

Шәкір Айдос



Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

1 Үзіліссіздік теңдеуі

Кез келген еркін V көлемді қарастырайық. Айталық, dS — V көпбейнесіндегі ∂V бетінің бөлігі болсын. dS —да $\mathbf{u}$ жылдамдықпен қозғалған сығылмайтын ($\rho = \text{const}$) сұйықтықты қарастырайық. dS бетіне тұрғызылған бірлік нормалді η_S арқылы белгілейік. dS бетімен dt уақыт аралығында сұйықтықтың көлемі $dV = \mathbf{u} \cdot \eta_S dS dt$, ал сұйықтықтың массасы $dM = \rho \mathbf{u} \cdot \eta_S dS dt$ немесе

$$\frac{dM}{dt} = \rho \mathbf{u} \cdot \eta_S dS \quad (1.1)$$

өрнекпен анықталады. (1.1) өрнекті ∂V беті бойынша интегралдайтын болсақ, онда V көлемнің ішіндегі массалар өзгерісі:

$$\frac{dM}{dt} = - \iint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \eta_S dS, \quad (1.2)$$

егер Остроградский-Гаусс теоремасын еске түсірсек, онда (1.2) өрнек

$$\frac{dM}{dt} = - \iiint_V \text{div}(\rho \mathbf{u}) dV, \quad (1.3)$$

түрінде болады.

Бір жағынан V көлемнің ішіндегі сұйықтықтың массасы

$$M = \iiint_V \rho dV,$$

және dt уақытта массаның өзгерісі

$$\frac{dM}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (1.4)$$

Демек, (1.3) және (1.4) өрнектерден

$$0 = \iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) \right) dV. \quad (1.5)$$

Бұл теңдеу $V \subseteq \mathbb{R}^d$ үшін

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.6)$$

жағдайда орынды екенін аңғаруға болады және (1.6) теңдеу *үзіліссіздік теңдеуі* деп аталады, физикалық жағынан үзіліссіз сұйықтықтағы массаның қозғалысын сипаттайды. Гидродинамика саласында

көлемінің кішірейуі немесе ұлғаюы барсында тығыздығы тұрақты, басқаша айтқанда, сығылмайтын сұйықтықтар негізгі зерттеу нысаны болып табылады. Сығылмайтын сұйықтықтың математикалық моделі

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

теңдеуімен сипатталады.

2 Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесінің математикалық моделі

Айталық, $\mathbb{R}^d$ кеңістіктің бөлігі $d\tau$ көлемінде сығылмайтын тұтқыр сұйықтықтың қозғалысын қарастырайық. Сұйықтық қозғалысқа түсу үшін оған әсер ететін толық күш келесі өрнекпен анықталады

$$F_i = F_p^i + F_m^i,$$

мұнда F_p^i – беттік күш, F_m^i – көлемдік күш.

$d\tau$ көлемінде x_i бағыты бойынша сырттай әсер ететін F_m^i көлемдік күшінің меншікті салмағын $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ арқылы, ал оның компоненттерін $f_i, i = 1, \dots, d$ арқылы белгілейік. Демек, F_m^i – көлемдік күші:

$$F_m^i = \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\tau$$

Сонымен қатар, $d\tau$ көлемінің бетіне x_j нормаль бағыты бойынша әсер ететін F_p^i беттік күші

$$F_p^i = \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\tau,$$

өрнекпен анықталады, мұнда σ_{ij} – кернеу тензоры.

Олай болса, сұйықтыққа қозғалысына әсер ететін толық күш (көлемдік күш және беттік күш):

$$F_i = f_i d\tau + \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\tau, \quad (2.1)$$

Сонымен қатар, қозғалыстағы сұйықтықтың (дененің) импульсін ескерсек, онда

$$P_i = \rho u_i d\tau \quad (2.2)$$

өрнегі орынды. Ньютонның екінші заңы бойынша қозғалыстағы дененің импульсінің өзгерісі денеге әсер ететін күшке тура пропорционал екені белгілі, яғни

$$F_i = \frac{dP_i}{dt} \quad (2.3)$$

(2.2) өрнектегі P_i импульсінің мәнін (2.3) өрнектің оң жағына апарып қойып және $u_j = \frac{dx_j}{dt}$ екенін ескерсек, онда

$$F_i = \frac{dP_i}{dt} = \frac{d}{dt} (\rho u_i d\tau) = \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^d u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) d\tau. \quad (2.4)$$

