КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Лектор: Болегенова Салтанат Алихановна
+7 701 386 97 55
e-mail.: Saltanat.Bolegenova@kaznu.kz

МЕТОД ФОН НЕЙМАНА

Цель лекции - Методы исследования конечно-разностных схем на устойчивость

Рассмотрим этот метод на примере того же конечно-разностного уравнения (3.5). Сеточная функция f_i^n представляется в виде разложения Фурье:

$$f_i^n = V_n e^{Ii\theta}$$

где V_n – амплитуда отдельной компоненты с волновым числом $k_x = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ на n-ном временном слое, $\theta = k\Delta x$ – фазовый угол, $\mathrm{I} = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Аналогично

$$f_{i\pm1}^{n+1} = V_{n+1}\, e^{-I(i\pm1)\theta}$$

Подставим эти выражения в уравнение (3.5):

$$V_{n+1}e^{Ii\theta} = V_n e^{Ii\theta} - \frac{c}{2}V_n\left(e^{I(i+1)\theta} - e^{I(i-1)\theta}\right) + \\ + dV_n\left(e^{I(i+1)\theta} + e^{I(i-1)\theta} - 2e^{Ii\theta}\right).$$

Разделив на $e^{Ii\theta}$, получим:

$$V_{n+1} = V_n\left[1 - \frac{c}{2}\left(e^{\mathrm{I}\theta} - e^{\mathrm{I}\theta}\right) + d\left(e^{\mathrm{I}\theta} + e^{-\mathrm{I}\theta} - 2\right)\right].$$

Учтем, что $e^{I\theta} + e^{-I\theta} = 2\cos\theta$, $\quad e^{I\theta} - e^{-I\theta} = 2I\sin\theta$:

$$V_{n+1} = V_n\,[1 - 2d(1-\cos\theta) - IC\sin\theta]$$

Определим множитель перехода G следующим образом:

$$V_{n+1} = GV_n$$

Для того чтобы решение оставалось устойчивым, необходимо потребовать, чтобы

$$|G| \le 1. \qquad (3.12)$$

В данном случае множитель перехода равен:

$$G = 1 - 2d(1-\cos\theta) - IC\sin\theta$$

Он является комплексным выражением, поэтому условие устойчивости $|G|\le 1$ приводится к неравенству:

$[1-2d(1-\cos\theta)]^2-C^2\sin^2\theta \le 1$

Сделав соответствующие преобразования, получим:

$C^2(1+\cos\theta) \le 4d[1-d(1-\cos\theta)]$

Рассмотрим два предельных случая.

а) $\cos\theta=-1$: $0 \le 4d(1-2d)$.

Отсюда получаем первое условие устойчивости:

$d \le \frac{1}{2}$.

Такое же условие было получено методом дискретных возмущений.

б) $\cos\theta=1$: $2C^2 \le 4d \Rightarrow C^2 \le 2d$.

Учитывая предыдущее неравенство, получим второе условие:

$C \le 1$.

Комбинируя эти два условия, можно получить условие устойчивости в следующем виде:

$\Delta t \le \frac{2a}{u^2}$ или $Pe_c \le 2$.

Все эти полученные условия справедливы только в случае линейного уравнения при $u=const$.

Метод практической устойчивости

Этот метод наиболее прост, часто используется на практике, хотя не имеет теоретического обоснования. *Он заключается в том, что необходимо потребовать, чтобы* ***коэффициенты*** *конечно-разностной схемы* ***были положительны, а их сумма не превосходила единицу****.*

Перепишем уравнение (3.5) в виде:

$$f_{i,n+1} = (1-2d)f_{i,n} + \left(d-\frac{C}{2}\right)f_{i+1,n} + \left(d+\frac{C}{2}\right)f_{i-1,n} .$$

Условия устойчивости запишутся следующим образом:

$$1-2d \ge 0 \Rightarrow d \le \frac{1}{2};$$

$$d-\frac{C}{2}\ge 0 \Rightarrow C \le 2d \Rightarrow C \le 1;$$

$d+\frac{C}{2}\ge 0$ – выполняется всегда;

$1-2d+d-\frac{C}{2}+d+\frac{C}{2}=1$ – выполняется всегда.

Мы получили тремя разными методами одинаковые критерии устойчивости. Такой результат получается только для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Подчеркнем еще раз, что *связь между сходимостью, аппроксимацией и устойчивостью заключается в том, что* ***необходимыми условиями сходимости конечно-разностной схемы является ее устойчивость и аппроксимация*** *соответствующего дифференциального уравнения.*

В 1952 г. В.С. Рябеньким была сформулирована **теорема эквивалентности**, которая устанавливает эквивалентность устойчивости и сходимости при выполнении следующих условий:

- решение дифференциального уравнения в частных производных должно непрерывным образом зависеть от начальных условий;
- конечно-разностное уравнение должно аппроксимировать дифференциальное уравнение в частных производных;
- устойчивость должна быть определена в форме фон Неймана.

При выполнении этих требований необходимое условие устойчивости становится и достаточным для сходимости.

Для нелинейных уравнений эта теорема не доказана, но на практике ее используют применительно и к нелинейным уравнениям.

Вообще говоря, исследование строгих определений аппроксимации, устойчивости, сходимости при $\Delta x \to 0$ и $\Delta t \to 0$ занятие зачастую бесплодное, т.к. реальные расчеты проводятся при конечных Δx и Δt.

Контрольные вопросы:

1. Как находят ошибку аппроксимации?
2. Какая КРС называется аппроксимирующей?
3. Какая КРС называется сходящейся?
4. Из-за чего возникает неустойчивость?
5. Напишите число Куранта.
6. Напишите диффузионное число.
7. Напишите условие устойчивости КРС.