№4-дәріс. Жазықтықтағы түзудің теңдеулері

1. Берілген нүктеден берілген векторға перпендикуляр өтетін түзудің теңдеуі

Түзудің бойында жатқан $M_0(x_0,y_0)$ нүктесі және оған перпендикуляр $\overline{n}=(A,B)$ векторы берілген. Түзудің бойынан кез келген $M(x;y)$ нүктесін аламыз. Сонда $\overline{M_0M}=(x-x_0;\,y-y_0)$ болады. $\overline{M_0M}$ векторы түзудің бойында жатқандықтан $\overline{M_0M}\perp\overline{n}$ болады. Сондықтан олардың скалярлық көбейтіндісі $\overline{n}\cdot\overline{M_0M}=0$, яғни

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \qquad (4.1)$$

Бұдан $\overline{n}=(A,B)$ векторы түзуге перпендикуляр екендігі шығады. Түзуге перпендикуляр кез келген вектор түзудің нормалы немесе нормалдық векторы деп аталады.

2. Түзудің жалпы теңдеуі

(4.1) теңдеуінде жақшаларды ашып, $-Ax_0-By_0=C$ деп белгілесек, түзудің жалпы теңдеуі шығады

$$Ax+By+C=0 \qquad (4.2)$$

Егер $A=0$ болса, онда түзу Ox өсіне параллель өтеді; егер $B=0$ болса, онда түзу Oy өсіне параллель өтеді; егер $C=0$ болса, онда түзу жүйенің бас нүктесі арқылы өтеді.

3. Түзудің бұрыштық коэффициент арқылы берілген теңдеуі. Егер $B\neq 0$ болса, онда (4.2) теңдеуінен $y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}$ $\left(-\dfrac{A}{B}=k,\ -\dfrac{C}{B}=b\right)$:

$$y=kx+b \qquad (4.3)$$

4. Екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі. Түзу $M_0(x_0,y_0)$ және $M_1(x_1,y_1)$ нүктелерінен өтсін. Түзудің бойынан кез келген $M(x;y)$ нүктесін аламыз. Сонда бұл түзудің теңдеуі төмендегідей болады:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0} \qquad (4.4)$$

5. Түзудің кесінділік теңдеуі

Түзу $M_0(a,0)$ және $M_1(0,b)$ нүктелері арқылы өтсін. Сонда (4.4) формуласынан түзудің кесінділік теңдеуін аламыз:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (4.5)$$

6. Берілген нүктеден өтетін түзудің теңдеуі

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad (4.6)$$

7. Екі түзудің арасындағы бұрыш. $y=k_1x+b_1$ және $y=k_2x+b_2$ түзулерінің арасындағы бұрыштың формуласы:

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} \qquad (4.7)$$

Осыдан егер түзулер параллель болса, онда $k_1=k_2$, ал түзулер перпендикуляр болса, онда $k_1=-\dfrac{1}{k_2}$ болады. Түзулер $A_1x+B_1y+C_1=0$ және $A_2x+B_2y+C_2=0$ теңдеулерімен берілсе, онда $\overline{n_1}=(A_1;B_1)$, $\overline{n_2}=(A_2;B_2)$ болғандықтан түзулердің арасындағы бұрыш осы екі нормальдің арасындағы бұрышқа тең:

$$cos\,\varphi=\frac{\overline{n_1}\,\overline{n_2}}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \qquad (4.8)$$

Осыдан егер түзулер параллель болса, онда $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$, ал перпендикуляр болса, онда $A_1A_2+B_1B_2=0$ болады.

8. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық. $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінен $Ax+By+C=0$ түзуіне дейінгі қашықтықтың формуласы:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{4.9}$$

2-мысал. $O(0;0)$ нүктесінен $6x+8y+20=0$ түзуіне дейінгі қашықтықты табу керек.

$$d=\frac{|6\cdot 0+8\cdot 0+20|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{20}{10}=2$$

Екінші ретті қисықтар мен беттер. Екінші ретті қисықтар

1. Шеңбер

Анықтама. Центр деп аталатын берілген нүктеден бірдей қашықтықта жататын жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орындарын ***шеңбер*** деп атайды.

