту. Эта случайная величина имеет биномиальный закон распределения. Здесь n=4, p=0.1, q=0.9.

Тогда

X	0	1	2	3
P	$C_3^0 p^0 q^3$	$C_3^1 p^1 q^2$	$C_3^2 p^2 q$	$C_3^3 p^3 q^0$

или

X	0	1	2	3	4
P	0,6581	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

Найдем числовые характеристики биномиального закона распределения по (2.1.12):

M(x)=4 .0,1 =0,4, D(x)=4·0,1 · 0,9 = 0,09.

Пример 6. Дискретная случайная величина задана рядом распределения

X	2	4	5	6	8
P	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3

Найти M(X) , D(X) и σ(X).

Решение. M(x)=5,5. Для нахождения дисперсии предварительно находим ряд распределения для X^2 :

X^2	4	16	25	36	64
P	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3

Тогда $M(X^2)$ =33,9 , $D(X)$ =3,65 , $\sigma(X)$ = 1,91.

Пример 7. В урне содержится 5 белых и 50 черных шаров. Из урны извлечен один шар и после определения цвета возвращен в урну. Испытание повторим 10 раз. X- число появления белого шара в 10-ти испытаниях. Написать закон распределения этой случайной величины.

Решение. В этом испытании вероятность появления белого шара p=5/55=1/11. Число испытаний n=10. В принципе закон распределения этой случайной величины можно задать с помощью биномиального закона распределения. Однако это привело бы к громоздким вычислениям. Поэтому закон распределения этой случайной величины целесообразно задать по закону Пуассона. Таким образом, возможными значениями случайной величины являются: 0,1, 2, …, 10, а их соответствующие вероятности определяют по формуле Пуассона

$$P_{10}(k) = \frac{1}{k!}\left(\frac{10}{11}\right)^k e^{-\frac{10}{11}}, \quad к= 0, 1, 2, ... , 10. \qquad \lambda = 10 \cdot \frac{1}{11} = \frac{10}{11}.$$

В частном случае при k=3 имеем:

По биномиальному закону

$$P_{10}(3) \approx C_{10}^{3}\left(\frac{1}{11}\right)^3\left(\frac{10}{11}\right)^7 \approx 0{,}047$$

По распределению Пуассона

$$P_{10}(3) \approx \frac{1}{3!}\left(\frac{10}{11}\right)^3 e^{-\frac{10}{11}} \approx 0{,}051 .$$

Пример 8. Два стрелка независимо друг от друга произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания для первого стрелка равна P_1 , а для второго стрелка P_2. Обозначим через X_1- число попаданий первого стрелка, , X_2- число попаданий второго стрелка, Z $=X_1 - X_2$. Найти M(z), D(z).

Решение. Вначале напишем законы распределений случайных величин X_1 и X_2:

x_1	0	1
p	q_1	p_1

x_2	0	1
p	q_2	p_2

Очевидно, что

$$M(\chi_1)=\rho_1,\quad M(\chi_2)=\rho_2,\quad M(\chi_1^2)=\rho_1,\quad M(\chi_2^2)=\rho_2,\quad M(x_1-x_2)=P_1-P_2$$

Поэтому $D(\chi_1)=\rho_1 q_1,\quad D(\chi_2)=\rho_2 q_2$.
Так как случайные величины независимые, то
$D(\chi_1+\chi_2)=D(\chi_1)+D(\chi_2)=\rho_1\cdot q_1+\rho_2\cdot q_2$.

Пример 9. Заданы две независимые случайные величины

x	0	3	4
p	0,2	0,6	0,2

y	2	3
p	0,3	0,7

Найти M(x+y) ,M(x□ y) иD(x+y).

Решение. Вначале из таблиц находим M(x) = 2,6 , M(y) = 2,7 , D(x) = 1,84 , D(y) = 0,21. Затем используя независимость X и У находим:

M(x+y) = 2,6+2,7 = 5,3 D(x+y) = 1,84+0,21 = 2,05
M(x·y) = 2,6·2,7 = 7,02

Пример 10. Найти вероятность выигрыша по спортлото по определенным видам спорта.
Решение. Пусть X- число видов спорта выпавших на выигрыш. Эта случайная величина распределена по гипергеометрическому распределению:
Здесь N = 49 , m = 6 , n = 6 , k = 1, 2, 3, 4, 5, 6. Согласно условию задачи выигрыш дается для к = 3, 4, 5, 6 . Поэтому искомую вероятность найдем для к = 3, 4, 5, 6 .

$$k=3\ ,\qquad P=\frac{C_6^3\cdot C_{43}^3}{C_{49}^6}\ ,\qquad k=4,\qquad P=\frac{C_6^4\cdot C_{43}^2}{C_{49}^6}$$

$$k=5,\qquad P=\frac{C_6^5\cdot C_{43}^1}{C_{49}^6}\ ,\qquad k=6,\qquad P=\frac{C_6^6\cdot C_{43}^0}{C_{49}^6}$$

Если к = 5 и к = 6 , то соответствующие вероятности будут равны

$$p=1{,}84\cdot 10^{-5}\quad \text{и}\quad p=7{,}15\cdot 10^{-8}$$

Пример 11. Из 12 изделий 8 изделий оказалось первого сорта. Наугад выбрано 5 изделий. Написать закон распределения случайной величины X- числа изделий первого сорта среди 5-ти выбранных изделий.

Решение. По условию задачи N=12 , m=5 , n=8. Возможными значениями случайной величины X являются: 1, 2, 3, 4, 5.Обратите внимание на то, что возможные значения случайной величины начинается с 1. Потому что из условия задачи следует, что среди 5 изделий обязательно будет хотя бы одно изделие первого сорта.

Таким образом:
$$P(x=k)=\frac{C_8^k\cdot C_4^{5-k}}{C_{12}^5}$$

После необходимых вычислений получим:

X	1	2	3	4	5
P	0,0101	0,1414	0,4242	0,3535	0,0708

Задачи

84. Производится 2 бросания одновременно двух игральных костей. Случайная величина X- число появления на двух игральных костях четных цифр. Написать биномиальный закон распределения случайной величины X. Найти M(x), D(x) и σ(x).
Указание. Вероятность появления четной цифры на каждой кости равна
P_1 = P_2 =3/6 = 1/2 . Вероятность появления на двух костях одновременно
четной цифры равна $P=P_1P_2 = 0,25$.
85. Производится одно испытание. В результате испытания либо появится событие A с вероятностью p, либо событие - $\bar{A}$. Случайная величина X- число появления события A в одном испытании. Написать закон распределения этой случайной величины.
86. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, а для второго 0,8. Случайная величина X – число попаданий в мишень. Написать закон распределения случайной величины X.
87. Событие A с постоянной вероятностью P = 0,4 может появится в независимых испытаниях. Проведено 3 испытаний. X – число появления события в этих трех испытаниях. Напишите закон распределения X.
88. Монета бросается до тех пор пока не появится «герб». Написать закон распределения случайной величины X – числа испытаний.
Указание: Необходимо использовать формулу 2.1.3.
89.Монета бросается n раз. X – число появлений «герба». Написать закон распределения X.

90. Бросается две игральные кости. X – сумма цифр, выпавших на гранях игральных костей. Написать закон распределения X.
91. Проводится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A появится с постоянной вероятностью p. X- число появления события A. Напишите закон распределения случайной величины X и найти M(x) , D(x).
92. В урне содержится 3 черных и 2 белых шаров. Из урны наугад извлекается шар до тех пор, пока не появится шар белого цвета. После определения цвета шар возвращается в урну. Написать закон распределения случайной величины X- число извлеченных шаров.
Указание: Необходимо использовать формулу 2.1.3.
93. Случайная величина X- относительная частота появления события A с постоянной вероятностью p в n независимых испытаниях. Написать закон распределения X.
94. Вероятность попадания в мишень равна 2/3. Производится 3 выстрела . X –число попаданий в мишень. Написать ряд распределений X.
95. Вероятность попадания в мишень равна p. Случайная величина X-разность между числом попаданий и числом промахов. Производится два независимых выстрелов. Написать закон распределения X.
96. Производится три независимых бросаний игральной кости. Написать закон распределения числа появлений цифры шесть.
97. Случайная величина X умножена на число a. Найти математическое ожидание случайной величины a X.
98. В электросеть подключены 4 электроламп. Вероятность того, что в течение месяца лампа перегорит равна 0,2. X-число перегоревших ламп в течение месяца. Написать закон распределения X.
99. Случайная величина задана законом распределения

X	3	7	10	11
P	0,4	0,1	0,2	0,3

Найти M(X), D(X) и $\sigma(X)$.

