Лекция 10. Поток векторного поля и дивергенция

Поток векторного поля и дивергенция

Пусть в пространственной области D задано векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$. Выберем гладкую двустороннюю поверхность S в D (не обязательно замкнутую) и зафиксируем с помощью единичного вектора $\boldsymbol{n}(M)$ нормали одну из ее сторон (рис. 1). В случае замкнутой поверхности S зафиксируем ее внешнюю сторону, полагая, что $\boldsymbol{n}(M)$ - единичный вектор внешней нормали.

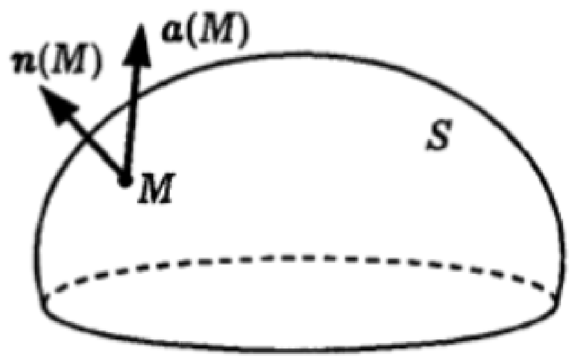

Рис. 1

Поверхностный интеграл

$$Q_S = \int\limits_S \boldsymbol{a}(M)\boldsymbol{n}(M)dS = \int\limits_S a_n(M)dS, \tag{10.1}$$

где $a_n(M) = \boldsymbol{a}(M)\boldsymbol{n}(M)$ - проекция вектора $\boldsymbol{a}(M)$ на направление единичного вектора $\boldsymbol{n}(M)$, называют потоком векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ через поверхность S в направлении, заданном выбором единичного вектора нормали к S.

Величина Q_S представлена повергмостньи иктегралом первого рода от функции $a_n(M) = \boldsymbol{a}(M)\boldsymbol{n}(M)$. Для его существования достаточно, чтобы векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ было непрерывным в D или хотя бы в точках гладкой поверхности S.

При изменении ориентации поверхности, т.е. при выборе противоположной стороны этой поверхности, значение Q_S изменит знак, так как изменит знак проекция $a_n(M)$. Если поверхность S такова, что в каждой ее точке M векторы $\boldsymbol{a}(M)$ и $\boldsymbol{n}(M)$ составляют острый угол (в этом случае говорят, что векторные ликии пересекают поверхность в направлении нормали к ней), то $Q_S > 0$, поскольку $a_n(M) > 0, M \in S$. Если же в каждой точке M поверхности векторы $\boldsymbol{a}(M)$ и $\boldsymbol{n}(M)$ составляют тупой угол (векторные линии пересекают поверхность в направлении, противоположном вектору нормали), то $a_n(M) < 0$, $M \in S$, и $Q_S < 0$.

Поверхность S может быть векторной поверткостью векторного поля а (M) или его векторной трубкой. В этом случае поток вектора $\boldsymbol{a}$ через S равен нулю, так как $\boldsymbol{a}(M)\boldsymbol{n}(M) = 0$, $M \in S$, в силу ортогональности вектора $\boldsymbol{a}(M)$ вектору $\boldsymbol{n}(M)$ нормали к S в каждой точке поверхности (см. Лекция 9).

Понятию потока векторного поля можно придавать различные физические интерпретации, выбирая разные физические трактовки векторного поля. Сам термин "поток" заимствован из гидродинамической задачи вычисления объемного расхода жидкости через заданную поверхность. Если векторное поле $\boldsymbol{v}(M)$ описывает поле скоростей при течении жидкости в области D, то объем жидкости, проходящий через элементарную площадку $dS(M)$ в окрестности точки $M \in S \subset D$ в единицу времени, равен $dQ(M) = \boldsymbol{v}(M)\boldsymbol{n}(M)dS(M)$. Интегрирование по поверхности S даст объем жидкости

$$Q = \int\limits_S \boldsymbol{v}(M)\boldsymbol{n}(M)dS(M), \tag{10.2}$$

проходящий в единицу времени через всю эту поверхность, т.е. объемный расход жидкости через поверхность S. Как видим, объемный расход жидкости через поверхность S равен потоку векторного поля скоростей жидкости через S.