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

(6.1)

(6.1) – теңдеуі центрі $C(x_0, y_0)$ нүктесінде жатқан радиусы *R*-ге тең шеңбердің теңдеуі.

Егер шеңбердің центрі C координаттардың бас нүктесінде жатса, яғни $x_0=y_0=0$ болса, онда (6.1) мына түрге келеді:

$$x^2+y^2=R^2 \tag{6.2}$$

2. Эллипс

Анықтама. Фокустар деп аталатын берілген екі нүктеден қашықтықтарының қосындысы тұрақты шама болатын жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орындарын **эллипс** деп атайды.

Анықтама бойынша $F_1M+F_2M=2a$, мұндағы F_1 және F_2- фокустар деп аталатын берілген нүктелер, $M(x, y)$-эллипстің бойындағы кез келген нүкте, $2a$ -тұрақты шама.

Егер $F_1F_2=2c$ десек, онда $F_1M=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $F_2M=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Енді осы мәндерді $F_1M+F_2M=2a$ теңдеуіне қойып, түрлендіріп, эллипстің канондық теңдеуін аламыз:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{6.3}$$

мұндағы $a-$эллипстің үлкен жарты өсі, $b-$оның кіші жарты өсі болады. $b-$ны табу үшін эллипстің бойынан $M_1(0;b)$ нүктесін аламыз. $F_1M_1=F_2M_1$ болғандықтан $2F_1M_1=2a$ немесе $F_1M_1=a$ болады. Пифагор теоремасы бойынша $a^2=b^2+c^2$. Осыдан $b^2=a^2-c^2$ деп белгілейміз. $\varepsilon=\frac{c}{a}$ қатынасын эллипстің эксцентриситеті деп атайды. $a>c$ болғандықтан $\varepsilon<1$. $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ эллипстің директрисаларының теңдеуі. Ол эллипстің сыртында жатады.

3. Гипербола

Анықтама. Фокустар деп аталатын берілген екі нүктеден қашықтықтарының айырмасының абсолюттік шамасы тұрақты *2a*-ға тең болатын жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орындарын **гипербола** деп атайды.

Гиперболаның канондық теңдеуі былай жазылады:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (6.4)$$

Мұндағы $b^2=c^2-a^2$, a - гиперболаның нақты жарты өсі, $b-$жорымал жарты өсі, $\varepsilon=\frac{c}{a}$ гиперболаның эксцентриситеті, $c>a$ болғандықтан $\varepsilon>1$. Егер гиперболаның $M(x,y)$ нүктесі шексіздікке ұмтылғанда $M(x,y)$нүктесінен түзуге дейінгі қашықтық нөлге ұмтылса, онда мұндай түзуді гиперболаның асиптотасы дейді. Гиперболаның асимптоталарының теңдеулері: $y=\frac{b}{a}x$ және $y=-\frac{b}{a}x$, мұндағы a және $b-$гиперболаның жарты өстері. $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ гиперболаның директрисаларының теңдеуі. Гиперболаның директрисалары оның төбелерінің арасында жатады.

4. Парабола

Анықтама. Фокус деп аталатын берілген нүктеден және директриса деп аталатын берілген түзуден ара қашықтықтары бірдей болатын жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орындарын ***парабола*** дейді.

$$y^2=2px \qquad (6.5)$$

мұндағы $p-$берілген фокус пен директрисаның арасындағы қашықтық. Параболаның директрисасының теңдеуі: $x=-\frac{p}{2}$. $y^2=2px$ параболасы Ox өсіне симметриялы орналасады.

5. Екінші ретті қисықтың жалпы теңдеуі

$$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

(6.6)

Теорема. (6.6) теңдеуі әрқашан не шеңберді (егер $A=C$), не эллипсті (егер $A\cdot C>0$), не гиперболаны (егер $A\cdot C<0$), не параболаны (егер $A\cdot C=0$) анықтайды. Бұл жағдайларда эллипс (шеңбер) нүктеге немесе жорымал эллипске (шеңберге), гипербола қиылысатын түзулердің жұбына, парабола параллель түзулердің жұбына айналуы мүмкін.

1-мысал. $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$ теңдеуін канондық түрге келтіру керек.

