1. Коши тектес интеграл туындыларының шектік мәндері

Айталық, $\varphi(t)$ функциясының m-ші туындысы L тұйық контурында Гельдер шартын қанағаттандырсын. Онда

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$$

Коши тектес интегралы арқылы анықталған $\Phi(z)$ функциясының m-ретті туындысының контурда шекаралық мәні бар және олар

$$\Phi^{(m)+}(t)=\frac{1}{2}\varphi^{(m)}(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau-t}d\tau, \tag{14}$$

$$\Phi^{(m)-}(t)=-\frac{1}{2}\varphi^{(m)}(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau-t}d\tau \tag{15}$$

формулалары арқылы анықталады.

Шынында да, $\Phi(z)$ функциясының m-ретті туындысы

$$\Phi^{(m)}(z)=\frac{m!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-z)^{m+1}}d\tau\ .$$

формуласы арқылы есептелінетіні айқын. Мұны m рет бөліктеп интегралдасақ, контур тұйықтылығынан әрбір интегралданған бөлігі нөлге айналады.

Сондықтан

$$\Phi^{(m)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau-z}d\tau\ .$$

Бұған Сохоцкий формулаларын қолдансақ, (14) және (15) формулаларға келеміз.

2. Коши тектес интегралдың шектік мәндері, туындылары

Енді дифференциалдану және контур нүктесіне шекке көшу операцияларының орын ауыстыру заңдылығына ие екенін, яғни Коши тектес интегралдың туындыларының контурдағы шектік мәндері мен оның шектік мәндері туындыларының тең екенін көрсетейік. Ең алдымен (14), (15) формулаларда m=1 деп есептейік. Сонда

$$[\Phi'(t)]^{\pm} = \left[\Phi^{\pm}(t)\right]'$$

екенін дәлелдеу керек. Егер

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi'(\tau)}{\tau - z}\,d\tau$$

белгілеуін енгізсек, онда

$$[\Phi'(t)]^{\pm} = \psi^{\pm}(t)$$

екенін және

$$\left[\Phi^{\pm}(t)\right]' = \psi^{\pm}(t)$$

болатынын дәлелдеу керек. Анықтылық үшін дәлелдеуді $[\Phi'(t)]^{+}$ үшін жүргізейік. Ал $\left[\Phi^{+}(z)\right]'$ контурға дейін үзіліссіз және контурда Гельдер шартын қанағаттандыратын болғандықтан, $\left[\Phi^{+}(t)\right]'$ бар және Гельдер шартын қанағаттандырады. Сонда

$$\left[\Phi^{+}(t)\right]' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi^{+}(t+\Delta t) - \Phi^{+}(t)}{\Delta t}.$$

Коши теоремасы бойынша

$$\Phi^{+}(t+\Delta t) - \Phi^{+}(t) = \int_t^{t+\Delta t} \left[\Phi^{+}(t)\right]' dt = \int_C \left[\Phi^{+}(z)\right]' dz,$$

мұнда С арқылы $Д^{+}$ аймағының ішінде толығымен жатқан контур белгіленген. Екінші жағынан

$$\int_C \left[\Phi^{+}(z)\right]' dz = \int_C \psi^{+}(z)dz = \psi^{+}(t)\Delta t + \int_C \left[\psi^{+}(z) - \psi^{+}(t)\right] dz.$$

С контурын ұзындығы $2|\Delta t|$ болатындай және кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін

$$\left|\psi^{+}(z) - \psi^{+}(t)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

теңсіздігі орындалатындай етіп аламыз. Бұлай етіп алуға болады, өйткені $\psi^{+}(z)$ контурға дейін үзіліссіз. Сонда

$$\left|\frac{\Phi^{+}(t+\Delta t)-\Phi^{+}(t)}{\Delta t}-\psi^{+}(t)\right|<\varepsilon$$

Мұнан

$$\left[\Phi^{+}(t)\right]' = \psi^{+}(t)$$

екені шығады. Дәл осылай $\Phi^{-}(z)$ жағдайы да дәлелденеді. Әрі қарай жалғастырып,
$\varphi^{(m)}(t)\in H$ болғанда

$$\left[\Phi^{\pm}(t)\right]^{(m)} = \left[\Phi^{(m)}(t)\right]^{\pm} \qquad (16)$$

екені дәлелденеді.

1. Ерекше интегралды дифференциалдау ережесі

Енді

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$$

ерекше интегралын дифференциалдау ережесін шығаруға болады. Ол үшін $\Phi^{+}(z)$ және $\left[\Phi^{(m)}(z)\right]^{+}$ функцияларының

$$\Phi^{+}(t)=\frac{1}{2}\varphi(t)+\Phi(t),$$

$$\left[\Phi^{(m)}(t)\right]^{+}=\frac{1}{2}\varphi^{(m)}(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau-t}d\tau$$

Сохоцкий формулаларын жазамыз. Ал $\varphi(t)$ функциясының ұйғаруымыз бойынша және $\Phi^{+}(t)$ функцияның дәлелдеуіміз бойынша m-ші ретке дейін туындалары бар, сондықтан $\Phi^{+}(t)$ функцияның да m-ші туындалары бар. Сонда бірінші теңдікті m рет дифференциалдап, сонан соң оны екінші теңдікпен салыстырып, сонымен бірге (16) теңдікті ескеріп

$$\Phi^{(m)}(t)=\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\right]^{(m)}=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau-t}d\tau \qquad (17)$$

аламыз.

Ескерту. Біз жоғарыда L контурын жатық сызық деп есептедік. Сохоцкий формулаларын саны ақырлы бұрыштық нүктелері бар контур жағдайында да дәлелдеуге болады.