Пусть векторное поле $\boldsymbol{q}(M)$ в области M описывает плотность теплового потока. Тогда количество теплоты, проходящей в единицу времени через элементарную площадку $dS(M)$, в окрестности точки $M \in S$ равно $dQ(M) = \boldsymbol{q}(M)\boldsymbol{n}(M)dS(M)$. Поэтому тепловой поток через поверхность S (т.е. количество теплоты, проходящей через S в единицу времени) равен потоку векторного поля $\boldsymbol{q}(M)$ через поверхность S:

$$Q = \int\limits_S \boldsymbol{q}(M)\boldsymbol{n}(M)dS(M). \tag{10.3}$$

Как и расход жидкости через поверхность, тепловой поток может иметь положительное, нулевое или отрицательное значение. Отметим, что нулевое значение теплового потока отнюдь не означает, что через поверхность нет теплообмена. В этом случае можно лишь констатировать совпадение количеств теплоты, проходящей через поверхность в противоположных направлениях.

Пример 10.1.

Рассмотрим силовое поле $\boldsymbol{a}(M)$ тяготения, создаваемое точечной массой m_0, помещенной в начале координат (см. пример 9.5, Лекция 9). Это поле описывается векторной функцией $a(r)$ вида

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = -G\frac{m_0}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}. \tag{10.4}$$

Для потока этого векторного поля через поверхность S имеем

$$\int\limits_S \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\boldsymbol{d}dS = -Gm_0\int\limits_S \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}ndS = -Gm_0\int\limits_S \frac{\cos(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}})}{|\boldsymbol{r}|^2}dS = -Gm_0\Omega_S$$

где $\boldsymbol{n}$ - единичный вектор нормали к поверхности S, а

$$\Omega_S = \int\limits_S \frac{\cos(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}})}{|\boldsymbol{r}|^2}dS$$

Величиной Ω_S измеряется телесный угол [1], под которым поверхность S видна из начала координат. #

Рассмотрим поток векторного поля $\boldsymbol{v}(M)$ через замкнутую поверхность S. Векторное поле будем трактовать как поле скоростей течения жидкости. В этом случае положительное значение потока векторного поля через замкнутую поверхность S означает, что из области, ограниченной поверхностью S, вытекает жидкости больше, чем в нее втекает. Значит, в области имеются точки или подобласти, в которых жидкость образуетРассмотрим поток векторного поля $\boldsymbol{v}(M)$ через замкнутую поверхность S. Векторное поле будем трактовать как поле скоростей течения жидкости. В этом случае положительное значение потока векторного поля через замкнутую поверхность S означает, что из области, ограниченной поверхностью S, вытекает жидкости больше, чем в нее втекает. Значит, в области имеются точки или подобласти, в которых жидкость образуется (например, происходит образование воды при таянии снега или льда). Точки такого рода называют **источниками векторного поля**. Аналогично отрицательное значение потока через поверхность S означает, что в область втекает жидкости больше, чем из нее вытекает.

[1] Под телесным углом понимают часть пространства, заключенную внутри конической поверхности. Телесный угол измеряют площадью единичной сферы, вырезаемой конической поверхностью, причем центр сферы расположен в вершине конической поверхности. Единица измерения телесного угла - стерадиан, выражающий величину телесного угла, который на единичной сфере вырезает площадь, равную единице

Значит, в области есть точки, в которых жидкость исчезает (например, испаряется или замерзает). Такие точки называют **стоками векторного поля**.

Источники и стоки могут быть точечными или распределенными. На наличие точечных источников в области указывают векторные линии, начинающиеся в области, а на наличие точечных стоков - векторные линии, заканчивающиеся в области. На рис. 2 точка M_1 возникновения векторных линий является источником, а точка M_2 окончания векторных линий - стоком.