100. Случайная величина задана рядом распределения

X	- 2	4	5	6
P	0,3	0,1	0,2	0,4

Найти M(X), D(X), $\nu_2(X)$, $\mu_3(X)$.
101. Случайная величина задана законом распределения

X	- 2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Найти начальные моменты $\nu_1(X)$, $\nu_2(X)$, $\nu_3(X)$ и центральный момент $\mu_3(X)$.

102. Две независимые случайные величины заданы законами распределений

X	1	3
P	0,4	0,6

У	2	4
P	0,2	0,8

Найти математическое ожидание случайной величины Z=X+У.

103. Две независимые случайные величины заданы законами распределений

X	1	4
P	0,6	0,4

У	0,5	2
P	0,8	0,2

Найти дисперсию случайной величины Z= X+У.

104. Случайная величина задана законом распределения

X	1	2	3	4
P	0,2	0,3	0,4	0,1

Найти центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

105. Независимые случайные величины X и У заданы законами распределений

X	4	6
P	0,4	0,6

У	1	2	4
P	0,3	0,4	0,3

Найти математическое ожидание случайной величины Z=XУ.

106. Независимые случайные величины X и У заданы законами распределений

X	1	2
P	0,2	0,8

У	0,5	1
P	0,3	0,7

Найти M(X·У).

107. Радиоаппаратура состоит из независимо работающих 1000 элементов. Вероятность того, что в течение года любой элемент выйдет из строя равна 0,001. Найти вероятность того, что в течение года выйдет из строя:

1. ровно два элемента

2. Хотя бы два элемента

Указание. Здесь n=1000 и p= 0,001, поэтому целесообразно использовать закон распределения Пуассона.

108. Вероятность того, что в коммутатор поступить заказ равна 0,01. На телефонной станции зарегистрировано 300 абонентов. Найти вероятность того, что в течение часа к коммутатору поступить ровно 4 заказа.

109. Вероятность того, что изделие не пройдет контроль равно 0,001. Найти вероятность того, что из 5000 изделий поступивших на контроль, контроль не пройдет не более одного изделия.

110. Вероятность изготовление нестандартной детали равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 изделий будет не более 3- х нестандартных изделий.

111. В складе имеется 25 изделий. Среди них 5 нестандартных. Найти вероятность того, что среди 8-ми наугад выбранных изделий будет ровно 3 нестандартных.

§ 2. Непрерывные случайные величины

Непрерывной называют случайную величину, возможные значения которой покрывает некоторый конечный или бесконечный промежуток. Например, время пребывания поезда, дальность полета снаряда и.т.д. являются примерами случайной величины.

Закон распределения непрерывной случайной величины задается различными способами. Ниже рассмотрим вероятность того, что случайная величина примет значение меньшее заданного числа x.

Функцией распределения называют функцию F(x) , определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее заданного числа x, т.е.

$$F(x)=P(X<x)$$

Отметим некоторые свойства функции распределения:

$$\begin{aligned} &1.\ P(a \le X \le b)=F(b)-F(a) \\ &2.\ F(x_2) \ge F(x_1),\ x_2 \ge x_1 \qquad (2.2.1) \\ &3.\ \lim_{x\to+\infty} F(x)=1, \quad \lim_{x\to-\infty} F(x)=0 \end{aligned}$$

Для дискретной случайной величины функция распределения определяется в следующем виде

$$F(x)=P(X \prec x)=\sum_{x_i \prec x} p_i \qquad (2.2.2)$$

где x_1, x_2 ... ,x_n возможные значения дискретной случайной величины, а $p_1,p_2,...,p_n$ соответствующие вероятности этих значений. Сумма (2.2.2) означает сумму всех вероятностей p_i возможных значений случайной величины, удовлетворяющих неравенству $x_i < x$.

Функцию распределения также называют интегральной функцией распределения.

Дифференциальной функцией f(x) распределения случайной величины называют первую производную от интегральной функции, т.е.

$$f(x)=F'(x) \tag{2.2.3}$$

Дифференциальную функцию распределения также называют плотностью распределения. Основные свойства дифференциальной функции распределения:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
3. $P(\alpha \leq x \leq \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$
4. $F(x)= \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

Пример1. Пусть случайная величина задана законом распределения

X	0	1	3	3,5
P	0,1	0,4	0,2	0,3

Найти функцию распределения.

Решение. Воспользуемся формулой (2.2.2). Из таблицы видно, что при x<0 случайная величина не имеет возможных значений, следовательно, вероятность того, что случайная величина примет значение меньшее 0 равна нулю, поэтому

$F(x) = P(x<0) = 0$

Если x<1, то левее 1 имеется одно возможное значение равное 0. Это возможное значение случайная величина принимает с вероятностью равной 0,1. Значит,

F(x)=P(x<1)=P(x=0)=0,1

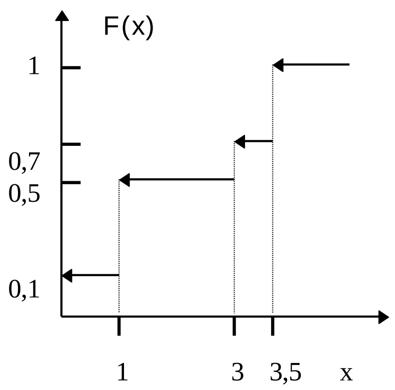
Рассуждая аналогичным образом, получим

F(x)=P(x<3)=P(x=0)+P(x=1)=0,1+0,4=0,5
F(x)=P(x<3,5)=P(x=0)+P(x=1)+P(x=3)=0,7
F(x)=P(x>3,5)=P(x=0)+P(x=1)+P(x=3)+P(x=3,5)=1

Таким образом, окончательно находим функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0{,}1, & 0\le x<1\\ 0{,}5, & 1\le x<3\\ 0{,}7, & 3\le x<3{,}5\\ 1, & x\ge 3{,}5\end{cases}$$

Построим график функции распределения



Пример 2. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-2\\ 0{,}1, & -2\le x\le -1\\ 0{,}4, & -1\le x\le 1\\ 0{,}9, & 1\le x<2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

Написать ряд распределения случайной величины и найти M(X), D(X) и $\sigma(X)$.

Решение. Из формулы интегральной функции видно, что F(x)=0 при x<-2. Это значит, что левее x<-2 случайная величина не имеет возможных значений. При x<-1 имеем F(x)=0,1, т.е. при x<-1случайная величина имеет одно возможное значение x= -2, причем P(x=-2)=0,1. При x<1 имеем F(x)=0,4. Так как случайная величина левее x=1 имеет два возможных значений -2 и 1, то

F(x)=P(x=-2)+P(x=-1)=0,4

Здесь P(x=-2)=0,1, следовательно, P(x=-1)=0,3.

Аналогично рассуждая, окончательно получим

X	-2	-1	1	2
P	0,1	0,3	0,5	0,1

M(X)=0,2, D(X)=1,56, $\sigma(X)$=1,25.

Задачи

112. По условиям задач №84 и № 90 написать интегральные функции случайных величин.

113. Случайная величина задана интегральной функций.

а)

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-4 \\ 0{,}05, & -4\le x<-3 \\ 0{,}15, & -3\le x<-2 \\ 0{,}25, & -2\le x\le -1 \\ 0{,}35, & -1\le x<0 \\ 0{,}45, & 0\le x<1 \\ 0{,}65, & 1\le x<2 \\ 0{,}85, & 2\le x<3 \\ 1, & x>3 \end{cases}$$

б)

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 1 \\ 0{,}4 & 1<x\le 2 \\ 0{,}9 & 2<x\le 3 \\ 1 & x>3 \end{cases}$$

Написать ряд распределения.

114. Написать ряд распределений случайной величины X – числа появлений «герба» при 2-х бросаниях монеты. Найти интегральную функцию.

1. Числовые характеристики непрерывной случайной функции

1.Математическое ожидание

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \qquad (2.2.4)$$

2. Дисперсия

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[x-M(X)\right]^2 f(x)dx, \tag{2.2.5}$$

или

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-\left[M(X)\right]^2 \tag{2.2.6}$$

3. Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)} \tag{2.2.7}$$

4. Начальный момент k-го порядка

$$\nu_K(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^K f(x)dx \tag{2.2.8}$$

5. Центральный момент k-го порядка

$$\mu_K(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[x-M(X)\right]^K f(x)dx \tag{2.2.9}$$

Наряду с центральными и начальными моментами разных порядков вводятся еще и другие числовые характеристики несущие определенные информации о возможных значениях случайной величины. К таким числовым характеристикам относятся Мода, Медиана, Асимметрия и Экцесс.