(2.1) және (2.4) оң жағын теңестірсек

$$f_i d\tau + \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\tau = \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^d u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) d\tau \quad (2.5)$$

түрінде өрнек орынды болады. (2.4) өрнекті Ω еркін көлем бойынша интегралдайтын болсақ, онда

$$\int_{\Omega} \left(f_i + \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) d\tau = \int_{\Omega} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^d u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) d\tau \quad (2.6)$$

немесе

$$\int_{\Omega} \left[\left(f_i + \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) - \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^d u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right] d\tau = 0. \quad (2.7)$$

Жоғарыдағы өрнектен интеграл астындағы функция үзіліссіз, Ω еркін көлем екенін ескерсек, Коши импульс теңдеуін алынады:

$$f_i + \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^d u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (2.8)$$

Кернеу тензоры екі құраушыдан тұрады, олар: нормалдық бірқалыпты кернеу (қысым) $p = -\frac{\sum_{i=1}^d \sigma_{ii}}{n}$ және девиаторлық кернеу τ_{ij} . Девиаторлық кернеу сұйықтықтың деформациясын сипаттайды және сұйықтықтың жылдамдығының градиентімен тығыз байланысты.

Енді сұйықтықтың жылдамдығының градиентін түсіндіру үшін кез келген $q = (q_i) \in \mathbb{R}$ нүктесі мен сол нүктедегі $u_i(q)$ жылдамдықты қарастырайық. q нүктесінің dq орын ауыстыруында жылдамдықтың аз ғана du өзгерісі

$$du_i = dq \cdot \nabla u_i = \sum_{j=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \quad (2.9)$$

өрнегімен анықталады. (2.9) өрнекті келесі түрде

$$du_i = \sum_{j=1}^d \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j + \sum_{j=1}^d \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j \quad (2.10)$$

қайта жазуға болады немесе

$$du_i = \sum_{j=1}^d \frac{1}{2} (e_{ij} + \omega_{ij}) dx_j \quad (2.11)$$

тең, мұнда $e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ жылдамдықтың деформация тензоры және $\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ айналымдылық тензоры. Ньютондық емес сұйықтықтар үшін девиаторлық кернеудің тензоры жылдамдықтың деформациясының тензорына тура пропорционал, яғни

$$\tau_{ij} = 2\nu e_{ij} \quad (2.12)$$

өрнек орынды.

Сығылмайтын сұйықтықтың толық кернеу тензоры

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} - p\delta_{ij} \quad (2.13)$$

өрнекпен анықталады.

Енді $\sigma_{ij} = 2\nu e_{ij} - p\delta_{ij}$ байланысты ескеріп, (2.8) өрнекке апарып қойсақ, онда бұл өрнектің сол жағы

$$\begin{aligned} f_i + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu e_{ij} - p\delta_{ij}) &= f_i + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu e_{ij}) - \frac{\partial p}{\partial x_i} = \\ f_i + \nu \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial p}{\partial x_i} &= f_i + \nu \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) - \frac{\partial p}{\partial x_i} = \\ f_i + \nu \nabla^2 u_i + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^d \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} &= f_i + \nu \nabla^2 u_i + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} u - \frac{\partial p}{\partial x_i} = \\ f_i + \nu \Delta u_i - \nabla p. \end{aligned} \quad (2.14)$$

(2.14) қорытынды нәтижесін (2.8) өрнектің сол жағына апарып қойсақ, онда

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^d u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = f_i + \nu \Delta u_i - \nabla p. \quad (2.15)$$

Навье-Стокс теңдеулер жүйесін аламыз.