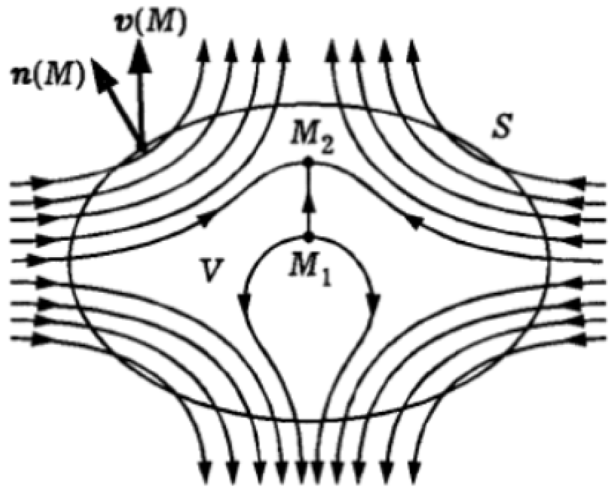

Рис. 2

Точечный источник или сток характеризуют интенсивностью, равной объему жидкости, которая возникает или исчезает в этой точке в единицу времени, а распределенные источники и стоки - плотностью интенсивности, т.е. количеством жидкости, возникающей или исчезающей в единице объема в единицу времени. Интенсивность стоков удобно считать отрицательной, полагая, что сток - это источник отрицательной интенсивности. Тогда поток Q векторного поля скоростей через поверхность S получает естественную интерпретацию как суммарная интенсивность всех источников и стоков в области, ограниченной этой поверхностью.

Понятия источника (стока) и его интенсивности в задачах различного физического содержания приобретают различный смысл. Так, в случае векторного поля электрической напряженности роль источников (стоков) играют положительные (отрицательные) заряды, а их интенсивность измеряется величиной этих зарядов. Если же векторное поле описывает тепловой поток, то источники и стоки характеризуют выделение и поглощение теплоты, причем интенсивность источника (стока) представляет собой количество теплоты, выделяемой (поглощаемой) в единицу времени.

Остановимся на случае распределенных источников векторного поля. Такие источники могут быть распределены по некоторой области пространства, по некоторой поверхности или линии. Если источники распределены по области D, ограниченной замкнутой поверхностью S, то отношение потока Q_S векторного поля через поверхность S к объему V области D есть средняя плотность источников векторного поля в области D. Зафиксировав некоторую точку M, полагая, что область D содержит M, перейдем к пределу при $d_D \to 0$ (d_D- диаметр области D):

$$\lim_{d_D\to 0}\frac{Q_S}{V} = \lim_{d_D\to 0}\frac{1}{V}\oint\limits_S \text{ and } dS. \qquad (10.5)$$

Если этот предел существует, то его значение определяет интенсивность распределенного источника векторного поля в точке M. Отметим, что этот предел аналогичен пределу, определяющему плотность вещества в точке (см. пример 9.1, Лекция 9).

Предел (10.5), если он существует, называют **дивергенцией** (иногда расходимостью) векторного поля $\boldsymbol{a}$ в точке $M \in D$, заданного в пространственной области D, и обозначают через $\operatorname{div} a$. Символ div образован из первых букв латинского слова divergentia - расхождение. Этот символ, как и сам термин "дивергенция", ввел в 1878 г. У.К. Клиффорд [2]. Величину с противоположным знаком Дж.К. Максвелл называл конвергенцией и обозначал conv (от латинского слова convergo - схожусь).

Дивергенция $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ векторного поля $\boldsymbol{a}$ в точке M есть скаляр (действительное число). Рассматривая дивергенцию в каждой точке области определения векторного поля $\boldsymbol{a}$, мы получаем скалярное поле $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$. Обратим внимание на то, что градиент $\operatorname{grad} u$ скалярного поля u есть векторное поле, в то время как дивергенция $\operatorname{div}\,\boldsymbol{a}$ векторного поля $\boldsymbol{a}$ есть скалярное поле.

Дивергенция векторного поля в заданной точке, как предел отношения потока векторного поля к объему, не связана с выбором системы координат. Однако вычисление дивергенции в конкретном случае скорее всего потребует использования какой-либо системы координат. Выясним, как дивергенция векторного поля записывается в прямоугольной системе координат.