Модой M_0 непрерывной случайной величины называется такое ее значение при котором плотность распределения имеет максимум, т.е. $f_{\max}=f(M_0)$

Медианой M_D непрерывной случайной величины называется такое ее значение, относительно которого равновероятно получение большего или меньшего значения случайной величины, т.е.

$P(x< M_D)=P(x> M_D)$

Экцессом $E_к$ называется величина характеризующая степень крутости кривой плотности распределения по сравнению с кривой плотности распределения нормального распределения(нормальное распределение рассматривается позже):

$$E_к=\frac{\mu_4}{\sigma_4}-3$$

Для нормального распределения $E_к=0$.

Если $E_к > 0$, то кривая островершинна по сравнению с графиком дифференциальной функции (кривая Гаусса) нормального распределения, для пологих же $E_к < 0$.
Определение. Число характеризующие отклонение случайной величины от симметрии относительно своего математического ожидания называется асимметрией случайной величины

$$As=\mu_3/\sigma^3 \qquad (2.2.10)$$

Если распределение случайной величины симметрично относительно математического ожидания, то As=0. Если As>0, то график дифференциальной функции будет иметь «скос» с правой стороны, если же As<0, то – с левой стороны.

Пример 3. Случайная величина задана дифференциальной функцией

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}\sin x, & 0\le x\le \pi\\ 0, & x>\pi\end{cases}$$

Найти Mo, M_D, As, Ek.

Решение. Для того, чтобы найти M_0 исследуем функцию f(x) на максимум. Находим

$f'(x)=\frac{1}{2}\cos x$, $f''(x)=-\frac{1}{2}\sin x$.

Теперь приравняем нулю первую производную

$f'(x)=0$, $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

Среди решений этого уравнения в заданную область определения f(x) входит только $x=\frac{\pi}{2}$.

Вычислим $f''(\frac{\pi}{2})=-0,5<0$. Отсюда следует, что $x=\frac{\pi}{2}$ является точкой максимума. Следовательно, равенство в одну строку $M_0=\frac{\pi}{2}$.

Из определения медианы имеем

$$P(0<X<M_D)=P(M_D<x<\pi)$$

Тогда

$$P(0<X<M_D)=\int_0^{M_D}\frac{1}{2}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}(\cos M_D-\cos 0)=-\frac{1}{2}\cos M_D+\frac{1}{2}$$

$$P(M_D < x < \pi) = \int_{M_D}^{\pi} \frac{1}{2}\sin x dx = -\frac{1}{2}(\cos\pi - \cos M_D) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos M_D$$

Отсюда

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos M_D = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos M_D, \qquad M_D = \frac{\pi}{2}$$

Теперь для нахождения As и Ek вначале вычислим

$$\nu_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \nu_2 = \frac{\pi^2 - 4}{2}, \quad \nu_3 = \frac{\pi^3}{3} - 3\pi, \quad \nu_4 = \frac{\pi^4}{2} - 6\pi^2 + 24$$

$$\mu_2 = \frac{\pi^2 - 8}{4}, \quad \mu_3 = 0, \quad \mu_4 = \frac{\pi^4 + 384 - 48\pi^2}{16}$$

Тогда As=0. Это свидетельствует, что график функции f(x) симметричен относительно своего математического ожидания M(x).

Пример 4. Случайная величина задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{2x}{9}, & 0 < x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Найти интегральную функцию распределения.

Решение. Используем свойство 4 дифференциальной функции распределения:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Так как f(x)=0 при $x \le 0$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot t = 0$$

Далее f(x)=$\frac{2x}{9}$ при $0<x\le 3$. Поэтому

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{-\infty}^{x} \frac{2x}{9}dx = \frac{x^2}{9}$$

Наконец f(x)=0 при x>3, следовательно

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{-\infty}^{3}\frac{2x}{9}dx+\int_{3}^{x} 0dx=1$$

Окончательно имеем

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{9}, & 0<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$$

Пример 5. Случайная величина задана интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x}{4}, & 0<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$$

Найти:
1. Дифференциальную функцию распределения
2. M(x), D(x)
3. Вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала [0,5;1]

Решение.

1. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1/4, & 0<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$

2. $M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\frac{1}{4}\int_{0}^{4} xdx+\int_{4}^{+\infty} 0dx=2$

$D(x)=\int_{0}^{4} x^2 f(x)dx-[M(x)]^2=\frac{4}{3}$

3. $P\left(\frac{1}{2}<X<1\right)=F(1)-F(1/2)=\frac{1}{8}$

Пример 6 . Задана случайная величина

$$f(x)=\begin{cases}\alpha\sin x, & x\in[0,\pi/2]\\ 0, & x\overline{\in}[0,\pi/2]\end{cases}$$

Найти: a, F(x), M(x), D(x), P(0<x<π/4).

Решение. Для нахождения коэффициента а воспользуемся вторым свойством дифференциальной функции

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Тогда

$$1 = \int_{0}^{n/2} \alpha \sin x dx = -\alpha \cos x \Big|_{0}^{\pi/2} = \alpha$$

Отсюда получим а=1. Теперь найдем F(x):

при x<0 имеем $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ при $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} \sin x dx = 1 - \cos x,$

$x \ge \frac{\pi}{2}$ при $F(x) = 1,$

Окончательно получим

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - \cos x, & 0 < x \le \pi/2 \\ 1, & x > \pi/2 \end{cases}$$

Математическое ожидание находим по формуле

$$M(x) = \int_{-\infty}^{-\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\pi/2} x \sin x dx = (-x \cos x + \sin x)_{0}^{\pi/2} = 1$$

Дисперсия:

$$D(x) = \int_{-\infty}^{-\infty} x^2 f(x)dx - [M(x)]^2 = \int_{0}^{\pi/2} x^2 \sin x dx - 1 =$$

$$= [\text{-x2cosx} + \text{2xsinx} + \text{2cosx}] \Big|_{0}^{\pi/2} - 1 = \pi - 3$$

и наконец ,

$$P(0 < X < \frac{\pi}{4}) = \int_{0}^{\pi/4} f(x)dx = \int_{0}^{\pi/4} \sin x dx = -\cos x|_{0}^{\pi/4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2};$$

$$P(0 < X < \frac{\pi}{4}) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

Последнюю вероятность также можно найти с помощью интегральной функции

$$P\left(0 < X < \frac{\pi}{4}\right) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right) - (1 - \cos 0) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

Пример 7. Задана случайная величина

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ axe^{-kx}, & 0 < x < \infty, k > 0 \end{cases}$$

Найти:

1.Коэффициент *a*;

2.функцию распределения F(x);

3. Вероятность попадания случайной величины в промежуток [0; 1/к]

Решение: 1. Согласно свойству дифференциальной функции имеем:

$$\int_0^\infty f(x)dx = 1$$

или

$$1 = \alpha\int_0^\infty xe^{-kx}dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ e^{-kx}dx = dv & v = -\frac{1}{k}e^{-kx} \end{matrix} \right| = \alpha\left\{ -\frac{x}{k}e^{-kx}\Big|_0^\infty + \frac{1}{k}\int_0^\infty e^{-kx}dx \right\} = \frac{\alpha}{k^2}$$

т.е. $\frac{a}{\kappa^2} = 1, \quad a = \kappa^2$

Тогда

f(x)=$\kappa^2 x e^{-\kappa x}$, x>0

2. Согласно четвертому свойству интегральной функции распределения имеем:

$$F(x) = k^2\int_0^x xe^{-kx}dx = k^2\left[-\frac{x}{k} - \frac{1}{k^2}\right]e^{-kx}\Big|_0^x = 1 - (kx + 1)e^{-kx}, \qquad x > 0$$

3. $P\left(0 < x < \frac{1}{k}\right) = F\left(\frac{1}{k}\right) - F(0) = 1 - 2e^{-1}$

Задачи

115. Случайная величина X на всей числовой оси задана плотностью распределения $f(x) = \dfrac{2C}{1+x^2}$. Найти постоянную величину С.

116. Случайная величина X на всей числовой оси задана функцией распределения $F(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi} arctgx$. Найти вероятность попадания случайной величины в интервал [0;1].

117. Случайная величина задана дифференциальной функцией

$$а)\, f(x) = \begin{cases} 0{,}5, & x\overline{\in}[0;2] \\ 0, & x\overline{\in}[0;2] \end{cases} \qquad б)\, f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

Найти M(x), D(x) .