$A=4,\ C=9,\ A\cdot C=36>0-$ эллипстің теңдеуі.

$$\left(4x^2-40x\right)+\left(9y^2+36y\right)+100=0$$

$$\Rightarrow 4\left(x^2-10x+25\right)-100+9\left(y^2+4y+4\right)-36=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow 4(x-5)^2+9(y+2)^2=36\Rightarrow\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$. Осыдан $x-3=X,\ y+2=Y$ деп белгілесек $\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=1$ -эллипстің канондық теңдеуі, Бұл жүйенің басы $O'(5,-2)$ нүктесінде орналасқан.

Екінші ретті беттер

1. Сфера. Берілген нүктеден бірдей қашықтықта орналасқан кеңістіктегі нүктелердің геометриялық орындарын ***сфералық*** немесе ***шар беті*** дейді. Оның канондық теңдеуі:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

мұндағы $C(a,b,c)-$ сфераның центрі. Егер сфераның центрі $O(0,0,0)$нүктесінде болса, онда оның теңдеуі мына түрде болады: $x^2+y^2+z^2=R^2$

2. Цилиндр. Цилиндр перпендикулярлық қимасындағы сызықтың түріне қарай дөңгелек, эллипстік, гиперболалық және параболалық цилиндрлер деп төртке бөлінеді.Осыған сәйкес төменгі теңдеулермен анықталады: $x^2 + y^2 = R^2$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $y^2 = 2px$.

Бұл теңдеулер жазықтықта шеңберді, эллипсті, гиперболаны және параболаны кескіндейді, ал кеңістікте цилиндрлердің теңдеулері. Бұл цилиндрлердің жасаушылары Oz өсіне параллель болады.

3. Конус

Конус деп берілген нүктеден өтетін және бағыттаушы қисықтың бойымен жылжитын жасаушы түзудің үздіксіз қозғалысынан шығатын геометриялық бетті айтады. Оның теңдеуі: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$. Бұл конустың бағыттаушысы $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипс, ал жасаушы түзуі координаталардың бас нүктесінен өтеді. Егер конустың перпендикулярлық қимасы шеңбер болса, онда оның теңдеуі: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ болады; егер $a=b=c$ болса, онда конустың теңдеуі $x^2+y^2-z^2=0$ болады.

4. Айналу беттері. Егер кеңістікте бір сызық берілген өсті айналса, оның айналуынан бет пайда болады. Айналушы сызықтың формасына байланысты бет әр түрлі болады. Мысалы, шеңбер өзінің диаметрі бойынша айналса, сфералық бет шығады, ал координаталар басынан өтетін түзу Oz өсін айналса, дөңгелек конус пайда болады. Сызықтың айналатын өсін айналу өсі, ал пайда болған ***бетті айналу беті*** дейді.

5. Эллипсоидтың теңдеуі: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, мұндағы $a,b,c-$ жарты өстер. Бұл үш өсті эллипсодтың теңдеуі болады. $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсін Oz өсімен айналдырғаннан шыққан бетті айналу эллипсоиды деп атайды. Оның теңдеуі: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

6. Бір қуысты гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ гиперболасын Oz өсінен айналдырсақ бір қуысты гиперболоид деп аталатын айналу беті шығады, оның теңдеуі: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

7. Екі қуысты гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

8. Эллипстік параболоид $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$, мұндағы $p>0,\ q>0$.

9. Гиперболалық параболоид $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$, мұндағы $p>0,\ q>0$.

Әдебиеттер: 1 нег.[100-126], 11 қос. [41-58], [198-210].

Бақылау сұрақтар:

1. Эллипстің анықтамасы.
2. Эллипстің, гиперболаның, параболаның канондық теңдеулерін көрсетіңіз.

3. Гиперболаның асимптотасының теңдеуін жазыңыз.
4. Екінші ретті беттерді атаңыз.
5. Екінші ретті беттерді параллельдік қима әдісімен қалай зерттейді?

Әдебиеттер: 1 нег.[65-84], 11 қос. [156-167], [31-41].

Бақылау сұрақтар:

1. Жазықтықтағы түзудің теңдеуіндегі бұрыштық коэффициенттің геометриялық мағынасы қандай?
2. Жазықтықтағы екі түзудің параллельдік және перпендикулярлық шарттарын айтыңыз.