ТЕПЛОВАЯ ЗАДАЧА

Запишем уравнение энергии: $$u\frac{\partial T}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial T}{\partial y}=a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Введем замену переменных и получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\Delta T = T - T_\infty = \Psi(x)\theta(\varphi) \qquad \textbf{(5)}$$

$$\varphi = Xy = Bx^\beta y$$

При $\varphi = \infty \longrightarrow T = T_\infty = const$

$$u\frac{\partial \Delta T}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial \Delta T}{\partial y}=a\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial y^2} \qquad \textbf{(6)}$$

$$u\frac{\partial (T-T_\infty)}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial (T-T_\infty)}{\partial y}=a\frac{\partial^2 (T-T_\infty)}{\partial y^2}$$

$$u = fF'(\varphi) = Ax^{\alpha}F'(\varphi)$$

$$\upsilon = -\frac{f'}{X}F - \frac{fX'}{X^2}\left(\varphi F' - F\right)$$

(5)

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial x} = \Psi'\theta + \Psi\theta' y X' = \Psi'\theta + \Psi\theta'\frac{\varphi X'}{X}$$

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial y} = \Psi\theta' X$$

$$\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial y^2} = \Psi\theta'' X^2$$

Подставим в уравнение (6)

$$fF'\left(\Psi'\theta + \Psi\theta'\varphi\frac{X'}{X}\right) - \left[\frac{f'}{X}F + \frac{fX'}{X^2}\left(\varphi F' - F\right)\right]\Psi\theta' X = a\Psi\theta'' X^2$$

Преобразуем:

$$fF'\Psi'\theta - f'F\Psi\theta' + \frac{FX'}{X}f\Psi\theta' = a\Psi X^2\theta'' \qquad \textbf{(7)}$$

Решениями являются функции: $\theta; F'$

$$\left.\begin{array}{l} \Psi X^2 \\ f\dfrac{X'}{X}\Psi \\ f\Psi' \\ f'\Psi \end{array}\right\}$$ **- коэффициенты, которые пропорциональны друг другу**

$$f\Psi' \sim f'\Psi \sim f\frac{X'}{X}\Psi \sim \Psi X^2$$ **или** $$\frac{\Psi}{\Psi'} = l\frac{f}{f'}$$

После интегрирования: $\Psi = ñonstf^{l}$

$$f = Ax^{\alpha} \longrightarrow \Psi = const\left(Ax^{\alpha}\right)^{l} = \tilde{A}x^{\gamma} \longrightarrow \Psi = \Gamma x^{\gamma}$$ Г, γ - постоянные

(7) $$\longrightarrow Ax^{\alpha}\Gamma\gamma x^{\gamma-1}F'\theta - A\alpha x^{\alpha-1}\Gamma x^{\gamma}F\theta' + A\frac{\Gamma x^{\gamma}B\beta x^{\beta-1}}{Bx^{\beta}}x^{\alpha}F\theta' = a\Gamma x^{\gamma}B^2x^{2\beta}\theta''$$

$$Ax^{\alpha+\gamma-1}\gamma F'\theta - A\alpha x^{\alpha-1+\gamma}F\theta' + A\beta x^{\alpha-1+\gamma}F\theta' = B^2 a x^{2\beta+\gamma}\theta'' \quad \textbf{(8)}$$

Чтобы решение не зависело от *x*, необходимо чтобы:

$$\alpha+\gamma-1 = 2\beta+\gamma \longrightarrow \alpha - 1 = 2\beta$$

- условие автомодельности

$$\textbf{(8)} \longrightarrow \theta'' + \frac{A\alpha F\theta'}{B^2 a} - \frac{A\gamma F'\theta}{B^2 a} - \frac{A\beta F\theta'}{B^2 a} = 0$$

$$\theta'' + \frac{A}{aB^2}\left(\alpha F\theta' - \gamma F'\theta - \beta F\theta'\right) = 0$$

$$\theta'' + \frac{A}{aB^2}\left\{(\alpha-\beta)F\theta' - \gamma F'\theta\right\} = 0$$

$$\alpha - \beta = \frac{\alpha+1}{2} \longrightarrow \boxed{\theta'' + \frac{A}{2aB^2}\left[(\alpha+1)F\theta'' - 2\gamma F'\theta\right] = 0}$$

Автомодельное уравнение для безразмерной температуры

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Уравнение движения:

$$\boxed{F''' + \frac{A}{2\nu B^2}\left[(\alpha+1)FF'' - 2\alpha F'^2\right] = 0} \qquad \textbf{(9)}$$

Уравнение для температуры:

$$\boxed{\theta'' + \frac{A}{2aB^2}\left[(\alpha+1)F\theta'' - 2\gamma F'\theta\right] = 0} \qquad \textbf{(10)}$$

$A, B, \alpha, \beta, \Gamma, \gamma$ **- константы автомодельности, которые находятся из граничных и интегральных условий задачи**

$F'(\varphi)$ **- профиль скорости**

$\theta(\varphi)$ **- профиль температуры**

Решения уравнений (9) и (10)