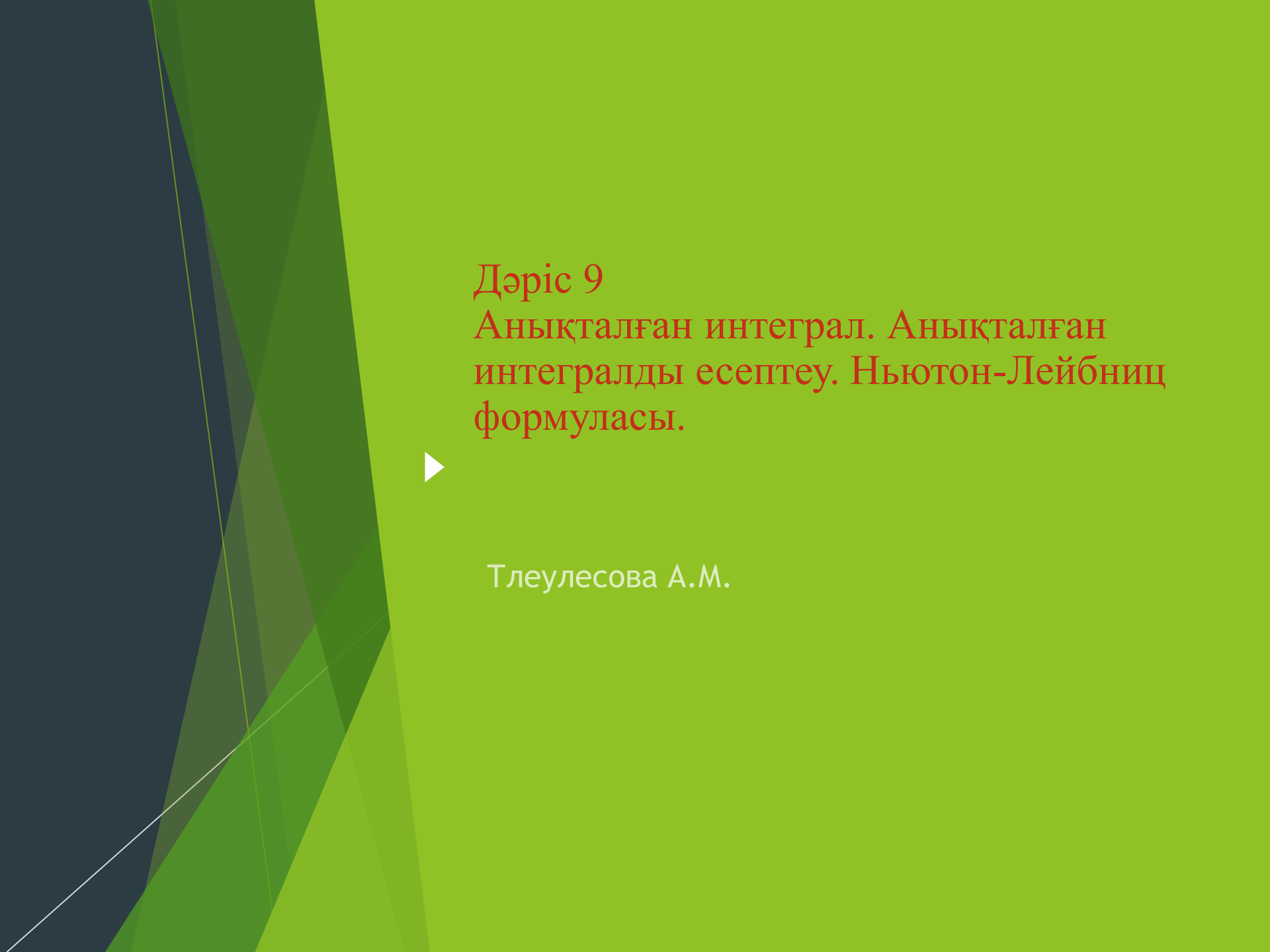




Дәріс 9

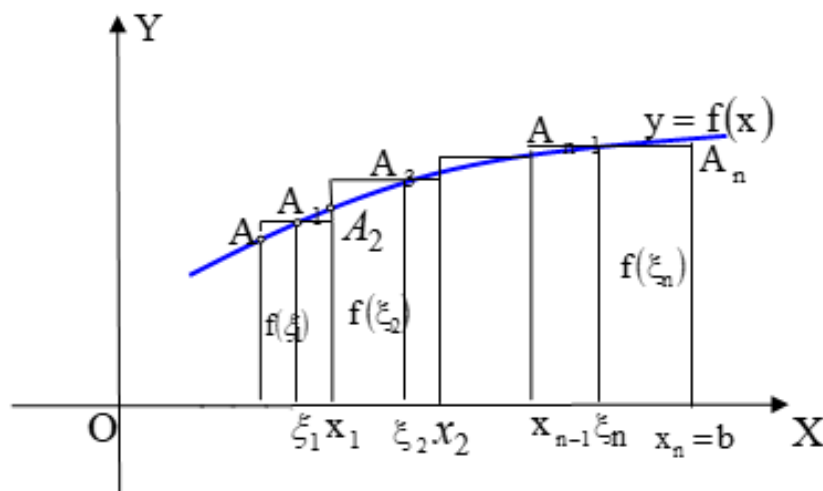
Анықталған интеграл. Анықталған
интегралды есептеу. Ньютон-Лейбниц
формуласы.



Тлеулесова А.М.

Интегралдық қосынды.

Анықталған интеграл.



Анықтама 1. Қисық сызықты трапеция деп Оху жазықтығындағы Ох осімен, $x = a$ және $x = b$ түзулерімен шектелген облысты айтамыз, мұндағы $a < b$ және $y = f(x)$ функциясының графигі $[a, b]$ аралығында үзіліссіз

Анықтама 2. $[a, b]$ кесіндісін тең n бөлікке бөлу деп осы кесіндіден алынған $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ сандар жиынтығын айтамыз, мұндағы $x_0 = a$ және $x_n = b$.

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} S_n = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

Теорема. Анықталған интегралдың мәні интеграл астындағы функцияның кез келген алғашқы функциясының жоғарғы және төменгі шектерінің айырымына тең:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ мұндағы } F'(x) = f(x)$$

Бұл теңдік Ньютон – Лейбниц формуласы деп аталады.

$$\int_a^b (u + v + \dots + w) dx = \int_a^b u dx + \int_a^b v dx + \dots \int_a^b w dx$$

$$\int_a^b c u dx = c \int_a^b u dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Анықталған интегралдарды есептеу әдістері

Айнымалыны ауыстыру

Ескерте кететін бір жағдай: интегралдау айнымалысын басқа бір тәуелсіз айнымалысымен ауыстырғаннан анықталған интеграл өзгермей қалады:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy = \int_a^b f(z) dz.$$

Теорема. Айталық, $f(x)$ функциясы $[a, b]$ сегментінде үздіксіз болсын. Ал, $x = \varphi(t)$ функциясының $[\alpha, \beta]$ сегментінде үздіксіз туындысы бар болсын және де $a = \varphi(\alpha)$ мен $b = \varphi(\beta)$ теңдіктері орындалсын.

Сонда:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Бөліктеп интегралдау

Енді $u = u(x)$ және $v = v(x)$ функциялары (a, b) аралығында дифференциалданатын болса, онда,

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (1)$$