118. Случайная величина задана дифференциальной функцией.

$$а)\, f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \dfrac{c}{x^2}, & x > 1 \end{cases}$$

$$б)\, f(x) = \begin{cases} 0 & x \le \pi/2 \\ 3\sin 3x & \pi/2 < x \le \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

Найти С и интегральную функцию распределения.

119. Случайная величина задана дифференциальной функцией распределения

$$а)\, f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

$$б)\, f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}, & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

Найти интегральную функцию распределения и числовые характеристики.

120. Случайная величина задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \dfrac{A}{x^2}, & x > 1 \end{cases}$$

Найти:

1. F(x)- интегральную функцию распределения
2 Вероятность попадания случайной величины в интервал [2;4]
3 Найти вероятность того, что случайная величина в четырех независимых испытаниях примет 4 раза значение из интервала [1;2].

121. Случайная величина задана плотностью распределения

а) $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{2a-x}{2a^2}, & 0<x\le 2a\\ 0, & x>2a\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} & -a<x\le a\\ 0 & x>a\end{cases}$

Найти интегральную функцию распределения

122. Случайная величина задана интегральной функцией распределения

а) $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{2a-x}{2a^2}, & 0<x\le 2a\\ 0, & x>2a\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} & -a<x\le a\\ 0 & x>a\end{cases}$

Найти плотность распределения, M(x) и D(x).

123. Случайная величина задана интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{\pi}\left(x-\dfrac{1}{2}\sin 2x\right), & 0\le x\le \pi\\ 1, & x\ge \pi\end{cases}$$

Найти плотность распределения.

124. Случайная величина задана интегральной функцией распределения

а) $F(x)=\begin{cases}0, x<-1\\ \dfrac{1}{3}(x+1), -1\le x\le 2\\ 1, x>2\end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1-\lambda e^{-\lambda x} & x>0\end{cases}$

Найти плотность распределения и вероятность попадания в интервал [0,1].

125. Случайная величина задана плотностью распределения

$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ e^{-x}, & x\ge 0\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{1}{8} & 0<x\le 8\\ 0 & x>8\end{cases}$

Найти интегральную функцию распределения, M(x) и D(x).

126. Случайная функция задана функцией распределения

$$\text{а) } F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ a+b\cdot\arcsin\, x, & -1\le x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases} \qquad \text{б) } F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \dfrac{x}{5} & 0<x\le 5\\ 1 & x>5\end{cases}$$

Найти $f(x)$.

127. Случайная величина задана функцией распределения

$$\text{а) } F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \dfrac{x-1}{2}, & 1\le x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases} \qquad \text{б) } F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1-\cos x & 0<x\le \pi/2\\ 1 & x>\pi/2\end{cases}$$

Найти c, f(x), и $P(0\le x\le 2)$.

128. Случайная величина задана функцией распределения

$$\text{а) } F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ c(x^2+2x), 0\le x\le 1,\\ 1, x>1\end{cases} \qquad \text{б) } F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \dfrac{x}{c} & 0<x\le \pi\\ 1 & x>\pi\end{cases}$$

Найти M(x) и D(x).

129. Случайная величина задана функцией распределения

$$\text{а) } F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{\pi}, & 0\le x\le \pi\\ 1, & x>\pi\end{cases} \qquad \text{б) } F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \dfrac{x^3}{8} & 0<x\le \pi/2\\ 1 & x>2\end{cases}$$

130. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}\{\,0, & x<0\\ \dfrac{1}{a^2}\left(ax-\dfrac{x^2}{4}\right), & 0\le x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$$

Найти коэффициента a, f(x), M(x), D(x) и $P(0\le x\le 2)$.

131. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}\{\,0, & x<2\\ \dfrac{12x-x^2-20}{16}, & 2\le x\le 6\\ 1, & x>6\end{cases}$$

Найти f(x), M(x) и D(x).

Некоторые законы распределений непрерывной случайной величины

1.Равномерное распределение

Если дифференциальная функция распределения задана в виде

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\overline{\in}[a,b]\\ \dfrac{1}{b-a}, & x\overline{\in}[a,b]\end{cases}\qquad (2.2.12)$$

то говорят, что случайная величина имеет равномерное распределение. Для равномерного распределения имеет место:

$$M(x)=\frac{a+b}{2},\quad D(x)=\frac{a+b}{2}\qquad (2.2.13)$$

Интегральная функция

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}\qquad (2.2.14)$$

Вероятность попадания в заданный интервал [c; d]

$$P(c\le X\le d)=\frac{d-c}{b-a};\qquad (2.2.15)$$

Пример 8. Задана случайная величина

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1, & 0<x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

Найти F(x), M(x) и D(x).

Решение: В заданном интервале [0;1] случайная величина принимает постоянное значение, равное 1. Поэтому эта случайная величина задана равномерным распределением. При этом a=0, b=1, следовательно

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

$$\mathrm{M}(\mathrm{x})=\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2}=\frac{1}{2},\qquad \mathrm{D}(\mathrm{x})=\frac{1}{12},\qquad \mathrm{A_s}=0,\qquad \mathrm{E_k}=-1{,}2$$

Пример 9. Интервал движения маршрутного автобуса 10 мин. В случайным момент пассажир подошел к остановке. Случайная величина X-время ожидания автобуса. Напишите дифференциальную и интегральную функции этой случайной величины.

Решение. По условию задачи a=0, b=10. Поэтому

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 0{,}1, & 0<x\le 10\\ 0, & x>10\end{cases}$$

Следовательно

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x}{10}, & 0<x\le 10\\ 1, & x>10\end{cases}$$

ЗАДАЧИ

132. Задана случайная величина

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ \dfrac{1}{A}, & 2<x\le 9\\ 0, & x>9\end{cases}$$

Найти A и D(x).

133. Случайная величина задана равномерным распределением.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3\\ \dfrac{x-3}{7}, & 3<x\le 10\\ 1 & x>10\end{cases}$$

Найти f(x) и $P(4 \le x \le 9)$.

134. Случай величина на интервале [2; 8] задана равномерным законом распределения. Найти математическое ожидание.

2. Показательное распределение

Если дифференциальная функция распределения случайной величины задана в виде

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases} \tag{2.2.16}$$

то говорят, что случайная величина задана показательным распределением.

1. Интегральная функция

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases} \tag{2.2.17}$$

$$M(x)=\frac{1}{\lambda},\quad D(x)=\frac{1}{\lambda^2},\quad \sigma(x)=\frac{1}{\lambda},\quad A_s=2,\quad E_k=9 \tag{2.2.18}$$

3. $P(a\le X\le b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$ (2.2.19)

Пример 10. Случайная величина задана интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-7x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Найти M(x) и D(x).

Решение: Вначале находим f(x)

$$f(x)=\begin{cases}7e^{-7x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Отсюда находим M(x)= $\frac{1}{7}$, D(x)= $\frac{1}{49}$, σ(x)= $\frac{1}{7}$.

ЗАДАЧИ

135. Случайная величина X- время, затраченное на ремонт телевизора. Интегральная функция распределения задана в виде

$$F(t)=\begin{cases}0, & t\le 0\\ 1-e^{-\kappa t}, & t>0\end{cases}$$

Найти D(t) и M(t).

136. Задана случайная величина

$$f(x)=\begin{cases}\mu e^{-\mu x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Найти вероятность того, что случайная величина примет значение меньше своего математического ожидания.

137. Случайная величина X-время, затраченное на обнаружение искомой подводной лодки.
Интегральная функция распределения задана в виде

$P(t)=1-e^{-\lambda t}, \quad \lambda>0;$

Найти среднее время, затраченное на обнаружение подводной лодки.

138. Непрерывная случайная величина задана показательным распределением

$$f(x)=\begin{cases}0{,}04e^{-0{,}04x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Найти $P(0 \le x \le 2)$.

139. Задана случайная величина

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 3e^{-3x}, & x\ge 0\end{cases}$$

Найти числовые характеристики.

3.Нормальное распределение

Если случайная величина задана дифференциальной функцией распределения вида

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2a^2}}, \qquad (2.2.20)$$

то говорят, что случайная величина задана нормальным распределением .

Здесь

$$M(x)=a,\ D(x)=\sigma^2,\ A_S=0,\ E_k=0 \qquad (2.2.21)$$

Также

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-\alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) \qquad (2.2.22)$$

где Ф(x) функция Лапласа, значения которой табулированы. Из (2.2.22), в частности, получим вероятность отклонения случайной величины от своего математического ожидания:

$$P\left(|X-a| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \qquad (2.2.23)$$

Если в формуле (2.2.23) σ=3σ, то получим формулу, называемую правилом трех сигм:

$$P\left(|X-a| < 3\sigma\right) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3)$$

или

$$P\left(|X-a| < 3\sigma\right) \approx .0{,}9973,$$

т.е. если случайная величина задана нормальным распределением, то ее абсолютная величина отклонения от математического ожидания не превышает трех сигм.