Пусть векторное поле $a(M)$ непрерывно дифференцируемо в пространственной области D, т.е. в некоторой прямоугольной системе координат

[2] У.К. Клиффорд (1845-1879) - английский математик

$Ox_1x_2x_3$ представлено непрерывно дифференцируемой векторной функцией

$$\boldsymbol{a}\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(a_1\left(x_1,x_2,x_3\right)a_2\left(x_1,x_2,x_3\right)\quad a_3\left(x_1,x_2,x_3\right)\right)^{\mathbf{T}}.$$

Выберем в области D замкнутую поверхность S и определим единичный вектор внешней нормали к этой поверхности в точке M с помощью направляющих косинусов $n_1(M),n_2(M),n_3(M)$.

Тогда, раскрывая скалярное произведение $\boldsymbol{an}$ в ортонормированном базисе и применяя формулу Остроградского Гаусса, для интеграла в (10.5) получим

$$\oint\limits_S \boldsymbol{an}dS=\oint\limits_S\sum_{i=1}^{3}a_in_idS=\int\limits_V\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial a_i}{\partial x_i}dV. \tag{10.6}$$

Используя непрерывность частных производных $\dfrac{\partial a_i}{\partial x_i}$ в области D, теорему о среднем значении для тройного интеграла и определение (10.5) дивергенции векторного поля, в произвольной точке M находим

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M)=\lim_{d_D\to 0}\frac{1}{V}\int\limits_V\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial a_i}{\partial x_i}dV=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial a_i(M)}{\partial x_i}. \tag{10.7}$$

Таким образом,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}\left(x_1,x_2,x_3\right)=\frac{\partial a_1\left(x_1,x_2,x_3\right)}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2\left(x_1,x_2,x_3\right)}{\partial x_2}+\frac{\partial a_3\left(x_1,x_2,x_3\right)}{\partial x_3}. \tag{10.8}$$

Операция вычисления дивергенции обладает свойством линейности: для произвольных дифференцируемых векторных полей $\boldsymbol{a}(M)$ и $\boldsymbol{b}(M)$ и произвольных $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ верно равенство

$$\operatorname{div}(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b})=\alpha\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\beta\operatorname{div}\boldsymbol{b}. \tag{10.9}$$

Аналогом правила дифференцирования произведения можно назвать следующее свойство. Если $f(M)$ - дифференцируемое в D скалярное поле, а $\boldsymbol{a}(M)$ - дифференцируемое в D векторное поле, то

$$\operatorname{div}(f\boldsymbol{a})=f\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\operatorname{grad}f. \tag{10.10}$$

В самом деле, в соответствии с (10.8) и правилом дифференцирования произведения находим

$$\operatorname{div}(f\boldsymbol{a}) = \frac{\partial (fa_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (fa_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial (fa_3)}{\partial x_3} = f\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\right) + \\ + a_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + a_3\frac{\partial f}{\partial x_3} = f\operatorname{div}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\operatorname{grad} f.$$

Если $\boldsymbol{a}$ - постоянное (однородное) векторное поле, то $\operatorname{div}\boldsymbol{a} = 0$. В этом случае $\operatorname{div}(f\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}\operatorname{grad} f$. #

Пример 10.2.

Вычислим дивергенцию векторного поля $\boldsymbol{v}$ скоростей точек твердого тела, вращающегося относительно оси Ox_3 с угловой скоростью Ω.

Указанное векторное поле описывается функцией

$$\boldsymbol{v}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\Omega x_2 & \Omega x_1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathbf{T}}.$$

Используя (10.8), находим

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial(-\Omega x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\Omega x_1)}{\partial x_2} = 0.$$

Таким образом, дивергенция поля скоростей вращающегося твердого тела в любой точке тела равна нулю. #

Пример 10.3.

Центральное векторное поле с центром в начале координат описывается векторной функций вида $\boldsymbol{a}(r) = f(r)\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{r}$ - радиус-вектор точки, а $r = |\boldsymbol{r}|$. Полагая, что функция $f(r)$ дифференцируема, вычислим дивергенцию этого векторного поля.