Бұл формуланы анықталған интегралды **бөліктеп интегралдау** формуласы деп атайды. Енді (1) формуланы дәлелдейік:

Ньютон-Лейбниц формуласы бойынша:

$$u v \Big|_a^b = \int_a^b (uv)' dx = \int_a^b d(uv) = \int_a^b v du + \int_a^b u dv$$

Бұдан ізделінді формуласы шығады:

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Теорема (анықталған интегралды бағалау жөнінде). *Анықталған интегралдың мәні* интеграл ішіндегі функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерінің интегралдау интервалына көбейтінділерінің арысында болады, яғни

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a), \quad a < b,$$

мұндағы m және M - мәндері $f(x)$ функциясының $[a;b]$ интервалындағы сәйкес ең үлкен және ең кіші мәндері.

Теорема. *Егер $[a;b]$ интервалының әрбір x нүктесінде*

$\psi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x)$ болса, онда

$$\int_a^b \psi(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Теорема (орта мән жайында). *$[a;b]$ интегралдау интервалында*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(\xi)$$

теңдігі орындалатындай ең болмағанда бір $x=\xi$ нүктесі бар болады.

v

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left| x = \sin t, dx = \cos t dt; x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow \left(t = \frac{\pi}{2} \right) \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt =$$

$$\frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{\pi}{4}.$$

3-мысал. $\int_1^e x \ln x dx = \int_1^e \ln x d \frac{x^2}{2} = \left| u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx, v = \frac{x^2}{2} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx =$

$$= \frac{e^2}{2} \ln e - 0 - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

Бекіту сұрақтары

- ▶ Анықталған интеграл. Анықталған интегралдың геометриялық және физикалық мағыналары.
- ▶ Анықталған интегралдың қасиеттері.
- ▶ Анықталған интегралды есептеу. Ньютон-Лейбниц формуласы