Пример 11. Станок – автомат изготовливает детали 125 мм длины. Отклонение длины от стандарта не превышает 0,5 мм. Оказалось, что 7% готовой продукции не соответствует стандарту. Случайная величина X-длина изготовленных деталей задана нормальным распределением. Найти дисперцию случайной величины.

Решение: Пусть X – длина деталей. По условию задачи средняя длина детали 125 мм, т.е. M(x)=a=125 мм. Также известно 124,5<x<125,5. Поэтому β=124,5, α=125,5, σ=?

Воспользуемся формулой (2.2.23)

$$P(124{,}5 < x < 125{,}5) = 2\Phi\left(\frac{0{,}5}{\sigma}\right)$$

С другой стороны 7% деталей не соответствует стандарту, тогда

$$P(124{,}5 < x < 125{,}5) = 0{,}93;$$

$$2\Phi\left(\frac{0{,}5}{\sigma}\right) = 0{,}93, \quad \frac{0{,}5}{\sigma} = 1{,}81$$

Окончательно получим σ^2=D(x)=0,078.

Пример 12. Случайная величина задана нормальным распределением и M(x)=30, D(x)=4. Вероятность выполнения неравенства |x-30|<σ равна 0,8. Найти δ.

Решение: Согласно условию задачи

$$P(|X - 30| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{2}\right) = 0{,}8$$

Отсюда

$$\Phi\left(\frac{\delta}{2}\right) = 0{,}4$$

Из таблицы находим $\frac{\delta}{2} = 1{,}28, \quad \delta = 2{,}56$.

Пример 13. Случайная величина задана нормальным распределением M(x)=5, D(x)=0,64. Написать дифференциальную функцию распределения. Найти вероятность попадания в заданный интервал [4; 7].

Решение: Согласно условиям задачи M(x)=5, D(x)=0,64, σ=0,8. Следовательно

$$f(x) = \frac{1}{0{,}8\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{2\cdot 0{,}64}}$$

$$P(4 < x < 7) = \Phi\left(\frac{7-5}{0{,}8}\right) - \Phi\left(\frac{4-5}{0{,}8}\right) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) =$$

$$= 0{,}4939 + 0{,}3944 = 0{,}8892$$

Пример 14 . Пусть случайная величина X- длина изготовленной детали задана нормальным распределением, причем a=10см, σ=0,01.

1. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от своего математического ожидания не превышает 0,025.
2. Найти вероятность того, что длина детали не превысит 10,03
3. Найти σ если известно, что вероятность отклонения случайной величины от своего математического ожидания не превысит 0,02, равна 0,99.

Решение:

1. $$P(|X-10|<0{,}025)=2\Phi\left(\frac{0{,}025}{0{,}01}\right)=0{,}9876$$

2. $$P(|X-10|<0{,}03)=0{,}9973$$

Здесь использовано правило « трех сигм»

3. $$P(|X-10|<0{,}02)=2\Phi\left(\frac{0{,}02}{\sigma}\right)=0{,}99$$

Из таблицы находим

$$\frac{0{,}02}{\sigma}=2{,}58$$

или σ=0,0077.

140. Случайная величина задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x)=C\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{14}}$$

Найти: 1. Коэффициент С. 2. Построить график функции f(x).

ЗАДАЧИ

141. Случайная величина задана нормальным распределением, и М(x)=2, σ=1. Найти вероятность попадания в интервал [4,7].

142. Отклонение длины деталей от стандарта задано нормальным распределением, стандартная длина детали, т.е. математическое ожидание М(x)=40 см, σ=0,4 см. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от стандарта не превысит 0,6 см.

143. В данной партии вес яблок случайная величина и имеет нормальное распределение, М(x)=140 г., $\sigma=16г$. Найти:

1. Вероятность того, что вес наугад взятого яблока будет находиться в интервале [124 ;148].
2. Вероятность того, что отклонение веса яблок от своего среднего веса 140г не превысет 8г.

144. Случайная величина Х-длина детали задана нормальным распределением. Стандартная длина детали равна *a*=2,5 см и σ = 0,01. Если за достоверное событие принять событие с вероятностью равной 0,9973, то в каком интервале должна находится длина детали?

145. Случайная величина Х- отклонение от стандартной длины d_0 = 5 мм диаметра шариков, задана нормальным распределением и среднее квад-

ратическое отклонение σ=0,01мм. Если длина диаметра отклонится от стандартной длины на 0,02 мм, то контроль не допускает к продаже. Сколько процентов готовой продукции не принимается техническим контролем?

146. Случайная величина задана нормальным распределением с математическим ожиданием а и средним квадратическим отклонением σ. В заданном интервале $[\alpha, \beta]$ данную случайную величину задайте равномерным распределением, при условии, что их числовые характеристики будут одинаковыми (M(x) ,D(x)).

Указание. Для нахождения α и β необходимо приравнивать соответствующие числовые характеристики этих законов распределений.

147. Случайная величина имеет нормальное распределение, причем M(x)=
=a и D(x)= σ^2. Найти точку перегиба графика функции f(x).

148. Случайная величина задана нормальным распределением, причем M(x)=
=a=0 и вероятность попадания в интервал (-b, b) равна 0,5. Найти среднее квадратическое отклонение.

149. Средний вес заряда для ружья 2,3 г. Случайная величина X-ошибки при взвешивании заряда задана нормальным распределением. Дисперсия равна 0,04. Если заряд превысит средний вес заряда, то при стрельбе ружье выйдет из строя. Если самое большее можно зарядить 2,8 г., то какова вероятность того, что ружье выйдет из строя?

150. Случайная величина X-дальность полета снаряда задана нормальным распределением. Если дисперсия равна 900 $м^2$. Найти процент снарядов отклонившихся от мишени от 20 м до 50 м.

Указание. Расстояние до мишени принять равным M(x)=a.

151. Случайная величина X-вес каждой пойманной рыбы задана нормальным распределением. Его параметры a=400 г., σ=40г. Найти вероятность того, что вес одной рыбы

1. будет от 300 г до 500 г
2. более 300г
3. не более 450 г

152. Случайная величина X-длина диаметров шариков для подшипников задана нормальным распределением, при этом a= 4,5 см, σ=0,05см. Найти интервал возможных значений, такой что вероятность попадания случайной величины в этот интервал будет равна 0,9545.

153. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормального распределения соответственно, равны a=16 см, σ=2 см.

Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от своего математического ожидания не превысит 3,92.

154. Случайная величина X-результаты измерений расстояния между двумя населенными пунктами задана нормальным распределением. Ее математическое ожидание a=16 км, среднее квадратическое отклонение σ=100м. Найти вероятность того, что расстояние между этими населенными пунктами будет:

1. не менее 15,8 км
2. не более 16,25 км
3. от 15,75 км до 16,3 км

155. Длина роста взрослой женщины случайная величина, заданная нормальным распределением, с a = 164 см и σ=5 см. Найти:

1. Плотность распределения

2.Вероятность попадания в интервал $P(165<x<168)$.

156. Случайная величина X-длина роста взрослого мужчины с математическим ожиданием a=170 см и дисперсией σ^2=36. Найти вероятность того, что из 4-х случайно выбранных мужчин хотя бы у одного рост будет принадлежать интервалу [168,172].

Указание. Вначале необходимо найти $P(168<X<172)$.

157. Случайная величина X- контролируемый размер изделия задана нормальным распределением, причем a=5 см, σ^2 = 0,81.

Найти вероятность того, что

1.Контролируемый размер случайно выбранного изделия принадлежит интервалу [4;7].

2.Отклонение от математического ожидания не будет больше 2 см.

158. Длина гвозди изготовливаемого станком-автоматом есть случайная величина, заданная нормальным распределением с математическим ожиданием a= 2,5см и дисперсией σ^2 =0,0001. Найти интервал возможных значений случайной величины, если известно, что вероятность отклонения случайной величины от своего математического ожидания равна 0,9973.

159. Случайная величина задана нормальным распределением с математическим ожиданием a=25. Вероятность попадания случайной величины в интервал (10; 15) равна 0,2. Найти вероятность попадания случайной величины в интервал [35; 40].