Центральное векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = f(r)\boldsymbol{r}$ можно рассматривать как произведение скалярного поля $f(r)$ и векторного поля $\boldsymbol{r}$. Считаем, что центром векторного поля является начало прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$. Тогда $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$ и

$$\operatorname{div}\boldsymbol{r} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} = 3. \tag{10.11}$$

Для скалярного поля $f(r)$ с учетом равенства $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ и правила дифференцирования сложной функции имеем

$$\operatorname{grad} f(r) = \begin{pmatrix} f'(r)\dfrac{\partial r}{\partial x_1} & f'(r)\dfrac{\partial r}{\partial x_2} & f'(r)\dfrac{\partial r}{\partial x_2} \end{pmatrix}^{\mathbf{T}} = \frac{f'(r)}{r}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^{\mathbf{T}} = \frac{f'(r)}{r}\boldsymbol{r}.$$

Теперь в соответствии с (10.10) получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{a} &= f(r) \operatorname{div} \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r} \operatorname{grad} f(r) = \\ &= 3f(r) + \boldsymbol{r}\frac{f'(r)}{r}\boldsymbol{r} = 3f(r) + rf'(r). \end{aligned} \tag{10.12}$$

В частности, если производная функции $f(r)$ ограничена в окрестности точки $r = 0$, то $rf'(r) \to 0$ при $r \to 0$, и в этом случае дивергенция центрального векторного поля в его центре равна $3f(0)$.

Остановимся на частном случае центрального векторного поля - силовом поле тяготения, создаваемого материальной точкой массой m_0, помещенной в начало координат. В этом случае в соответствии с (10.4) имеем $f(r) = -\dfrac{Gm_0}{r^3}$, где $G-$ гравитационная постоянная (см. пример 9.1, Лекция 9). Силовое поле, создаваемое в пустоте помещенным в начало координат электрическим зарядом q_0, имеет аналогичный вид с $f(r) = q_0/\left(4\pi\varepsilon_0 r^3\right)$, где ε_0- электрическая постоянная (см. пример 9.1, Лекция 9). Для этих полей можем записать $f(r) = A/r^3$, где $A = \text{const}$. Эта функция дифференцируема при $r \neq 0$, так что подставляя ее в (10.12), находим

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = 3\frac{A}{r^3} + r\left(-3\frac{A}{r^4}\right) = 0, \quad r \neq 0$$

т.е. дивергенция рассмотренных силовых полей при $r \neq 0$ равна нулю. #

Понятия потока и дивергенции векторного поля позволяют получить более краткую **векторную запись формулы Остроградского - Гаусса**. Для этого в формуле нужно рассмотреть поверхностный интеграл как поток некоторого векторного поля, а тройной интеграл - как интеграл от дивергенции того же векторного поля.

Теорема 10.1. *(теорема Остроградского - Гаусса). Если векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ дифференцируемо в пространственной области D, то для любой замкнутой области $V \subset D$, ограниченной замкнутой кусочно гладкой поверхностью S, верно равенство*

$$\oint\limits_S \boldsymbol{a}\boldsymbol{n} dS = \int\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{a} dV$$

где $\boldsymbol{n}$ - единичный вектор внешней нормали к поверхности S.

Вопросы для закрепления

1. Что называют потоком векторного поля через поверхность, и как он определяется?
2. В каком случае поток векторного поля через замкнутую поверхность будет равен нулю?
3. Как влияет направление нормали к поверхности на значение потока векторного поля через неё?
4. Каковы физические интерпретации потока векторного поля, если векторное поле описывает поле скоростей жидкости или плотность теплового потока?
5. Что происходит с потоком векторного поля, если поменять ориентацию поверхности на противоположную?
6. Какую роль играет угол между вектором векторного поля и нормалью к поверхности в определении знака потока?
7. Какие точки или области называются источниками и стоками векторного поля, и как они связаны с потоком через замкнутую поверхность?
8. Как вычисляется дивергенция векторного поля, и что она характеризует?
9. Каким образом формула для дивергенции векторного поля выражается в прямоугольной системе координат?
10. Перечислите основные свойства операции дивергенции?