$\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3$ шенелген облыста сығылмайтын сұйықтықтың $[0, T], T > 0$ аралығында қозғалысы келесі Коши теңдеулер жүйесімен сипатталады:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^d u_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \operatorname{Div} \sigma + \mathbf{f}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (2.16)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (2.17)$$

мұнда $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), \dots, u_d(\mathbf{x}, t))$ – сұйықтықтың жылдамдығы, $p(\mathbf{x}, t)$ – сұйықтықтың қысымы, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = (f_1(\mathbf{x}, t), \dots, f_d(\mathbf{x}, t))$ – сұйықтыққа әсер етуші сыртқы күштердің тығыздығы, σ – кернеу тензорының девиаторы және $\operatorname{tr} \sigma = 0$, ал $\operatorname{Div} \sigma - \nabla$ (набл) векторы мен кернеу тензорының девиаторы арасындағы скаляр көбейтінді, оның компоненталары:

$$\left(\sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j}, \dots, \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{dj}}{\partial x_j} \right)$$

түрінде болады. Сығылмайтын сұйықтықтың толық кернеу тензоры

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{E} + \sigma,$$

мұнда $\mathbf{E}$ —бірлік тензор. Кернеу тензорының девиаторын (2.16)-(2.17) теңдеулер жүйесінің белгісіздері арқылы өрнектеу үшін кернеу тензорының девиаторы мен жылдамдық деформациясының тензоры және олардың уақыт бойынша туындылары арасындағы қатынас қолданылады. Жылдамдық деформациясының тензорын ε арқылы белгілейді, оның компоненттері келесі түрде анықталады

$$\varepsilon = (\varepsilon_{ij})_{i,j=1}^d, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Мұндай кернеу тензорының девиаторы мен жылдамдық деформациясының тензоры және олардың уақыт бойынша туындылары арасындағы қатынас *реологиялық* қатынас деп атайды.

Егер $\sigma = 0$ болса, онда идеал сығылмайтын сұйықтықтың қозғалысы Эйлер теңдеулер жүйесімен сипатталады:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^d u_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \mathbf{f}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (2.18)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T]. \quad (2.19)$$

Алайда, соңғы бір жарым ғасырдан астам уақытта гидродинамика саласында негізінен ньютондық емес сұйықтықтардың қозғалысы зерттелініп келеді. Ньютондық емес сұйықтықтардың қозғалысының реологиялық қатынасы

$$\sigma = 2\nu\varepsilon \quad (2.20)$$

өрнегімен анықталады, мұнда ν — тұтқырлықтың кинематикалық коэффициенті. Кернеу тензорының девиаторы (2.20) мәнін (2.16)-(2.17) теңдеулер жүйесіне қойғанда

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^d u_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} - \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \mathbf{f}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (2.21)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T] \quad (2.22)$$

Навье-Стокс теңдеулер жүйесін шығады. Дегенменде, Павловский өз жұмысында кернеу тензорының девиаторын (2.20) өрнегінің орнына келесі түрде анықтады

$$\sigma = 2\nu\varepsilon + 2\kappa \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad \nu > 0, \quad \kappa > 0, \quad (2.23)$$

мұнда κ —ретардация уақыты немесе деформацияның релаксация уақыты, ал

$$\frac{d}{dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^d u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

өрнегі тұтас орта механикасы теориясынан белгілі (Лагранждық әдіс) уақыт бойынша толық (субстанционалды) туынды.

(2.23) формуламен анықталған кернеу тензорының девиаторын (2.16)-(2.17) теңдеулер жүйесіне қойғанда

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^d u_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} - \nu \Delta \mathbf{u} - \kappa \Delta \mathbf{u}_t + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \mathbf{f}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (2.24)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T] \quad (2.25)$$

тұтқыр сығылмайтын ньютондық емес сұйықтықтың релаксациялық қасиеттерін сипаттайтын Кельвин-Фойгт (Навье-Стокс-Фойгт) теңдеулер жүйесі қорытылады. Егер сұйықтық қозғалысқа түскен кейін кенеттен әсер ететін күштерді ескерсек, онда сұйықтықтың қозғалысы

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} - \kappa \Delta \mathbf{u}_t - \int_0^t K(t - \tau) \Delta \mathbf{u}(\tau) d\tau + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (2.26)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T] \quad (2.27)$$

Осколков теңдеулер жүйесі немесе интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесімен сипатталады.

Список литературы

- [1] S.N. Antontsev, A.V. Kazhikhov, V.N. Monakhov. Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids. (Translation from the original Russian edition, Nauka, Novosibirsk, 1983), North-Holland, Amsterdam, 1990.