160. При некоторых значениях аргумента:

1. возможно ли $F(x) > 1$

2. возможно ли $f(x) > 1$
3. возможно ли $F(x) < 1$
4. возможно ли $f(x) > 1$

161. Пусть задана некоторая случайная величина X. Рассмотрим случайную величину X+a. Найдите числовые характеристики случайной величины X+a: $M(x)$,$D(x)$, $\nu_2(x)$, $\sigma(x)$.

162. Случайная величина задана нормальным распределением, причем $a=0$, $\sigma=1$. Сравните $P(-0{,}5 \leq X \leq -0{,}1)$ и $P(1 \leq X \leq 2)$.

163. Случайная величина задана рядом распределения

X	2	4	6	8
P	0,4	0,3	0,2	0,1

Найти: M_0, M_D, ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, As, Ек.

164. Случайная величина задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{3x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{3}{2}(2-x)^2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & x \geq 2 \end{cases}$$

Найти: ν_1 - ν_4, μ_1 - μ_4, As, Ек.

165. Случайная величина задана рядом распределения

X	2	3	6	8
P	0,4	0,3	0,2	0,1

Найти все числовые характеристики.

166. Задана случайная величина

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ a - \dfrac{a^2}{2}x & 0 < x \leq \dfrac{2}{a} \\ 0 & x > \dfrac{2}{a} \end{cases}$$

Найти: F(x).

§ 3. Система случайных величин (случайные вектора)

Пусть в одном пространстве элементарных событий определены случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$. Тогда совокупность случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$ называется системой случайных величин. Вектор $Z=(X_1, X_2, ..., X_n)$ называется случайным вектором, а $X_1, X_2, ..., X_n$ - его координатами.

Основные понятия и определения сформулированные для одномерной случайной величины сохраняются и для многомерных случайных величин.

Рассмотрим двухмерную случайную величину. Функция распределения двухмерной случайной величины определяется как вероятность выполнения неравенств $X<x$ и $У<y$:

$$F(x,y)=P(X<x, У<y) \qquad (2.3.1)$$

Основные свойства функции распределения;

1. $0 \leq F(x,y) \leq 1$
2. $F(-\infty, y) = F(x, -\infty)=F(-\infty,-\infty)=0$
3. $F(\infty,y)=F_2(y)$
4. $F(x, \infty)=F_1(x)$
5. $P(x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq У \leq y_2)= [F(x_2, y_2)-F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1)-F(x_1, y_1)]$

Для непрерывной случайной величины

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy \qquad (2.3.2)$$

где f(x, y) дифференциальная функция распределения двумерной случайной величины:

$$f(x,y)=F''_{xy}(x,y)$$

Для двумерной дискретной случайной величины

$$F(x,y)=\sum_{x<x_i}\sum_{y<y_i} P(X=x_i, Y=y_i) \qquad (2.3.3)$$

Если $F(x,y)=F_1(x)F_2(y),\;\; f(x,y)=f_1(x)f_2(y),$

то случайные величины X и У называются независимыми случайными величинами. Для двумерной дискретной случайной величины условие независимости:

$$P(X=x_i, Y=y_i)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_i)$$

Значения одномерных случайных величин изображались точками на прямой. Двумерный случайный вектор изображается точками на плоскости, а трехмерный вектор изображается- как точка в пространстве. Приведем примеры двухмерных дискретных случайных величин:

1.Бросается две игральные кости. Обозначим через Х – число очков, выпавших на первой кости, через У – число очков, выпавших на второй кости.

Тогда пара (Х,У) составляет двухмерную случайную величину.

2.Точка падения снаряда также служит примером двухмерной случайной величины, так как она определяется двумя координатами Х и У на плоскости.

3.В некотором сельскохозяйственном районе выбран участок . Обозначим через Х количество внесенных удобрений, через У урожай в центнерах с участка. Пара (Х,У) составляет двухмерную случайную величину.

Пусть рассматривается двумерная дискретная случайная величина Z=(Х,У). Ее двумерное распределение можно представить в виде таблицы с двумя входами. Такая таблица содержит в соответствующих клетках вероятности $P(X = x_i, Y = y_i) = P_{ij}$. Итоговый столбец и итоговая строка такой таблицы задают распределение одномерных составляющих случайных величин, т.е. $\{x_i, P_{xi}\}$ и $\{Y_j, P_{yi}\}$.

Таблица 2.1

У Х	$У_1$	y_2	...	y_j	...	y_n	P_x
x_1	P_{11}	P_{12}	...	P_{1j}	...	P_{1n}	Px_1
x_2	P_{21}	P_{22}	...	P_{2j}	...	P_{2n}	Px_2
$\vdots$	...	...	...	...	...	...	...
x_i	P_{i1}	P_{i2}	...	P_{ij}	...	P_{in}	Px_i
$\vdots$	...	...	...	...	...	...	...
x_m	P_{m1}	P_{m2}	...	P_{mj}	...	P_{mn}	Px_m
Py	Py_1	Py_2	...	Py_j	...	Py_n	1

Из этой таблицы получим ряды распределений Х и У

Таблица 2

X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_m
Px	Px_1	Px_2	...	Px_i	...	Px_m

Таблица3

у	y_1	y_2	...	y_j	...	y_n
Py	Py_1	Py_2	...	Py_j	...	Py_n

Условные вероятности определяются следующим образом

$$P_i(x_i / y_j) = \frac{P\left\{X = x_i, Y = y_j\right\}}{Py_j}, i = \overline{1, m}$$

$$P_j(y_j / x_i) = \frac{P\left\{X = x_i, Y = y_j\right\}}{Px_i}, j = \overline{1, n}$$

Числовые характеристики

$$M(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i p_{ij}, \qquad M(y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_i p_{ij}$$

$$D(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_i - M(x))^2 p_{ij}, \qquad D(y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (y_i - M(y))^2 p_{ij}$$

Для двумерной случайной величины также вводятся понятия ковариации и коэффициента корреляции:

$$\operatorname{cov}(x, y) = M\{[x - M(x)][y - M(y)]\},$$

$$r(x, y) = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sqrt{D(x)D(y)}};$$

Если X и У независимые случайные величины, то r(x,y) = 0.

Важные значения имеют понятия условных математических ожиданий:

$$M(Y / X = x) = \sum_{j=1}^{n} y_j P\left(y_j / x\right),$$

$$M(X / Y = y) = \sum_{i=1}^{m} x_i P(x_i / y)$$

Пример 1. Отдел технического контроля проверил на стандартность готовую продукцию. Случайная величина X-отклонение от стандарта ширины детали, У-отклонение от стандарта длины детали. Полученные данные приведены в таблице

Таблица 1

У / X	-1	0	1	Px
-2	0,21	0,17	0,32	0,7
3	0,12	0,07	0,11	0,3
Py	0,33	0,24	0,43	1.00

1. Написать законы распределений X и У
2. Написать условное распределение X при У=y_3
3. Написать условное распределение У при X=x_2
4. Являются ли X и У независимыми?

5. Найти F(x,y).
6. Найти $F_1(x)$ и $F_2(y)$
7. Найти r(x,y)
8. Найти условные математические ожидания.

Решение: Из таблицы 1 находим следующие распределения случайных величин X и У соотвественно:

Таблица 2 Таблица 3

X	-2	3
Px	0,7	0,3

У	-1	0	1
Py	0,33	0,24	0,43

2.Напишем условное распределение X при У=y_3 . Для этого вначале находим

$P(x_1/Y=y_3)$, $P(x_2/Y=y_3)$

$$P(x_1/Y=y_3)=\frac{P(X=x_1,Y=y_3)}{Py_3}=\frac{0{,}32}{0{,}43}=\frac{32}{43}$$
$$P(x_2/Y=y_3)=\frac{P(X=x_2,Y=y_3)}{Py_3}=\frac{0{,}11}{0{,}43}=\frac{11}{43}$$

Тогда

Таблица 4

X	-2	3
P(X/У=y_3)	$\frac{32}{43}$	$\frac{11}{43}$

3.Аналогично находим условное распределение У при X=x_2 .

Таблица 5

У	-1	0	1
P(У/X=x_2)	$\frac{12}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{11}{30}$

4.Для установления независимости случайных величин X и У необходимо сравнивать их условные и безусловные распределения. Если эти законы распределения совпадают, то случайные величины независимые. Сравнение таблицы 2 и 4, 3 и 5 между собой показывают, что эти таблицы не совпадают. Следовательно Х и У зависимые случайные величины.

5. F(x,y) находим из таблицы 1:

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, x \le -2, y \le -1 \\ 0{,}21, x \le 3, y \le 0 \\ 0{,}38, x \le 3, y \le 1 \\ 0{,}70, x \le 3, y \rangle 1 \\ 0{,}82, x \rangle 3, y \le 0 \\ 0{,}89, x \rangle 3, y \le 1 \\ 1, x \rangle 3, y \rangle 3 \end{cases}$$

6. $F_2(x)$ и $F_2(y)$ находим из таблиц 2 и 3

$$F_1(x)=\begin{cases} 0, & x \le -2 \\ 0{,}7, & -2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases} \quad F_2(x)=\begin{cases} 0, & y \le -1 \\ 0{,}33, & -1 < y \le 0 \\ 0{,}57, & 0 < y \le 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}.$$

7. Коэффициент корреляции:

$$\mathrm{cov}(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i - M(x))(y_j - M(y))P_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_i p_{ij} - M(x)M(y)$$

M(x) = -2·0,7+3·0,3=-0,5, D(x)=5,25, $\sigma_x = 2{,}29$

M(y)=-1·0,33+0·0,24+1·0,43=0,1, D(y)=0,87, $\sigma_y = 0{,}866$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} x_i y_j p_{ij} = -2(-1\cdot 0{,}21 + 1\cdot 0{,}32) + 3(-1\cdot 0{,}12 + 1\cdot 0{,}11) = -0{,}22 - 0{,}03 = -0{,}25$$

Тогда

$$\mathrm{cov}(x,y) = -0{,}25 - (-0{,}5\cdot 0{,}1) = -0{,}2, \qquad r_{xy} = \frac{-0{,}2}{2{,}29\cdot 0{,}87} = -0{,}1.$$

Получили $r_{xy} \neq 0$, т.е. Х и У зависимые случайные величины.

8. Вычислим M(X/У=y_3) и M(У/X=x_2) по таблицам 4 и 5.

Тогда

$$M(X/Y=y_3) = -2\cdot\frac{32}{43} + 3\cdot\frac{11}{43} = -\frac{31}{43}$$

$$M(Y/X=x_2) = -1\cdot\frac{12}{30} + 0\cdot\frac{11}{43} + 1\cdot\frac{11}{30} = \frac{1}{30}.$$

Пример 2. Независимые случайные величины Х и У заданы соответственно в интервалах [a,b] и [c,d] равномерным распределением. Найти:

1. Плотность распределений случайных величин Х и У
2. Плотность распределения f(x,y) системы случайных величин (Х,У)
3. Интегральные функции распределений $F_1(x)$ и $F_2(y)$

4.Функцию распределения F(x,y) системы (Х,У)

5.Для $x_1, x_2 \in [a,b]$ и $y_1, y_2 \in [c,d]$. Найти $P(x_1<X<x_2,\ y_1<У<y_2)$.

Решение: Плотности распределений случайных величин Х и У определяются в виде:

1.

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x < a,\ \ x > b \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} 0, & y < c,\ \ y > d \\ \dfrac{1}{d-c}, & c \le y \le d \end{cases}$$

2.Случайные величины Х и У независимые. Поэтому

$$f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$$

Отсюда следует, что

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x < a, \quad y < c, \quad x > b, \quad y > d \\ \dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & a \le x \le b, \qquad c \le y \le d \end{cases}$$

3.

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{(b-a)}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

$$F_2(y) = \begin{cases} 0, & y < c \\ \dfrac{y-c}{d-c}, & c \le y \le d \\ 1, & y > d \end{cases}$$

4. Так Х и У независимые, то $F(x,y)=F_1(x)F_2(y)$

$$F(x,y)=\begin{cases} 0 & x<a, \quad y<c \\ \dfrac{x-a}{(b-a)}\cdot\dfrac{y-c}{d-c}, & a\le x\le b,\ c\le y\le d \\ \dfrac{x-a}{b-a}\cdot 1, & a\le x\le b,\ y>d \\ 1\cdot\dfrac{y-c}{d-c}, & x>b, \quad c\le y\le d \\ 1, & x>b, \quad y>d \end{cases}$$

5.Согласно свойству 5 функции распределения

$P(x_1<X<x_2,\ y_1<У<y_2)=[F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)]-[F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1)]$

Пример 3. Система случайных величин X и У задана функцией распределения

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0,\ y<0 \\ 1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y}, & x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}$$

Найти плотности распределений $f(x,y), f_1(x), f_2(y)$ и интегральные функции $F_1(x)$,$F_2(y$.

Решение:

$$1.\ f(x,y)=F''_{xy}(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0, \quad y<0 \\ e^{-x-y}, & x\ge 0, \quad y\ge 0 \end{cases}$$

$$2.\ F_1(x)=\lim_{y\to\infty}F(x,y)=\begin{cases} 0, x<0, y<0 \\ 1-e^{-x}, x\ge 0 \end{cases}$$

$$F_2(y)=\lim_{x\to\infty}F(x,y)=\begin{cases} 0, x<0, y<0 \\ 1-e^{-y}, y\ge 0 \end{cases}$$

$$3.\ f_1(x)=\begin{cases} 0, x<0 \\ e^{-x}, x\ge 0 \end{cases}$$

$$4.\ f_2(y)=\begin{cases} 0, y<0 \\ e^{-y}, y\ge 0 \end{cases}$$

ЗАДАЧИ

167. Система случайных величин задана таблицией

Y / X	0	1	2	3
1	0,04	0,05	0,01	0,06
4	0,24	0,15	0,04	0,07
6	0,05	0,10	0,09	0,10

Найти:

1. Законы распределений Х и У
2. Условное распределение У при Х=x_2=4
3. Являются ли Х и У зависимыми
4. Р(х<4,у<2)
5. Коэффициент корреляции r_{xy}.

168. Система случайных величин задана таблицией

Х / У	-1	0	1
0	0	0,2	0,1
1	0,4	0,1	0,2

Найти:

1. Законы распределений Х и У

2.Условные распределение Х при У=1

3.Являются ли Х и У независимыми?

4. Коэффициент корреляции r_{xy}.

169. Два стрелка независимо друг от друга произвели по два выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,6. Пусть Х-число попаданий первого стрелка, У –число попаданий второго стрелка.

Найти:

1. Закон распределения системы независимых случайных величин Х и У.

2. Законы распределений каждой случайной величины.

3.Являются ли Х и У независимыми?

4. Коэффициент корреляции r_{xy}.

170. В ящике содержится 5 красных, 2 зеленых, и 3 синих одинаковых шаров. Из ящика наугад извлечены 3 шара. Пусть Х-число красных шаров среди 3-х извлеченных, У-число зеленых шаров среди 3-х извлеченных.

Найти:

1. Закон распределения система случайных величин X и У.

2.Законы распределений случайных величин X и У.

3. Коэффициент корреляции.

4. Являются ли X и У независимыми?

171. Независимые случайные величины X и У задана равномерным распределением соответственно на интервалах [4, 6] и [0,3].

Найти: 1. $f_1(x), f_2(y)$ 2. $F_1(x), F_2(y)$; 3. $f(x,y)$; 4. $F(x,y)$

5 P(5<x<6, 1<y<2).

172. Система случайных величин задана функцией распределения

$$F(x,y) = \begin{cases} o, x < 0, y < 0 \\ (1-e^{-ax})(1-e^{-by}), & x \geq o, y \geq o \end{cases}$$

Найти: 1. $f(x,y)$; 2. $F_1(x)$ и $F_2(y)$, 3. $P\left(0 < x < \frac{1}{a}, \quad 0 < y < \frac{1}{b}\right)$.

173. В примере № 167 найти М(X/ У=2) , М(У/X=1).

174. В примере № 168 найти М(X/ У=-1) , М(У/X=1).

§ 4. Функция случайных величин

Пусть дана $X_1, X_2, ..., X_n$ система случайных величин и известны их законы распределений. Тогда функция случайных величин имеет вид:

$$y=\varphi (x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (2.4.1)$$

Теперь необходимо найти закон распределения случайной величины У.

Рассмотрим функцию одной случайной величины

$$y=\varphi(x) \qquad (2.4.2)$$

Здесь X может быть либо дискретной, либо непрерывной случайной величиной.

1. Пусть X- дискретная случайная величина, заданная рядом распределения.

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	P_n

Тогда случайная величина (2.4.2) имеет ряд распределения вида:

X	$\varphi(x)_1$	$\varphi(x_2)$	...	$\varphi(x_n)$
P	p_1	p_2	...	P_n

2. X-непрерывная случайная величина, заданная дифференциальной функцией распределения f(x) . Написать закон распределения случайной функции У. Для этого необходимо найти дифференциальную функцию распределения g(y). Таким образом ставится следующая задача.

Для непрерывных случайных величин, зная плотность распределения f(x) случайной величины X найти плотность распределения g(y) случайной величины y= φ(x).

При решении этой задачи рассматривается два случая:

1. Случай монотонной функции

Пусть функция y= φ(x) является монотонно-возрастающей, непрерывной и дифференцируемый функцией на [a,b]. Тогда существует обратная функция x=ψ(y), которая также является возрастающей, непрерывной и дифференцируемой функцией. Таким образом в этом случае g(y) определяется в виде

$$g(y)=f(\psi(y))|\,\psi'(y)| \qquad (2.4.3)$$

2. Случай немонотонный функции

Имеется непрерывная случайная величина X с плотностью распределения f(x). Если функция y= φ(x) немонотонная, то обратная ей функция ψ(y) неоднозначна, т.е. одному значению У может соответствовать несколько значений: $\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_n(y)$. В этом случае плотность распределения случайной величины У определяется формулой

$$g(y)=\sum_{i=1}^{n} f[\phi_i(y)]\cdot|\phi_i'(y)| \qquad (2.4.4)$$

Пример 1. Случайная величина задана рядом распределения

X	0	1	2	3
p	0,1	0,2	0,3	0,4

Найти закон распределения случайной величины y=(4-x)cosπx.

Решение. Подставляя в формулу y=(4-x)cosπx значения x из таблицы находим $y_1=(4-0)\cos\pi 0=4$, $y_2=y(1)=-3$, $y_3=y(2)=2$, $y_4=y(3)=-1$.

Их соответствующие вероятности

q_1=p(y=-3)=p(x=1)=0,2
q_2=p(y=-1)=p(x=3)=0,4
q_3=p(y=2)=p(x=2)=0,3
q_4=p(y=4)=p(x=0)=0,1

Тогда получим следующее распределение

y	-3	-1	2	4
q	0,2	0,4	0,3	0,1

Пример 2. Случайная величина задана плотностью распределения.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $y=x^3$

Решение: Функция $y=x^3$ монотонная, возрастающая, непрерывная и дифференцируемая на промежутке $[0; +\infty)$. Поэтому для нее существует обратная функция $x=\sqrt[3]{y}$. Тогда согласно формуле (3) находим

$$g(y) = f\left[\sqrt[3]{y}\right] \cdot \left| \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} \right| = \lambda e^{-\lambda \sqrt[3]{y}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}};$$

Пример 3. Два стрелка независимо от друга произвели по мишени соответственно 2 и 3 выстрела. X-число попаданий первого стрелка, У-число попаданий второго стрелка. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равно 0,9, а для второго стрелка равна 0,8. Найти законы распределений случайной величины: Z=X+Y, Z=XY, математическое ожидание М(X+У) и М(XУ).

Решение: Вначале составим законы распределений случайных величин X и У. Эти случайные величины заданы биномиальным законом распределения:

X	0	1	2
P	0,01	0,18	0,81

У	0	1	2	3
P	0,08	0,096	0,384	0,512

Суммой (произведением) двух независимых случайных величин называется случайная величина X+ У (XУ) с возможными значениями x_i+y_j ($x_i \cdot y_j$), имеющими соответствующие вероятности $P(X=x_i)P(У=y_j)=P_{ij}$.

После необходимых вычислений находим

x+y	0	1	2	3	4	5
P	0,0008	0,01464	0,07296	0,09368	0,4032	0,41472

xy	0	1	2	3	4	6
P	0,08920	0,00432	0,08856	0,09216	0,31104	0,41472

Также из этих таблиц легко находятся M(x+y)=4,128 и M(xy)=4,1904.

В математической статистике используются случайные величины заданные в виде функции независимых случайных величин имеющих нормальные распределения

Ниже приводятся три таких случайных величин:

1. Распределение Xu квадрат (χ^2 распределение). Пусть даны независимые случайные величины $X_1, X_2, ..., X_\nu$ имеющие нормальные распределения и a=0, σ=1:

Рассмотрим случайную величину

$\chi^2_\nu = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_\nu^2$

Закон распределения этой случайной величины называется «Xu квадрат» распределением (χ^2 – распределение). Здесь ν – степень свободы.

В общем случае, если даны a ≠ 0, то с помощью замены $y_i = \frac{x_i - \alpha}{\sigma}$ можно привести к нормальному распределению с параметрами (0,1), т.е.

$$\chi^2_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{(x_i - a)^2}{\sigma^2}$$

Таблица распределения χ^2_ν приведена в конце книги.

2. Распределение Стьюдента (t распределение). Пусть x_i нормальные независимые случайные величины с параметрами a = 0, σ . Тогда распределение Стьюдента задается в виде

$$t_\nu = \frac{x_o}{\sqrt{\frac{1}{\nu}\chi_\nu^2}}$$

Здесь ν –степень свободы.

Если параметры нормального распределения a и σ, то с помощью замены $x_i - a$ получим распределение Стьюдента в виде

$$t_\nu = \frac{x_o - a}{\sqrt{\frac{1}{\nu}(\chi_\nu - a)^2}}$$

Если же a = 0, σ = 1, то

$$t_\nu = \frac{x_o}{\sqrt{\frac{1}{\nu}\chi_\nu^{\ 2}}}$$

Где χ_ν^2 – «X_μ квадрат» распределение.

3. Распределение Фишера (F- распределение). Пусть даны нормальные независимые случайные величины с параметрами (0,σ)

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, x_{n_1+1}, \ldots, x_{n_1+n_2}$$

Тогда случайную величину, заданную с помощью следующей функции называют случайной величиной заданной распределением Фишера.

$$F_{n_1,n_2} = \frac{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_i^2}{\frac{1}{n_2}\sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} x_j^{\ 2}}$$

Если x_i имеют параметры (a,σ), то

$$F_{n_1,n_2} = \frac{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - a)^2}{\frac{1}{n_2}\sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}(x_j - a)^2}$$

Где $\chi_{n_1}^2$ и $\chi_{n_2}^2$ имеют « хи – квадрат» распределение.

ЗАДАЧИ

175. Написать законы распределений случайных величин $Z=2(X+У)+1$ и $Z=2У^2-1$ по условию примера 3.

176. Монеты подброшена 3 раза. X-число появления «герба», У-число появления «цифры». Написать закон распределения X+У.

177. Дана случайная величина

x	0	1	2	3
q	0,1	0,3	0,4	0,2

Написать закон распределения случайной величины $y = \sin\frac{\pi}{2}x + 1$.

178. Дана система случайных величин X и У

У / X	-2	-1	0	1
-1	0,01	0,02	0,05	0,03
0	0,03	0,24	0,15	0,06
1	0,06	0,09	0,16	0,10

Написать законы распределений Х+У и Z=ХУ

§ 5. Закон больших чисел

Теория вероятностей изучает закономерности свойственные массовым явлениям. При достаточно большом числе испытаний некоторые характеристики случайных событий и случайных величин, наблюдаемых при испытании, становятся почти неслучайными. Так, например, относительная частота события при большом числе испытаний становится устойчивой, то же самое относится к средним величинам случайной величины. Установлено, что при некоторых условиях и неограниченном возрастании числа слагаемых сумма случайных величин подчиняется в пределе определенному закону. Эти обстоятельства позволяет использовать результаты наблюдений над случайными явлениями для предсказания результатов будущих испытаний.

Таким образом, статистическая закономерность проявляется при многократном повторении опыта или в математической форме в виде предельных свойств, при неограниченном увеличении числа испытаний.

Ниже рассматривается теоремы, носящие общее название закона больших чисел. Закон больших чисел состоит из нескольких теорем, в которых доказывается приближение средних характеристик, при соблюдении определенных условий, к некоторым постоянным величинам.

Впервые сформулировал и доказал одну из теорем закона больших чисел швейцарский математик Яков Бернулли (1654-1705). Французский математик Симеон Дени Пуассон (1824-1894) обобщил эту теорему ее на случай, когда вероятность события в независимых испытаниях изменяется. Он же ввел впервые термин «закон больших чисел». Русский математик П.Л.Чебышев доказал, что закон больших чисел распространяется также и на среднюю величину. Закон больших чисел начнем с рассмотрения неравенства Чебышева.

При расмотрении числовых характеристик случайных величин установили, что числовые характерстики в определенной степени характеризуют закон распределения случайной величины. Рассмотрим неравенство, позволяющее оценить закон распределения случайной величины по заданным числовым характеристикам.

Неравенство Чебышева. Если случайная величина Х имеет конечное математическое ожидание и дисперсию, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство:

$$P\left(|X - M(x)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D(x)}{\varepsilon^2} \quad (2.5.1)$$